О вариации действия в общей относительности

В.И. Марченко

Институт физических проблем им. П.Л. Капицы, РАН

При выводе уравнений эйнштейновской гравитации из вариационного принципа результат зависит от того после или до проведения варьирования воспользоваться свободой выбора координат. В первом случае возникает общепринятая система десяти уравнений на шесть компонент метрического тензора. Во втором случае возникнет система шести уравнений на шесть компонент. Оба варианта непротиворечивы, но второй заслуживает тщательного исследования, поскольку он даёт естественный путь для разрешения известных проблем самой теории гравитации и проблем, возникших при сравнении предсказаний теории с результатами наблюдений.

Уравнения гравитации в общей теории относительности,

$$\mathcal{T}_{ik} = 0, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{T}_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{\kappa}\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right), \tag{2}$$

выражают линейную связь между характеристиками искривлённого пространства-времени, тензором Риччи R_{ik}, $R = g^{ik}R_{ik}$, и тензором энергии-импульса материи T_{ik}. Здесь κ – эйнштейновская гравитационная постоянная, скорость света $c = 1$, см. ф-лу (95,5) [1]. Они были предложены Эйнштейном исходя из требования общей ковариантности к уравнениям второго порядка по пространственным и временным производным на метрический тензор g_{ik}.

Вариация действия гравитационного поля определяется выражением

$$\delta S_g = \delta\,\frac{1}{2\kappa}\int g^{ik}(\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km})\sqrt{-g}d\Omega,$$

где Γ^l_{ik} – символ Кристоффеля, см. §93 [1]. Требования общей ковариантности здесь использованы при определении вида зависимости действия от метрического тензора и его производных по координатам.

Вариация полного действия $\delta S = \delta S_g + \delta S_m$, где S_m – действие для материи, при малом изменении метрики δg^{ik} равна

$$\delta S = \frac{1}{2}\int \mathcal{T}_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega, \tag{3}$$

см. §95 [1]. Принято считать, что из этой формулы следуют все десять уравнений (1).

Однако, после появления теоремы Нётter в 1919 году, интерпретация общей теории относительности могла бы существенно измениться. Действительно, при малом изменении координат $x'^i = x^i + \xi^i$, в метрическом тензоре возникнет добавка $\delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i}$. Анализ вариации действия (3) при таком изменении метрики, см. [1] §94, приводит к соотношению

$$\mathcal{T}^k_{i;k} = 0. \tag{4}$$

Оно является кинематическим следствием отсутствия явной зависимости действия от координат x^i.

Поэтому, ничто не мешает понимать вариационный принцип иначе – как требование экстремальности действия только по отношению к физическим, не сводящимся к замене координат, вариациям метрического тензора. Такая интерпретация, по моему мнению, предпочтительна, поскольку тогда число возникающих динамических уравнений совпадает с числом компонент поля, описывающего гравитацию.

В общей теории относительности всегда, независимо от вида динамических уравнений, возможен выбор синхронной системы координат, см. [1] §97, удовлетворяющей условиям $g_{00} = 1, g_{0\alpha} = 0$, где греческий индекс соответствует пространственным координатам. Тогда, в качестве динамических переменных останутся шесть пространственных компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$. Соответственно, получаются шесть динамических уравнений гравитации

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta} = 0. \tag{5}$$

Вариации же действия (3) по компонентам δg^{00} и $\delta g^{0\alpha}$ задают, как это принято во всех остальных разделах теоретической физики, выражения для полных плотностей энергии и импульса гравитационного поля и материи.

Все решения системы десяти уравнений (1) являются решениями её подсистемы (5). Однако, эта подсистема, безусловно, имеет и новые решения, которые не удовлетворяют четырём дополнительным уравнениям $\mathcal{T}_{00} = \mathcal{T}_{0\alpha} = 0$.

Рассмотрим, например, эволюцию метрики с плоским пространством

$$ds^2 = dt^2 - b^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad (6)$$

ф-ла (113,10) [1], которая, согласно современным представлениям, соответствует наблюдаемой вселенной. Для описания материи используем приближение покоящейся в сопутствующей системе координат пылевой материи: $T_{00} = \mu$, где μ – плотность массы. Отличными от нуля компонентами символа Кристоффеля будут

$$\Gamma^0_{\alpha\beta} = -b\dot{b}g^{(0)}_{\alpha\beta}, \ \Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{\dot{b}}{b}\delta^\alpha_\beta,$$

где $g^{(0)}_{\alpha\beta}$ – пространственные компоненты метрического тензора при $b \equiv 1$. Тензор Риччи имеет лишь диагональные компоненты

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{b}}{b}, \ R_{\alpha\beta} = -(b\ddot{b} + 2\dot{b}^2)g^{(0)}_{\alpha\beta}. \qquad (7)$$

Соответственно, $R = -6b^{-2}(b\ddot{b} + \dot{b}^2)$. При этом, шесть уравнений (5) сводятся к одному уравнению

$$2b\ddot{b} + \dot{b}^2 = 0. \qquad (8)$$

Его первый интеграл есть $b\dot{b}^2 = c_1$, где c_1 – константа. Отсюда получим обычный закон расширения вселенной $b = (3\sqrt{c_1}t/2)^{2/3}$.

Заметим, что, вне зависимости от того каким динамическим уравнениям подчиняется метрический тензор, при подстановке выражения (2) в (4) члены с R_{ik} и R автоматически выпадут в силу тождества Бианки, см. ф-лу (92,10) [1] [1]. Поэтому соотношение (4) сводится к уравнению только на тензор энергии-импульса материи

$$T^k_{i;k} = 0. \qquad (9)$$

В согласии с этим соотношением в рассматриваемой задаче имеем

$$\dot{\mu} + 3\mu\frac{\dot{b}}{b} = 0.$$

Тем самым плотность массы просто отслеживает динамику метрики: $\mu = c_2 b^{-3}$, где c_2 – ещё одна независимая константа.

Константы c_1, c_2, очевидно, формируются на предшествующей стадии расширения, когда материя не может быть описана в рамках пылевого приближения.

Таким образом, пылевая материя не влияет на рассматриваемую стадию расширения. В частности, динамика метрики возможна и без материи. Этот результат принципиально отличается от принятого, где константы интегрирования связаны друг с другом соотношением $c_2 = 3c_1/\kappa$, следующим из уравнения $\mathcal{T}_{00} = 0$.

Похоже, что при предлагаемом изменении интерпретации эйнштейновской гравитации снимаются проблемы тёмных материи и энергии.

Благодарю Б.Э. Мейеровича за полезное обсуждение.

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. Москва, Наука (1988)

---

[1] Также по кинематическим причинам выпадет и космологическая постоянная Λ, см. [1] §111, поскольку ковариантная производная метрического тензора равна нулю.