Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 70 *1976* *Вып. 4*

МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СПИНОВЫХ ВОЛН

А. Ф. Андреев, В. И. Марченко

Предложено описание магнитных структур с помощью макроскопических мультипольных моментов. Найдены все типы макроскопически различных обменных магнитных структур ферромагнетиков или коллинеарных ферримагнетиков (32 типа), антиферромагнетиков (230 типов) и неколлинеарных ферримагнетиков (79 типов). Выяснен общий вид уравнений, описывающих длинноволновые низкочастотные спиновые волны. Рассмотренные примеры показывают, что во многих случаях должны существовать аномальные ветви спиновых колебаний.

Теория спиновых волн хорошо разработана для случая ферромагнетиков. С одной стороны, существует микроскопический подход [1, 2], основанный на модели Гейзенберга и позволяющий выяснить структуру основного состояния ферромагнетика и спектр спиновых волн во всем интервале частот. С другой стороны, низкочастотные длинноволновые спиновые волны могут быть описаны макроскопически с помощью уравнения Ландау — Лифшица [3].

Совершенно иная ситуация имеет место в случае антиферромагнетиков. Микроскопическая задача может быть решена здесь лишь для больших (т. е. квазиклассических) спинов, каковыми они, по крайней мере в большинстве случаев, фактически не являются. Существующая феноменологическая теория [4, 5] низкочастотных длинноволновых спиновых волн приводит во многих случаях к удовлетворительным результатам. Однако эта теория является по существу модельной, поскольку основные величины теории (моменты подрешеток) не являются макроскопическими. Они не могут быть получены путем макроскопического усреднения каких-либо физических величин.

В настоящей работе предложен общий макроскопический подход к исследованию низкочастотных длинноволновых спиновых волн в любых магнетиках, в которых магнитное упорядочение является результатом действия обменных сил, значительно превосходящих релятивистские взаимодействия. Предлагаемый подход не использует никаких модельных представлений о состоянии магнетика (локализованные спины, подрешетки и т. д.) и основан по существу лишь на соображениях симметрии. Основными величинами являются макроскопические мультипольные моменты, которые получаются из истинной микроскопической плотности магнитного момента путем определенного усреднения по физически бесконечно малым объемам.

Формулировка макроскопических уравнений для спиновых волн в существенной степени основана на макроскопическом анализе возможных типов симметрии обменных сил в магнетиках. С помощью мультипольных моментов оказывается возможным найти все типы (их общее число, как мы увидим, равно 373) макроскопически различных магнитных структур.

1. Макроскопические мультипольные моменты

Введем сначала макроскопические мультипольные моменты для простейшего случая, когда они характеризуют какую-либо скалярную микроскопическую величину. Пусть $\mathfrak{G}$ — пространственная группа симметрии равновесного состояния кристалла, т. е. группа преобразований, относительно которых инвариантна равновесная микроскопическая плотность заряда. Рассмотрим некоторое, вообще говоря, неравновесное состояние, характеризующееся микроскопически скалярной величиной $f(\mathbf{r})$ (это может быть, например, отклонение плотности заряда от равновесного значения). Задача состоит в нахождении совокупности макроскопических величин, по возможности наиболее полно характеризующих это состояние.

Любая макроскопическая величина $F(\mathbf{r})$ должна получаться из $f(\mathbf{r})$ в результате усреднения по макроскопическим объемам. В общем случае эту операцию можно представить следующим образом:

$$F(\mathbf{r})=\int f(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho})\,\Phi(\boldsymbol{\rho})\,d^3\boldsymbol{\rho}. \tag{1}$$

Интегрирование здесь производится по всему объему, $\Phi(\mathbf{r})$ — некоторая функция, достаточно быстро убывающая на бесконечности и существенно изменяющаяся на расстояниях, больших по сравнению с межатомным расстоянием, но малых по сравнению с характерным параметром длины макроскопической задачи (длиной волны и т. д.). В остальном функция $\Phi(\mathbf{r})$ произвольна. Для того чтобы получить макроскопическую величину общего вида, необходимо в качестве $\Phi(\mathbf{r})$ использовать функцию также достаточно общего вида.

Обозначим символом $\mathfrak{G}$ произвольное преобразование группы $\mathfrak{G}$ и рассмотрим состояние, соответствующее функции $f'(\mathbf{r})=f(\mathfrak{G}^{-1}\mathbf{r})$. Ясно, что любое уравнение, описывающее свойства состояния $f(\mathbf{r})$, должно быть инвариантным относительно преобразования $f(\mathbf{r})\to f'(\mathbf{r})$. Любое макроскопическое уравнение должно быть поэтому инвариантным относительно преобразования $F(\mathbf{r})\to F'(\mathbf{r})$, где $F'(\mathbf{r})$ получается путем подстановки в формулу (1) функции $f'(\mathbf{r})$ вместо $f(\mathbf{r})$:

$$F'(\mathbf{r})=\int f(\mathfrak{G}^{-1}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}))\,\Phi(\boldsymbol{\rho})\,d^3\boldsymbol{\rho}. \tag{2}$$

Пусть G — группа преобразований, соответствующая кристаллическому классу. Произвольный элемент G этой группы сам по себе, вообще говоря, не принадлежит группе $\mathfrak{G}$. Однако всегда существует вектор $\mathbf{a}$ с длиной порядка межатомного расстояния, трансляция на который в сочетании с преобразованием G порождает одно из преобразований $\mathfrak{G}$. Подставляя это в выражение для $F'(G\mathbf{r}+\mathbf{a})\approx F'(G\mathbf{r})$ и производя в интеграле замену переменных $G^{-1}\boldsymbol{\rho}\to\boldsymbol{\rho}$, получим

$$F'(G\mathbf{r})=\int f(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho})\,\Phi(G\boldsymbol{\rho})\,d^3\boldsymbol{\rho}. \tag{3}$$

Совокупность функций $\Phi(G\boldsymbol{\rho})$ со всеми возможными G осуществляет так называемое регулярное представление группы G. Будучи разложенным на неприводимые представления, чему соответствует представление функции Φ в виде суммы

$$\Phi(\mathbf{r})=\sum_n\sum_\alpha a_n{}^\alpha\Phi_n{}^\alpha(\mathbf{r}), \tag{4}$$

оно содержит все без исключения неприводимые представления группы G (см. [6]). В формуле (4) индекс n нумерует различные неприводимые представления, α — функции $\Phi_n{}^\alpha$, осуществляющие данное неприводимое представление. Подстановка (4) в (1) показывает, что произвольная макроскопическая величина является линейной комбинацией макроскопических величин $F_n^\alpha(\mathbf{r})$, определяемых соотношением

$$F_n^\alpha(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho})\,\Phi_n^\alpha(\boldsymbol{\rho})\,d^3\boldsymbol{\rho} \qquad (5)$$

и в силу (3) преобразующихся под действием преобразований кристаллического класса G следующим образом:

$$F_n^{\alpha'}(G\mathbf{r}) = G_n^{\alpha\beta} F_n^\beta(\mathbf{r}), \qquad (6)$$

где $G_n^{\alpha\beta}$ — матрица преобразования G в n-м неприводимом представлении. Любое макроскопическое уравнение должно быть инвариантно относительно преобразований (6). В изотропной среде (жидкость) разложение вида (4) есть разложение по сферическим функциям $Y_l^m(\mathbf{r}/|\mathbf{r}|)$. Соответствующие макроскопические величины $F_l^m(\mathbf{r})$ являются обобщением на случай бесконечной среды обычных 2^l-польных моментов [7], характеризующих конечные системы, и имеют смысл их плотностей. С несколько иной точки зрения они рассматривались Френкелем [8]. Для кристаллов аналогичную роль играют мультипольные моменты $F_n^\alpha(\mathbf{r})$. Они по существу совпадают с величинами, рассматривающимися в теории фазовых переходов второго рода Ландау в качестве параметров порядка в случае, когда переход происходит без изменения элементарной ячейки.

Выбор макроскопических моментов неоднозначен, что связано с произвольностью функции $\Phi(\mathbf{r})$. Поскольку, однако, их закон преобразования не зависит от выбора $\Phi(\mathbf{r})$, эта неоднозначность не отражается на физических следствиях. Она является выражением известной неоднозначности обычных мультипольных моментов, связанной с произвольностью выбора начала координат.

Рассмотрим теперь магнитоупорядоченный кристалл. Пусть $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ — микроскопическая плотность магнитного момента. Симметрия системы определяется одной из магнитных пространственных групп. Эти группы содержат в качестве своих элементов чисто пространственные преобразования (повороты, отражения, трансляции) в комбинациях с преобразованием R отражения времени. Такая характеристика симметрии является точной, но именно по этой причине в ней полностью теряются существенные приближенные свойства симметрии. Действительно, в свойствах магнетиков основную роль играют обменные силы, симметрия которых выше, чем симметрия слабых релятивистских взаимодействий. Указать только точную симметрию — это значит полностью потерять информацию о более высокой симметрии обменных сил.

Пренебрежем всеми релятивистскими взаимодействиями и рассмотрим обменную симметрию магнетика. Поскольку обменные силы зависят лишь от относительных ориентаций спинов, в данном случае кроме преобразования R появляется бесконечная совокупность новых преобразований симметрии, состоящая из всех вращений спинового пространства U (т. е. вращений всех спинов на один и тот же угол). В такой ситуации общая ориентация спинов относительно кристаллографических осей становится условной, и мы можем считать, что компоненты магнитного момента $m_i(\mathbf{r})$ при всех чисто пространственных преобразованиях ведут себя как скаляры и преобразуются как компоненты вектора лишь при вращениях спинового пространства. Преобразование R играет роль инверсии спинового пространства. Обменная симметрия определяется заданием одной из обменных пространственных групп, которые содержат все такие комбинации чисто пространственных преобразований, вращений спинового пространства U и преобразования R, относительно которых величины $m_i(\mathbf{r})$ инвариантны. Эти группы в настоящее время еще не классифицированы.

Группа $\mathfrak{G}$ симметрии плотности заряда получается из обменной пространственной группы путем формального отождествления элементов U и R с единичным преобразованием. Это есть группа симметрии вообще всех спиновых скаляров в системе.

Тем же способом, которым это было сделано выше для скаляров, введем макроскопические величины $M_{in}{}^{\alpha}(\mathbf{r})$, соответствующие каждой из компонент магнитного момента $m_i(\mathbf{r})$. Эти величины отличаются от $F_n{}^{\alpha}$ в следующем отношении. Поскольку функция $f(\mathbf{r})$ в равновесном состоянии инвариантна относительно группы $\mathfrak{G}$, все $F_n{}^{\alpha}$, кроме той из них, которая преобразуется по единичному представлению группы G, обязательно исчезают в равновесии. Магнитный же момент $m_i(\mathbf{r})$, вообще говоря, отнюдь не инвариантен относительно $\mathfrak{G}$ даже в равновесном состоянии. Поэтому любая из величин $M_{in}{}^{\alpha}$ может иметь в равновесии конечное значение. В случае, когда переход из магнитоупорядоченного состояния в парамагнитное происходит без изменения элементарной ячейки, величины $M_{in}{}^{\alpha}$ по-существу совпадают с введенными Дзялошинским [9] спиновыми плотностями (см. также [10]).

Задание функций $M_{in}{}^{\alpha}(\mathbf{r})$ дает полное макроскопическое описание магнитной структуры тела. С их помощью можно провести классификацию всех макроскопически различных магнитных структур, т. е. определить все обменные классы, которые находятся в таком же отношении к обменным пространственным группам, как магнитные классы — к магнитным пространственным группам. Прежде чем приступить к решению этой задачи, заметим следующее. Макроскопический момент $\mathbf{M}_n{}^{\alpha}\equiv\{M_{in}{}^{\alpha}\}$, преобразующийся по единичному представлению (обозначим его $\mathbf{M}^0$), пропорционален, очевидно, обычной намагниченности тела и может быть нормирован так, чтобы вообще с ней совпадать. Все остальные моменты не дают вклада в намагниченность, поэтому они являются антиферромагнитными моментами. Таким образом, если $\mathbf{M}^0\neq 0$, то тело является неколлинеарным ферримагнетиком или ферромагнетиком в зависимости от того, имеются другие отличные от нуля моменты или нет. (Строго говоря, в последнем случае тело может быть коллинеарным ферримагнетиком. Однако такой ферримагнетик по крайней мере в смысле макроскопических свойств не отличим от ферромагнетика.) Если же $\mathbf{M}^0=0$, но имеются другие моменты, то тело является антиферромагнетиком. Наконец, если все моменты равны нулю, тело вообще не обладает магнитной структурой.

2. Обменные классы

Выясним условия, которым должны удовлетворять векторы $\mathbf{M}_n{}^{\alpha}$ в равновесном состоянии. Рассмотрим скалярные произведения $\mathbf{M}_n{}^{\alpha}\mathbf{M}_m{}^{\beta}$. Они представляют собой спиновые скаляры, поэтому должны быть инвариантны относительно группы G. С другой стороны, эти величины преобразуются по прямому произведению неприводимых представлений n и m, поэтому они должны иметь следующий вид:

$$\mathbf{M}_n{}^{\alpha}\mathbf{M}_m{}^{\beta}=c_n\delta_{nm}\delta_{\alpha\beta},$$

где c_n — некоторые постоянные. Отсюда следует, что различные $\mathbf{M}_n{}^{\alpha}$ перпендикулярны друг другу, причем те из них, которые соответствуют одному многомерному представлению, имеют одинаковую длину. Максимальное число отличных от нуля моментов $\mathbf{M}_n{}^{\alpha}$ равно, следовательно, трем. Таким образом, могут осуществляться лишь следующие комбинации неприводимых представлений: 1) одно одномерное представление, т. е. отличен от нуля лишь один момент $\mathbf{M}_n^\alpha$, соответствующий этому представлению; 2) два одномерных представления или одно двумерное; при этом отличны от нуля два момента, они перпендикулярны друг другу, причем в последнем случае они равны по абсолютной величине; 3) три одномерных или одномерное и одно двумерное или, наконец, одно трехмерное представление; при этом отличны от нуля три момента, они взаимно перпендикулярны, причем во втором случае два из них, а в третьем — все моменты равны по абсолютной величине. Путем перебора всех комбинаций такого типа в каждом из 32 кристаллических классов G мы получим все макроскопически различные типы магнитных структур, т. е. все обменные классы.

Не все эти структуры, однако, могут фактически осуществляться. Многие из них не удовлетворяют следующему критерию устойчивости, аналогичному известному критерию в теории фазовых переходов второго рода [11]. Обозначим $\mathbf{m}_n^\alpha$ отклонения макроскопических моментов от равновесных значений и предположим, что существует инвариантное относительно группы G выражение вида

$$K_\mu^{\alpha\beta}\left(\mathbf{m}_n^\alpha\frac{\partial \mathbf{m}_m^\beta}{\partial x_\mu}-\mathbf{m}_m^\beta\frac{\partial \mathbf{m}_n^\alpha}{\partial x_\mu}\right), \tag{7}$$

где x_μ — пространственные координаты. Если моменты, соответствующие обоим представлениям n и m, в равновесии не равны нулю, то такая структура неустойчива. Действительно, рассмотрим отклонение от равновесия вида

$$\mathbf{m}_n^\alpha=[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})\mathbf{M}_n^\alpha] \tag{8}$$

для всех n и α, где $\mathbf{M}_n^\alpha$ — равновесные значения моментов, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ — медленно меняющаяся функция координат. Поскольку в каждой точке пространства такое отклонение сводится к повороту всех моментов на одинаковый угол, локальная (т. е. не содержащая пространственных производных) часть отклонения энергии δE от равновесного значения обращается в нуль. Главная часть δE определяется поэтому линейными по производным членами вида (7):

$$\delta E=\sum K_\mu^{\alpha\beta}\left(\mathbf{m}_n^\alpha\frac{\partial \mathbf{m}_m^\beta}{\partial x_\mu}-\mathbf{m}_m^\beta\frac{\partial \mathbf{m}_n^\alpha}{\partial x_\mu}\right), \tag{9}$$

где знак суммы означает суммирование по всем инвариантам вида (7). Подставляя сюда (8), получим после простых преобразований с учетом взаимной перпендикулярности равновесных моментов

$$\delta E=\sum K_\mu^{\alpha\beta}\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_\mu}[\boldsymbol{\omega}[\mathbf{M}_m^\beta\mathbf{M}_n^\alpha]].$$

Очевидно, что написанные выражения всегда могут принимать отрицательные значения. Для устойчивости структуры необходимо, таким образом, отсутствие инвариантов вида (7) для всех пар индексов n, m, для которых равновесные моменты отличны от нуля.

Рассмотрим для примера кристаллический класс $\boldsymbol{D}_3$. Группа $\boldsymbol{D}_3$ имеет три неприводимых представления: единичное A_1 (соответствующий момент мы обозначим $\mathbf{M}^0$); одномерное A_2, по которому преобразуется координата z (соответствующий момент мы обозначим $\mathbf{W}$); двумерное E, по которому преобразуются координаты x и y (соответствующие моменты обозначим $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$). Возможные комбинации представлений таковы: A_1, A_2,

(A_1A_2), E, (EA_1), (EA_2). Первая из них порождает ферромагнитную структуру, третья и пятая — неколлинеарные ферримагнитные, остальные — антиферромагнитные. В данном случае имеется четыре инварианта вида (7):

$$\mathbf{U}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}-\mathbf{V}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z},\quad \mathbf{W}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}-\mathbf{U}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y}-\mathbf{W}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}+\mathbf{V}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x},$$
$$\mathbf{M}^0\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}-\mathbf{U}\frac{\partial \mathbf{M}^0}{\partial x}+\mathbf{M}^0\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}-\mathbf{V}\frac{\partial \mathbf{M}^0}{\partial y},\quad \mathbf{M}^0\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial z}-\mathbf{W}\frac{\partial \mathbf{M}^0}{\partial z}. \tag{10}$$

Первый из них обусловливает неустойчивость всех структур, содержащих двумерное представление E, последний — структуры (A_1A_2). Таким образом, в группе $\boldsymbol{D}_3$ имеется всего 6 возможных с точки зрения симметрии структур. Однако только следующие 2 из них устойчивы: A_1, A_2.

В Приложении приводятся результаты аналогичного анализа всех 32 кристаллических классов. Первая цифра после символа класса означает полное число возможных с точки зрения симметрии структур, вторая — число устойчивых структур. Все устойчивые структуры затем фактически перечисляются. Обозначения представлений совпадают с принятыми в книге Ландау и Лифшица [6]. Следует иметь в виду, что представления B_1, B_2, B_3 в классе $\boldsymbol{D}_2$; B_{1g}, B_{2g}, B_{3g} и B_{1u}, B_{2u}, B_{3u} в классе $\boldsymbol{D}_{2h}$; B_1, B_2 в классах $\boldsymbol{C}_{2v}$, $\boldsymbol{C}_{4v}$, $\boldsymbol{D}_4$, $\boldsymbol{D}_6$, $\boldsymbol{C}_{6v}$; B_{1g}, B_{2g} и B_{1u}, B_{2u} в классах $\boldsymbol{D}_{4h}$ и $\boldsymbol{D}_{6h}$ эквивалентны в том смысле, что переходят друг в друга при преобразовании системы координат. Замена этих представлений друг на друга приводит к эквивалентным с точки зрения симметрии структурам.

Кроме того, имеется еще 32 тривиальных обменных класса, соответствующих кристаллам без магнитной структуры. Таким образом, полное число возможных из соображений симметрии макроскопически различных магнитных структур равно 561. Из них устойчивыми являются лишь перечисленные выше 373 структуры. Среди них по 32 пара- и ферромагнитных, 79 — неколлинеарных ферримагнитных и 230 — антиферромагнитных. Нельзя, впрочем, утверждать, что неустойчивые структуры вообще не имеют смысла. Если по какой-либо причине коэффициенты $K_\mu^{\alpha\beta}$ в формуле (9) аномально малы, то такие структуры могут осуществляться как геликоидальные (см. [9]). Каждая из 561 структур определяет некоторую группу преобразований (обменный класс), состоящую из всех произведений элементов группы G, спиновых вращений и преобразования R, относительно которых данная структура инвариантна.

Таким образом, имеется всего 561 обменный класс. Каждая из обменных структур, если ориентировать определенным образом моменты относительно кристаллографических осей и включить релятивистские взаимодействия, будет характеризоваться некоторой точной симметрией, определяемой одним из магнитных классов. При этом возникает задача об определении тех магнитных классов, которыми может характеризоваться каждый из обменных классов при учете релятивистских взаимодействий. Мы не будем заниматься здесь этим вопросом и ограничимся рассмотрением лишь тех свойств, которые определяются обменной симметрией.

Отметим, что формальное обобщение обычных магнитных групп путем включения в совокупность преобразований наряду с элементом R произвольных спиновых вращений (однако без связи с обменным приближением) производилось ранее рядом авторов [12–14]. По существу при этом речь шла о некоторой случайной симметрии, появление которой может быть обусловлено, например (см. [13]), свойствами того или иного модельного гамильтониана даже при учете релятивистских взаимодействий.

3. Общие уравнения для спиновых волн

Длинноволновые низкочастотные спиновые волны могут быть описаны макроскопически на основе уравнений движения для моментов. Введем эффективные поля

$$\mathbf{h}^{\alpha}(\mathbf{r}) = -\delta E/\delta \mathbf{m}^{\alpha}(\mathbf{r}), \qquad (11)$$

определяемые вариационными производными полной энергии по отклонениям моментов от равновесия $\mathbf{m}^{\alpha}(\mathbf{r})$. Здесь и в дальнейшем мы будем нумеровать моменты одним индексом α, так что несколько моментов с «соседними» индексами α могут принадлежать одному многомерному представлению. В равновесном состоянии все $\mathbf{h}^{\alpha}$ равны нулю. При малых отклонениях от равновесия производные от $\mathbf{m}^{\alpha}$ по времени должны быть линейными комбинациями эффективных полей:

$$\dot{m}_i{}^{\alpha} = g_{ik}^{\alpha\beta} h_k{}^{\beta} + g_{ik\mu}^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} h_k{}^{\beta} + g_{ik\mu\nu}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu}\, \partial x_{\nu}} h_k{}^{\beta} + \ldots, \qquad (12)$$

где $i, k, \ldots$ — векторные спиновые индексы. Поскольку речь идет о низкочастотных колебаниях, мы ограничились учетом лишь первых производных по времени. Величины $g_{ik\ldots}^{\alpha\beta}$ должны удовлетворять обычным условиям, следующим из инвариантности $t \to -t$ и сохранения энергии (мы всюду пренебрегаем диссипацией). Инвариантность относительно $t \to -t$ требует, чтобы все коэффициенты $g_{ik\ldots}^{\alpha\beta}$ меняли знак под действием R. Для сохранения энергии, т. е. обращения в нуль вычисленной с помощью (11) и (12) производной $\dot{E}$, необходимо, чтобы коэффициенты $g_{ik\ldots}^{\alpha\beta}$ удовлетворяли следующим условиям:

$$g_{ik}^{\alpha\beta} = -g_{ki}^{\beta\alpha}, \quad g_{ik\mu}^{\alpha\beta} = g_{ki\mu}^{\beta\alpha}, \quad g_{ik\mu\nu}^{\alpha\beta} = -g_{ki\mu\nu}^{\beta\alpha}, \ldots, \qquad (13)$$

т. е. коэффициенты при четных производных антисимметричны, а при нечетных — симметричны при одновременной перестановке индексов αi и βk.

Поскольку в обменном приближении спиновое пространство изотропно, зависящие от равновесных моментов коэффициенты $g_{ik\ldots}^{\alpha\beta}$ могут содержать лишь члены, пропорциональные следующим комбинациям моментов:

$$\varepsilon_{ikl} M_l{}^{\alpha}, \quad [\mathbf{M}^{\alpha}\mathbf{M}^{\beta}]_i M_k{}^{\gamma}, \quad \delta_{ik}(\mathbf{M}^{\gamma}[\mathbf{M}^{\alpha}\mathbf{M}^{\beta}]),$$

которые представляют собой спиновые тензоры второго ранга, меняющие знак под действием преобразования R. Имеем

$$g_{ik}^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{ikl} M_l{}^{\gamma} + \gamma^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho} M_i{}^{\gamma} [\mathbf{M}^{\sigma}\mathbf{M}^{\rho}]_k - \gamma^{\beta\alpha\gamma\sigma\rho} M_k{}^{\gamma} [\mathbf{M}^{\sigma}\mathbf{M}^{\rho}]_i + \\ + \delta_{ik} \tilde{\gamma}^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho} (\mathbf{M}^{\gamma}[\mathbf{M}^{\sigma}\mathbf{M}^{\rho}]),$$

где величины $\gamma^{\cdots}$ и $\tilde{\gamma}^{\cdots}$ представляют собой спиновые скаляры, при преобразованиях группы G преобразующиеся как «тензоры», т. е. как произведения функций $\Phi^{\alpha}\Phi^{\beta}\Phi^{\gamma}\ldots$, но являющиеся инвариантными тензорами, т. е. не меняющими своего вида под действием группы G. Из условий (13) следует, что

$$\gamma^{\alpha\beta\gamma} = \gamma^{\beta\alpha\gamma}, \quad \tilde{\gamma}^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho} = -\tilde{\gamma}^{\beta\alpha\gamma\sigma\rho}.$$

Аналогичным образом могут быть записаны и величины $g_{ik\mu}^{\alpha\beta}, \ldots$ В результате общие уравнения (12) приобретают после простых преобразований следующий вид:

$$\dot{m}_i{}^{\alpha} = \Gamma^{\alpha\beta\gamma} [\mathbf{h}^{\beta}\mathbf{M}^{\gamma}]_i + \Gamma_1^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho} M_i{}^{\gamma} [\mathbf{M}^{\sigma}\mathbf{M}^{\rho}]_k h_k{}^{\beta} - \\ - \Gamma_2^{\beta\alpha\gamma\sigma\rho} M_k{}^{\gamma} [\mathbf{M}^{\sigma}\mathbf{M}^{\rho}]_i h_k{}^{\beta} + \tilde{\Gamma}^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho} (\mathbf{M}^{\gamma}[\mathbf{M}^{\sigma}\mathbf{M}^{\rho}]) h_i{}^{\beta}, \qquad (14)$$

где

$$\Gamma^{\alpha\beta\gamma}=\gamma^{\alpha\beta\gamma}+\gamma_1^{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla^\delta+\gamma_2^{\alpha\beta\gamma\delta}\Delta^\delta,$$

$$\Gamma_1^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho}=\gamma^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho}+\gamma_1^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho\tau}\nabla_1^\tau+\gamma_2^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho\tau}\Delta_1^\tau,$$

$$\Gamma_2^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho}=\gamma^{\beta\alpha\gamma\sigma\rho}-\gamma_1^{\beta\alpha\gamma\sigma\rho\tau}\nabla_2^\tau+\gamma_2^{\beta\alpha\gamma\sigma\rho\tau}\Delta_2^\tau,$$

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho}=\tilde{\gamma}^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho}+\tilde{\gamma}_1^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho\tau}\tilde{\nabla}^\tau+\tilde{\gamma}_2^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho\tau}\tilde{\Delta}^\tau;$$

∇^α, $\nabla_{1,2}^\alpha$, $\tilde{\nabla}^\alpha$ — общие линейные комбинации из всех пространственных производных нечетного порядка, преобразующиеся как Φ^α; Δ^α, $\Delta_{1,2}^\alpha$, $\tilde{\Delta}^\alpha$ — комбинации такого же типа из производных четного порядка, все величины γ являются некоторыми инвариантными тензорами, причем

$$\gamma_1^{\alpha\beta\gamma\delta}=-\gamma_1^{\beta\alpha\gamma\delta},\quad \gamma_2^{\alpha\beta\gamma\delta}=\gamma_2^{\beta\alpha\gamma\delta},\quad \tilde{\gamma}_1^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho\tau}=\tilde{\gamma}_1^{\beta\alpha\gamma\sigma\rho\tau},\quad \tilde{\gamma}_2^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho\tau}=-\tilde{\gamma}_2^{\beta\alpha\gamma\sigma\rho\tau}.$$

Общие уравнения (14) существенно упрощаются, если в равновесии отличен от нуля лишь один из моментов. В этом случае последние три члена обращаются в нуль:

$$\dot{\mathbf{m}}^\alpha=\Gamma^{\alpha\beta\gamma}[\mathbf{h}^\beta\mathbf{M}^\gamma]. \tag{15}$$

Если в равновесии отличны от нуля два момента, то обращается в нуль последний член в (14). Пусть индексы $a, b, c, \ldots$ пробегают лишь те два значения α, которые соответствуют отличным от нуля равновесным моментам. Тогда

$$[\mathbf{M}^a\mathbf{M}^b]=|\mathbf{M}^a|\ |\mathbf{M}^b|\boldsymbol{\nu}\varepsilon^{ab},$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали к плоскости, в которой лежат равновесные моменты, ε^{ab} — двумерный антисимметричный единичный «тензор». Уравнения для структур с двумя равновесными моментами приобретают следующий вид:

$$\dot{\mathbf{m}}^\alpha=\Gamma^{\alpha\beta\gamma}[\mathbf{h}^\beta\mathbf{M}^\gamma]+\hat{\Gamma}_1^{\alpha\beta a}\mathbf{M}^a(\mathbf{h}^\beta\boldsymbol{\nu})-\hat{\Gamma}_2^{\beta\alpha a}\boldsymbol{\nu}[\mathbf{M}^a\mathbf{h}^\beta], \tag{16}$$

где

$$\hat{\Gamma}_{1,2}^{\alpha\beta a}=\Pi\Gamma_{1,2}^{\alpha\beta abc}\varepsilon^{bc},$$

Π — произведение модулей равновесных моментов.

По поводу уравнений (14)—(16) необходимо сделать следующее замечание. При их выводе существенно предположение, что речь идет о низкочастотных колебаниях. Однако буквальное применение уравнений приводит, вообще говоря, к появлению оптических ветвей, т. е. высоких обменных частот, не обращающихся в нуль при стремлении волнового вектора к нулю. Это означает, что процедура использования написанных выше уравнений должна заключаться в следующем. Сначала пренебрегаем всеми пространственными производными и находим собственные частоты. Те частоты, которые оказываются конечными в нулевом приближении, есть высокие частоты, которые мы не имеем права рассматривать. Однако можно утверждать, что линейные комбинации моментов $\mathbf{m}^\alpha$, соответствующие этим частотам, если и порождают, то только высокочастотные колебания. Некоторое число частот в нулевом приближении обращается в нуль. Для их вычисления мы должны перейти к следующему приближению, т. е. учесть главные члены с пространственными производными. При этом высокочастотные линейные комбинации моментов можно просто положить равными нулю, т. е. «заморозить» высокочастотные колебания. Учет соответствующих им степеней свободы привел бы к несущественной перенормировке некоторых констант. Наряду с малыми членами, содержащими производные, можно учесть также члены релятивистского происхождения. Такие члены мы будем рассматривать ниже лишь в тех случаях, когда их общий вид может быть установлен без предположений о некотором конкретном расположении моментов относительно кристаллографических осей.

Для нахождения связи эффективных полей $\mathbf{h}^\alpha$ с моментами $\mathbf{m}^\alpha$ необходимо написать выражение для отклонения δE энергии от равновесного значения. Рассмотрим локальную часть δE. Обменная энергия кристалла зависит только от скалярных произведений $\mathbf{M}^\alpha\mathbf{M}^\beta=W^{\alpha\beta}$. Отклонения $w^{\alpha\beta}$ этих величин от равновесных значений равны

$$w^{\alpha\beta}=\mathbf{m}^\alpha\mathbf{M}^\beta+\mathbf{m}^\beta\mathbf{M}^\alpha+\mathbf{m}^\alpha\mathbf{m}^\beta. \tag{17}$$

Энергия δE может быть записана в виде

$$\delta E=F^{\alpha\beta}w^{\alpha\beta}+{}^1/_2F^{\alpha\beta\gamma\delta}w^{\alpha\beta}w^{\gamma\delta}, \tag{18}$$

где инвариантные тензоры $F^{\cdots}$ удовлетворяют условиям

$$F^{\alpha\beta}=F^{\beta\alpha},\qquad F^{\alpha\beta\gamma\delta}=F^{\beta\alpha\gamma\delta}=F^{\alpha\beta\delta\gamma}=F^{\gamma\delta\alpha\beta}. \tag{19}$$

Кроме того, линейные по $\mathbf{m}^\alpha$ члены в формуле (18) должны обращаться в нуль. Отсюда имеем

$$F^{\alpha\beta}\mathbf{M}^\beta=0 \tag{20}$$

при всех α.

Нелокальная часть энергии δE с точностью до величин второго порядка по производным равна

$$\delta E={}^1/_2K^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{m}^\alpha\partial^\gamma\mathbf{m}^\beta-\mathbf{m}^\beta\partial^\gamma\mathbf{m}^\alpha)+{}^1/_2a^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial^\gamma\mathbf{m}^\alpha\partial^\delta\mathbf{m}^\beta, \tag{21}$$

где ∂^α — общая линейная комбинация первых пространственных производных, преобразующаяся как Φ^α; $K^{\alpha\beta\gamma}$ и $a^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — инвариантные тензоры, удовлетворяющие условиям

$$K^{\alpha\beta\gamma}=-K^{\beta\alpha\gamma},\qquad a^{\alpha\beta\gamma\delta}=a^{\beta\alpha\gamma\delta}=a^{\alpha\beta\delta\gamma}. \tag{22}$$

Ниже мы рассмотрим несколько характерных примеров применения общих уравнений.

4. Примеры

1. Рассмотрим наиболее изученные экспериментально и теоретически антиферромагнитные структуры A_{2g} и A_{2u} в классе D_{3d}. Первая из них реализуется, например, в $FeCO_3$ и $MnCO_3$, вторая — в Cr_2O_3. Моменты, соответствующие одномерным представлениям A_{1g}, A_{2g}, A_{1u}, A_{2u}, обозначим соответственно **M**, **W**, **P**, **Z**. Пары моментов, преобразующихся по двумерным представлениям E_g и E_u, обозначим соответственно (**U**, **V**) и (**X**, **Y**). Отклонения моментов от равновесных значений всюду будем обозначать соответствующими маленькими буквами. В рассматриваемых веществах переход из антиферромагнитного состояния в парамагнитное происходит без изменения элементарной ячейки, поэтому макроскопические моменты по существу совпадают с фигурирующими в работе [10] спиновыми плотностями.

В структуре A_{2u} отличен от нуля равновесный момент **Z**. Уравнения движения (15) в нулевом приближении приобретают следующий вид

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{m}}=\gamma_0[\mathbf{h}^z\mathbf{Z}],\quad \dot{\mathbf{z}}=\gamma_0[\mathbf{h}^m\mathbf{Z}],\quad \dot{\mathbf{p}}=\gamma_1[\mathbf{h}^w\mathbf{Z}],\quad \dot{\mathbf{w}}=\gamma_1[\mathbf{h}^p\mathbf{Z}],\\ \dot{\mathbf{u}}=\gamma_2[\mathbf{h}^y\mathbf{Z}],\quad \dot{\mathbf{y}}=\gamma_2[\mathbf{h}^u\mathbf{Z}],\quad \dot{\mathbf{v}}=-\gamma_2[\mathbf{h}^x\mathbf{Z}],\quad \dot{\mathbf{x}}=-\gamma_2[\mathbf{h}^v\mathbf{Z}],\end{gathered} \tag{23}$$

где $\gamma_0=\gamma^{mzz}=\gamma^{zmz}$, $\gamma_1=\gamma^{pwz}=\gamma^{wpz}$, $\gamma_2=\gamma^{uyz}=\gamma^{yuz}=-\gamma^{vxz}=-\gamma^{xvz}$. Тензор $F^{\alpha\beta}$ всегда имеет только диагональные компоненты, из которых в данном случае в силу (20) обращается в нуль лишь F^{zz}. Из уравнений (23) при этом следует, что пары переменных $(\mathbf{p}, \mathbf{w})$, $(\mathbf{u}, \mathbf{y})$, $(\mathbf{v}, \mathbf{x})$, зацепляясь друг за друга, соответствуют колебаниям с высокими обменными частотами. При определении низкочастотных колебаний можно все их положить равными нулю. У нас остаются, следовательно, лишь первые два уравнения (23), в которых для эффективных полей можно использовать следующие выражения:

$$\begin{gathered}\mathbf{h}^m=-F_m\mathbf{m}-K^{mzz}\partial\mathbf{z}/\partial z,\\ h_i^z=-\alpha_{ik}z_k+K^{mzz}\partial m_i/\partial z-a_{\mu\nu}k_\mu k_\nu z_i,\end{gathered}\tag{24}$$

учитывающие релятивистскую энергию анизотропии. Здесь $F_m=2F^{mm}$, α_{ik} — тензор анизотропии, $a_{\mu\nu}k_\mu k_\nu$ — инвариантная квадратичная форма, составленная из компонент волнового вектора $\{k_\mu\}=\mathbf{k}$. Слагаемые, содержащие пространственные производные, получаются из общей формулы (21). Подстановка (24) в первые два уравнения (23) приводит к спектру частот, совпадающему с результатом обычной двухподрешеточной модели.

Иная ситуация возникает в структуре A_{2g}, где в равновесии отличен от нуля момент $\mathbf{W}$. В нулевом приближении здесь конечный результат получается лишь для следующих производных:

$$\dot{\mathbf{w}}=-\gamma_0F_m[\mathbf{m}\mathbf{W}],\quad \dot{\mathbf{p}}=\gamma^{pzw}[\mathbf{h}^z\mathbf{W}],\quad \dot{\mathbf{z}}=\gamma^{pzw}[\mathbf{h}^p\mathbf{W}],\tag{25}$$

где $\gamma_0=\gamma^{mww}$. Поскольку теперь единственной равной нулю диагональной компонентой тензора $F^{\alpha\beta}$ является F^{ww}, должны быть заморожены только две переменные $\mathbf{p}$ и $\mathbf{z}$. Все остальные временные производные обращаются в нуль в силу симметрии $\mathbf{D}_{3d}$. Для их вычисления мы должны учесть в уравнениях линейные по пространственным производным члены:

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{u}}=\gamma_1\frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{h}^x\mathbf{W}]+\gamma_2\left(\frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{h}^x\mathbf{W}]-\frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{h}^y\mathbf{W}]\right),\\
\dot{\mathbf{v}}=\gamma_1\frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{h}^y\mathbf{W}]-\gamma_2\left(\frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{h}^y\mathbf{W}]+\frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{h}^x\mathbf{W}]\right),\\
\dot{\mathbf{x}}=-\gamma_1\frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{h}^u\mathbf{W}]-\gamma_2\left(\frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{h}^u\mathbf{W}]-\frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{h}^v\mathbf{W}]\right)+\gamma_3\frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{h}^m\mathbf{W}],\\
\dot{\mathbf{y}}=-\gamma_1\frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{h}^v\mathbf{W}]+\gamma_2\left(\frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{h}^v\mathbf{W}]+\frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{h}^u\mathbf{W}]\right)-\gamma_3\frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{h}^m\mathbf{W}],\\
\dot{\mathbf{m}}=\gamma_0[\mathbf{h}^w\mathbf{W}]+\gamma_3\left(\frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{h}^y\mathbf{W}]-\frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{h}^x\mathbf{W}]\right),\end{gathered}\tag{26}$$

где

$$\gamma_1=\gamma_1^{uxwz}=\gamma_1^{vywz},\quad \gamma_2=\gamma_1^{uxwx}=-\gamma_1^{uywy}=-\gamma_1^{vxwy}=-\gamma_1^{vywx},$$

$$\gamma_3=\gamma_1^{mywx}=-\gamma_1^{mxwy}.$$

Как будет видно ниже, во всех низкочастотных колебательных модах амплитуда колебаний $\mathbf{w}$ значительно превосходит амплитуды колебаний всех других переменных. Поэтому в правых частях уравнений (26) следует учесть те квадратичные по пространственным производным члены, которые содержат переменную $\mathbf{w}$. Такие члены возникают из-за линейных по производным слагаемых в выражении для эффективных полей $\mathbf{h}^x$ и $\mathbf{h}^y$:

$$\mathbf{h}^x=-F_x\mathbf{x}+K_2\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}, \qquad \mathbf{h}^y=-F_x\mathbf{y}-K_2\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x},$$

где $F_x=2F^{xx}=2F^{yy}$, $K_2=K^{wyx}=-K^{wxy}$. В выражениях для $\mathbf{h}^u=-F_u\mathbf{u}$ и $\mathbf{h}^v=-F_u\mathbf{v}$ $(F_u=2F^{uu}=2F^{vv})$ таких членов нет. Кроме того, они имеются в выражении для $\mathbf{h}^w$:

$$\mathbf{h}^w=\mathbf{h}_0{}^w+K_2\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}-\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y}\right),$$

где

$$h_{0i}{}^w=-\alpha_{ik}w_k+a_{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}w_i$$

— эффективное поле, вычисленное без учета возможности отклонения от равновесия других переменных и совершенно аналогичное формуле (24).

Учитывая все сказанное и выражая пространственные производные через компоненты волнового вектора, получим

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{m}}&=\gamma_0[\mathbf{h}_0{}^w\mathbf{W}]+i(\gamma_0K_2-\gamma_3F_x)(k_x[\mathbf{y}\mathbf{W}]-k_y[\mathbf{x}\mathbf{W}])+\gamma_3K_2(k_x{}^2+k_y{}^2)[\mathbf{w}\mathbf{W}],\\
\dot{\mathbf{u}}&=-iF_x\{(\gamma_1k_z+\gamma_2k_x)[\mathbf{x}\mathbf{W}]-\gamma_2k_y[\mathbf{y}\mathbf{W}]\}-K_2(\gamma_1k_yk_z+2\gamma_2k_xk_y)[\mathbf{w}\mathbf{W}],\\
\dot{\mathbf{v}}&=-iF_x\{(\gamma_1k_z-\gamma_2k_x)[\mathbf{y}\mathbf{W}]-\gamma_2k_y[\mathbf{x}\mathbf{W}]\}+K_2(\gamma_1k_xk_z+\gamma_2k_y{}^2-\gamma_2k_x{}^2)[\mathbf{w}\mathbf{W}], \qquad (27)\\
\dot{\mathbf{x}}&=iF_u\{(\gamma_1k_z+\gamma_2k_x)[\mathbf{u}\mathbf{W}]-\gamma_2k_y[\mathbf{u}\mathbf{W}]\}-i\gamma_3F_mk_y[\mathbf{m}\mathbf{W}],\\
\dot{\mathbf{y}}&=iF_u\{(\gamma_1k_z-\gamma_2k_x)[\mathbf{v}\mathbf{W}]-\gamma_2k_y[\mathbf{u}\mathbf{W}]\}+i\gamma_3F_mk_x[\mathbf{m}\mathbf{W}].
\end{aligned}$$

Рассмотрим область не очень малых значений волнового вектора $(ak^2\gg\alpha)$, в которой можно пренебречь константами анизотропии в выражении для $\mathbf{h}_0{}^w$. Если вместо $\mathbf{w}$ ввести новую переменную $\mathbf{w}'=k\mathbf{w}$, то уравнения (27) вместе с первым из уравнений (25) будут представлять собой замкнутую систему линейных уравнений с коэффициентами, являющимися однородными функциями первого порядка от частоты ω и компонент волнового вектора. Характеристическое уравнение является кубическим относительно ω^2, поэтому имеются три различные частоты $\overset{\mathrm{I}}{\omega}_{1,2,3}(\mathbf{k})$, каждая из которых является однородной функцией первого порядка от компонент волнового вектора. Пусть ξ,η — единичные взаимно перпендикулярные векторы, лежащие в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{W}$ (в качестве их удобно для дальнейшего выбрать главные оси тензора анизотропии α_{ik}). Полная система уравнений распадается на две группы уравнений для переменных $(m_\xi, w_\eta', x_\eta, y_\eta, u_\xi, v_\xi)$ и $(m_\eta, w_\xi', x_\xi, y_\xi, u_\eta, v_\eta)$, причем коэффициенты этих двух групп уравнений переходят друг в друга при замене $\omega\to-\omega$. Каждой из частот $\overset{\mathrm{I}}{\omega}_{1,2,3}(\mathbf{k})$ соответствуют два типа колебаний, по одному для каждой группы переменных.

Эти шесть типов колебаний в области малых значений волнового вектора $(ak^2\ll\alpha)$ ведут себя по разному в антиферромагнетиках типа легкая ось ($FeCO_3$) и типа легкая плоскость ($MnCO_3$).

В первом случае тензор анизотропии имеет вид $\alpha_{ik}=\alpha\delta_{ik}$, и четыре переменные (m_ξ, w_η') и (m_η, w_ξ') соответствуют колебаниям с конечной частотой $\omega_0{}^2=\gamma_0{}^2W^2\alpha F_m$. Оставшиеся четыре типа колебаний имеют значительно меньшие частоты. Для их определения поэтому можно положить $\mathbf{m}=\mathbf{w}'=0$ в последних четырех уравнениях (27). Соответствующее характеристическое уравнение является квадратным относительно ω^2, так что имеются две частоты $\overset{\mathrm{II}}{\omega}_{1,2}(\mathbf{k})$, являющиеся однородными функциями первого порядка от $\mathbf{k}$, причем каждой из них соответствуют два типа колебаний, по одному для каждой из групп переменных $(x_\eta, y_\eta, u_\xi, v_\xi)$ и $(x_\xi, y_\xi, u_\eta, v_\eta)$.

Во втором случае тензор анизотропии можно считать равным $\alpha_{ik}=\alpha\xi_i\xi_k$ (направление ξ совпадает с осью третьего порядка). При этом конечной частоте ω_0 соответствует один тип колебаний (колебания переменных m_η, w_ξ). Остальные пять типов имеют частоты, являющиеся линейными функциями $|\mathbf{k}|$. Ясно, что уравнения для переменных $(m_\xi, w_\eta, x_\eta, y_\eta, u_\xi, v_\xi)$ в данном случае такие же, как в области $ak^2 \gg \alpha$. Поэтому эта группа переменных порождает три типа колебаний с частотами $\omega_{1,2,3}^{\mathrm{I}}(\mathbf{k})$. Уравнения же для переменных $(x_\xi, y_\xi, u_\eta, v_\eta)$ совпадают с уравнениями в области $ak^2 \ll \alpha$ для случая легкой оси. Эти переменные порождают остальные два типа колебаний с частотами $\omega_{1,2}^{\mathrm{II}}(\mathbf{k})$.

Отметим, что модель подрешеток, будучи примененной к структуре A_{2g} (см. [5]), описывает лишь два из шести типов колебаний. Необходимо, впрочем, подчеркнуть, что эти две ветви в экспериментально исследованных веществах с группой $\boldsymbol{D}_{3d}$ ($FeCO_3$, $MnCO_3$) описываются моделью подрешеток с довольно большой точностью. Поскольку эта модель соответствует классическим локализованным спинам, а в локализованной картине переменные $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ в рассматриваемых веществах отсутствуют (см. [10]), входящие в общие уравнения (27) коэффициенты F_u и F_x, по-видимому, аномально велики, что приводит, как видно из (27), к увеличению частот аномальных ветвей, в частности к увеличению соответствующих им чисто релятивистских щелей. Нельзя исключить даже крайнюю возможность того, что аномальные ветви могут вообще исчезнуть, если большая величина F_u и F_x более существенна, чем малость релятивистских эффектов по сравнению с обменными.

2. В приведенном выше примере все ветви колебаний имеют характерную для антиферромагнетиков линейную зависимость частоты от волнового вектора. Рассмотрим теперь антиферромагнитную структуру в группе $\boldsymbol{D}_3$, где имеются необычные ветви низкочастотных колебаний. Пусть в равновесии отличен от нуля антиферромагнитный момент $\mathbf{W}$ (представление A_2), а $\mathbf{M}^0=\mathbf{U}=\mathbf{V}=0$, где $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ — моменты, преобразующиеся по представлению E. Отклонения моментов от равновесия обозначим соответствующими маленькими буквами. Составляя по общим правилам уравнения движения для $\mathbf{m}^0$ и $\mathbf{w}$, легко убедиться в том, что они «зацепляются» друг за друга обычным образом, так что возникают стандартные антиферромагнитные ветви колебаний. Кроме них в данном случае существуют, однако, другие ветви со значительно меньшими частотами. Поэтому для их определения мы можем положить $\mathbf{m}^0=\mathbf{w}=0$ и рассматривать колебания лишь величин $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. При этом в силу симметрии $\boldsymbol{D}_3$ отсутствуют члены с $\gamma^{\alpha\beta\gamma}$ и $\gamma_1^{\alpha\beta\gamma\delta}$ в выражении для $\Gamma^{\alpha\beta\gamma}$, так что получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}&=\gamma_2(\Delta^u[\mathbf{h}^u\mathbf{W}]-\Delta^v[\mathbf{h}^v\mathbf{W}]),\\ \dot{\mathbf{v}}&=-\gamma_2(\Delta^v[\mathbf{h}^u\mathbf{W}]+\Delta^u[\mathbf{h}^v\mathbf{W}]),\end{aligned} \tag{28}$$

где $\gamma_2=\gamma_2^{uuwu}=-\gamma_2^{uvwv}=-\gamma_2^{vuwv}=-\gamma_2^{vvwu}$. Общие линейные комбинации Δ^u, Δ^v в данной симметрии равны

$$\Delta^u \approx 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}-a\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial y},\qquad \Delta^v \approx \frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x},$$

где a — произвольная постоянная. Тензор $F^{\alpha\beta}$ имеет компоненты $F^{uu}=F^{vv}\equiv F/2$, поэтому эффективные поля $\mathbf{h}^u$ и $\mathbf{h}^v$ можно считать равными соответственно $-F\mathbf{u}$ и $-F\mathbf{v}$. С учетом этого из уравнений (28) получаем следующий спектр колебаний:

$$\omega^2=F^2W^2\gamma_2^2\{(k_x^2-k_y^2+ak_xk_z)^2+(2k_xk_y-ak_zk_y)^2\}. \tag{29}$$

Таким образом, в антиферромагнетиках могут существовать спиновые волны ферромагнитного типа с квадратичной зависимостью частоты от волнового вектора. Именно эти колебания, если они существуют, дают основной вклад в термодинамику кристалла. Теплоемкость кристалла, например, благодаря этим колебаниям должна быть пропорциональна $T^{3/2}$, а не T^3, как обычно. Щель, которая может появиться в энергетическом спектре (29) при учете релятивистских взаимодействий, должна быть чисто релятивистской, как в ферромагнетиках, но не полурелятивистской, как в обычных спектрах антиферромагнетиков. Отметим в связи с этим, что в антиферромагнитной структуре с группой $\boldsymbol{C}_{3v}$ (эта группа изоморфна $\boldsymbol{D}_3$) и одним моментом $\mathbf{W}$, соответствующим представлению A_2, наряду с обычными должны существовать аномальные ветви с линейной зависимостью частоты от волнового вектора, в которых, однако, щель может быть лишь чисто релятивистской. В условиях, когда частоты аномальных ветвей и обычных сильно отличаются, уравнения для $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в группе $\boldsymbol{C}_{3v}$ аналогичны уравнениям (28), но в первом из них появляется добавочное слагаемое $\gamma_1\nabla^0[\mathbf{h}^v\mathbf{W}]$, а во втором $-\gamma_1\nabla^0[\mathbf{h}^u\mathbf{W}]$, где $\gamma_1=\gamma_1^{uvwo}=-\gamma_1^{vuwo}$. В остальном все вычисления тождественны предыдущим. Учитывая, что в группе $\boldsymbol{C}_{3v}$

$$\nabla^0\approx\frac{\partial}{\partial z},\quad \Delta^u\approx 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+a\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x},\quad \Delta^v\approx\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial y}$$

получим для частот аномальных ветвей следующее выражение:

$$\omega^2=F^2W^2\{\gamma_1^2k_z^2+\gamma_2^2(k_x^2+k_y^2)^2\}. \tag{30}$$

При температурах, меньших ширины полурелятивистской щели обычных колебаний, аномальные ветви дают основной вклад в теплоемкость, причем здесь этот вклад пропорционален квадрату температуры.

3. Рассмотрим ферримагнитную структуру (A_g, B_g) в классе $\boldsymbol{C}_{2h}$. Эта группа имеет только одномерные представления A_g, B_g, A_u, B_u, которые мы занумеруем значениями индекса α, равными соответственно 0, 1, 2, 3. В равновесии отличны от нуля моменты $\mathbf{M}^0$ и $\mathbf{M}^1$. Уравнения (16) без учета членов с производными имеют в данном случае следующий вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{m}}^0&=\gamma^{000}[\mathbf{h}^0\mathbf{M}^0]+\gamma^{011}[\mathbf{h}^1\mathbf{M}^1]+\hat{\gamma}^{010}\mathbf{M}^0(\mathbf{h}^1\boldsymbol{\nu})-\hat{\gamma}^{100}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{M}^0\mathbf{h}^1)+\\
&\quad+\hat{\gamma}^{001}\mathbf{M}^1(\mathbf{h}^0\boldsymbol{\nu})-\hat{\gamma}^{001}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{M}^1\mathbf{h}^0),\\
\dot{\mathbf{m}}^1&=\gamma^{101}[\mathbf{h}^0\mathbf{M}^1]+\gamma^{110}[\mathbf{h}^1\mathbf{M}^0]+\hat{\gamma}^{100}\mathbf{M}^0(\mathbf{h}^0\boldsymbol{\nu})-\hat{\gamma}^{010}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{M}^0\mathbf{h}^0)+\\
&\quad+\hat{\gamma}^{111}\mathbf{M}^1(\mathbf{h}^1\boldsymbol{\nu})-\hat{\gamma}^{111}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{M}^1\mathbf{h}^1),\\
\dot{\mathbf{m}}^2&=\gamma^{231}[\mathbf{h}^3\mathbf{M}^1]+\gamma^{220}[\mathbf{h}^2\mathbf{M}^0]+\hat{\gamma}^{230}\mathbf{M}^0(\mathbf{h}^3\boldsymbol{\nu})-\hat{\gamma}^{320}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{M}^0\mathbf{h}^3)+\\
&\quad+\hat{\gamma}^{221}\mathbf{M}^1(\mathbf{h}^2\boldsymbol{\nu})-\hat{\gamma}^{221}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{M}^1\mathbf{h}^2),\\
\dot{\mathbf{m}}^3&=\gamma^{330}[\mathbf{h}^3\mathbf{M}^0]+\gamma^{321}[\mathbf{h}^2\mathbf{M}^1]+\hat{\gamma}^{320}\mathbf{M}^0(\mathbf{h}^2\boldsymbol{\nu})-\hat{\gamma}^{230}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{M}^0\mathbf{h}^2)+\\
&\quad+\hat{\gamma}^{331}\mathbf{M}^1(\mathbf{h}^3\boldsymbol{\nu})-\hat{\gamma}^{331}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{M}^1\mathbf{h}^3),
\end{aligned} \tag{31}$$

где величины $\hat{\gamma}^{\alpha\beta a}$ связаны с $\gamma^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho}$ так же, как $\hat{\Gamma}_{1,2}^{\alpha\beta a}$ с $\Gamma_{1,2}^{\alpha\beta\gamma\sigma\rho}$, т. е. $\hat{\gamma}^{\alpha\beta a}=\gamma^{\alpha\beta abc}\varepsilon^{bc}\Pi$. Тензор $F^{\alpha\beta}$ имеет две отличные от нуля компоненты $F^{22}=F_2/2$,

$F^{33}=F_3/2$, и локальная часть энергии равна

$$\delta E=\tfrac{1}{2}A(\mathbf{m}^0\mathbf{M}^0)^2+\tfrac{1}{2}B(\mathbf{m}^1\mathbf{M}^1)^2+C(\mathbf{m}^0\mathbf{M}^0)(\mathbf{m}^1\mathbf{M}^1)+ +\tfrac{1}{2}D(\mathbf{m}^0\mathbf{M}^1+\mathbf{m}^1\mathbf{M}^0)^2+\tfrac{1}{2}E(\mathbf{m}^2\mathbf{M}^0)^2+\tfrac{1}{2}G(\mathbf{m}^3\mathbf{M}^1)^2+ +H(\mathbf{m}^2\mathbf{M}^0)(\mathbf{m}^3\mathbf{M}^1)+\tfrac{1}{2}P(\mathbf{m}^3\mathbf{M}^0)^2+\tfrac{1}{2}Q(\mathbf{m}^2\mathbf{M}^1)^2+ +R(\mathbf{m}^3\mathbf{M}^0)(\mathbf{m}^2\mathbf{M}^1)+\tfrac{1}{2}F_2(\mathbf{m}^2)^2+\tfrac{1}{2}F_3(\mathbf{m}^3)^2,$$

где $A, B, \ldots, R$ — некоторые постоянные обменного происхождения. Вычисляя с помощью последней формулы эффективные поля нулевого приближения и подставляя их в уравнения (31), получим

$$(\dot{\mathbf{m}}^0\mathbf{v})=\lambda_1(\mathbf{m}^0\mathbf{M}^1+\mathbf{m}^1\mathbf{M}^0),\quad (\dot{\mathbf{m}}^1\mathbf{v})=(A\lambda_2+C\lambda_3)(\mathbf{m}^0\mathbf{M}^0)+ +(C\lambda_2+B\lambda_3)(\mathbf{m}^1\mathbf{M}^1),$$

$$(\dot{\mathbf{m}}^2\mathbf{v})=F_2\left(\gamma^{220}\frac{M_0}{M_1}-\hat{\gamma}^{221}\right)(\mathbf{m}^2\mathbf{M}^1)-F_3\left(\gamma^{231}\frac{M_1}{M_0}-\gamma^{320}\right)(\mathbf{m}^3\mathbf{M}^0),$$

$$(\dot{\mathbf{m}}^3\mathbf{v})=F_3\left(\gamma^{330}\frac{M_0}{M_1}-\hat{\gamma}^{331}\right)(\mathbf{m}^3\mathbf{M}^1)-F_2\left(\gamma^{321}\frac{M_1}{M_0}-\hat{\gamma}^{230}\right)(\mathbf{m}^2\mathbf{M}^0),$$

$$(\dot{\mathbf{m}}^2\mathbf{M}^0)=F_3M_0^2\left(\gamma^{231}\frac{M_1}{M_0}-\hat{\gamma}^{230}\right)(\mathbf{m}^3\mathbf{v}), \tag{32}$$

$$(\dot{\mathbf{m}}^3\mathbf{M}^0)=F_2M_0^2\left(\gamma^{321}\frac{M_1}{M_0}-\hat{\gamma}^{320}\right)(\mathbf{m}^2\mathbf{v}),$$

$$(\dot{\mathbf{m}}^2\mathbf{M}^1)=-F_2M_1^2\left(\gamma^{220}\frac{M_0}{M_1}+\hat{\gamma}^{221}\right)(\mathbf{m}^2\mathbf{v}),$$

$$(\mathbf{m}^3\mathbf{M}^1)=-F_3M_1^2\left(\gamma^{330}\frac{M_0}{M_1}+\hat{\gamma}^{331}\right)(\mathbf{m}^3\mathbf{v}),$$

где M_0, M_1 — модули равновесных моментов,

$$\lambda_1=(\gamma^{000}M_0M_1-\gamma^{011}M_0M_1+\hat{\gamma}^{100}M_0^2+\hat{\gamma}^{001}M_1^2)D,$$

$$\lambda_2=-\gamma^{011}M_0M_1+\hat{\gamma}^{010}M_0^2,\quad \lambda_3=\gamma^{110}M_0M_1+\hat{\gamma}^{111}M_1^2.$$

Производные по времени от всех остальных величин в нулевом приближении обращаются в нуль. Из уравнений (32) видно, что колебания переменных $(\mathbf{m}^2\mathbf{v})$ и $(\mathbf{m}^3\mathbf{v})$ вместе с некоторыми линейными комбинациями пар переменных $(\mathbf{m}^2\mathbf{M}^1)$, $(\mathbf{m}^3\mathbf{M}^0)$ и $(\mathbf{m}^3\mathbf{M}^1)$, $(\mathbf{m}^2\mathbf{M}^0)$ соответственно происходят с высокой обменной частотой. Эти переменные должны быть, следовательно, заморожены при расчете низкочастотных колебаний.

Из уравнений (31) без использования нулевого приближения для эффективных полей находим

$$(\lambda_2A+\lambda_3C)(\dot{\mathbf{m}}^0\mathbf{M}^0)+(C\lambda_2+B\lambda_3)(\dot{\mathbf{m}}^1\mathbf{M}^1)=2\hat{A}(\mathbf{h}^1\mathbf{v}),$$

$$\lambda_1(\dot{\mathbf{m}}^0\mathbf{M}^1+\dot{\mathbf{m}}^1\mathbf{M}^0)=2\hat{B}(\mathbf{h}^0\mathbf{v}), \tag{33}$$

где $\hat{A}=\tfrac{1}{2}(A\lambda_2^2+2C\lambda_2\lambda_3+B\lambda_3^2)$, $\hat{B}=\lambda_1^2/2D$. В правые части уравнений (33) необходимо подставить эффективные поля с учетом пространственных производных и релятивистских членов. Главные из них имеют следующий вид:

$$\mathbf{h}^0\mathbf{v}=-(\alpha_0-a_1\Delta^0)(\mathbf{m}^0\mathbf{v})+a_2\Delta^1(\mathbf{m}^1\mathbf{v}),$$

$$\mathbf{h}^1\mathbf{v}=a_2\Delta^1(\mathbf{m}^0\mathbf{v})-(\alpha_1-a_3\Delta^0)(\mathbf{m}^1\mathbf{v}), \tag{34}$$

где a_1, a_2, a_3 — постоянные, α_0, α_1 — некоторые релятивистские константы анизотропии. Первые два уравнения (32) вместе с (33), (34) представляют собой замкнутую систему уравнений, решение которой приводит к следующему спектру колебаний:

$$\omega^2=\hat{A}[\alpha_1+a_3(k^2)^0]+\hat{B}[\alpha_0+a_1(k^2)^0]\pm$$
$$\pm\{\{\hat{A}[\alpha_1+a_3(k^2)^0]-\hat{B}[\alpha_0+a_1(k^2)^0]\}^2+4\hat{A}\hat{B}a_2^2[(k^2)^1]^2\}^{1/2}, \qquad (35)$$

где $(k^2)^0$ и $(k^2)^1$ — общие линейные комбинации переменных k_z^2, k_x^2, k_y^2, k_xk_y и k_zk_x, k_zk_y, соответственно. Таким образом, в ферримагнетиках должны существовать спиновые волны антиферромагнитного типа (35) с полурелятивистскими щелями и линейной зависимостью частоты от волнового вектора.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Рассматриваемая система характеризуется двенадцатью степенями свободы $\mathbf{m}^0,\ldots,\mathbf{m}^3$. Четыре из них соответствуют, как мы видели, высокочастотным колебаниям и должны быть в макроскопической теории заморожены. Еще четыре степени свободы соответствуют колебаниям вида (35). Легко видеть, что временные производные от оставшихся четырех переменных обращаются в обменном приближении в нуль при учете пространственных производных как угодно высокого порядка. То же самое имеет место и в структурах с одним равновесным моментом для проекций $\mathbf{m}^\alpha$ на направление этого момента. В последнем случае этот факт является выражением кинематической невозможности изменения абсолютной величины спинов (известно, что продольная магнитная восприимчивость обменных магнетиков при нуле температуры обращается в нуль). Представляется весьма вероятным, что в структурах с несколькими равновесными моментами также имеет место аналогичная кинематическая невозможность изменения некоторых переменных и в рассмотренном случае этими переменными являются указанные выше четыре величины.

Отметим, наконец, что колебания антиферромагнитной структуры (A_uB_u) в классе $\boldsymbol{C}_{2h}$, а также ферримагнитной (A_1A_2) и антиферромагнитной (B_1B_2) структур в классе $\boldsymbol{C}_{2v}$ совершенно аналогичны рассмотренному выше случаю.

В заключение выражаем благодарность И. Е. Дзялошинскому, В. А. Копцику и И. Н. Коцеву за разъяснение ряда вопросов и ценные замечания и А. С. Боровику-Романову, И. М. Лифшицу, М. И. Каганову, Л. П. Питаевскому за полезное обсуждение работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$\boldsymbol{C}_1$. 1;1. A.

$\boldsymbol{C}_i$. 3;2. A_g, A_u.

$\boldsymbol{C}_s$. 3;2. A', A''.

$\boldsymbol{C}_2$. 3;2. A, B.

$\boldsymbol{C}_{2h}$. 14;6. A_g, B_g, A_u, B_u, (A_gB_g), (A_uB_u).

$\boldsymbol{C}_{2v}$. 10;5. A_1, A_2, B_1, (A_1A_2), (B_2B_1).

$\boldsymbol{D}_2$. 6;2. A, B_1.

$\boldsymbol{D}_{2h}$. 29;14. A_g, B_{1g}, A_u, B_{1u}, (A_gB_{1g}), (A_gA_u), $(B_{1g}B_{2g})$, $(B_{1g}B_{1u})$, (A_uB_{1u}), $(B_{1u}B_{2u})$, $(A_gB_{1g}B_{2g})$, $(B_{3g}B_{1g}B_{2g})$, $(A_uB_{1u}B_{2u})$, $(B_{3u}B_{1u}B_{2u})$.

$\boldsymbol{S}_4$. 6;3. A, B, E.

$\boldsymbol{D}_{2d}$. 19;9. A_1, A_2, B_1, B_2, E, (A_1A_2), (A_1B_1), (A_2B_2), (B_1B_2).

$\boldsymbol{C}_4$. 6;3. A, B, (AB).

C_{4h}. 24;14. A_g, B_g, E_g, A_u, B_u, E_u, (A_gB_g), (A_gE_g), (B_gE_g), (A_uB_u), (A_uE_u), (B_uE_u), (A_gB_u), (B_gA_u).

C_{4v}. 14;11. A_1, A_2, B_1, E, (A_1A_2), (A_1B_1), (A_2B_1), (B_1B_2), $(A_1A_2B_1)$, $(A_1B_1B_2)$, $(A_2B_1B_2)$.

D_4. 14;5. A_1, A_2, B_1, (A_1B_1), (A_2B_1).

D_{4h}. 72;49. A_{1g}, A_{2g}, B_{1g}, E_g, A_{1u}, A_{2u}, B_{1u}, E_u, $(A_{1g}A_{2g})$, $(A_{1g}B_{1g})$, $(A_{1g}E_g)$, $(A_{2g}B_{1g})$, $(A_{2g}E_g)$, $(B_{1g}B_{2g})$, $(B_{1g}E_g)$, $(A_{1u}A_{2u})$, $(A_{1u}B_{1u})$, $(A_{1u}E_u)$, $(A_{2u}B_{1u})$, $(A_{2u}E_u)$, $(B_{1u}B_{2u})$, $(B_{1u}E_u)$, $(A_{1g}A_{1u})$, $(A_{1g}B_{1u})$, $(A_{2g}A_{2u})$, $(A_{2g}B_{1u})$, $(B_{1g}A_{1u})$, $(B_{1g}A_{2u})$, $(B_{1g}B_{1u})$, $(A_{1g}A_{2g}B_{1g})$, $(A_{1g}B_{1g}B_{2g})$, $(A_{2g}B_{1g}B_{2g})$, $(A_{1u}A_{2u}B_{1u})$, $(A_{1u}B_{1u}B_{2u})$, $(A_{2u}B_{1u}B_{2u})$, $(A_{1g}A_{1u}B_{1g})$, $(A_{1g}B_{1u}A_{2g})$, $(A_{1g}B_{1u}B_{1g})$, $(A_{2g}A_{2u}B_{1g})$, $(A_{2g}B_{1u}B_{1g})$, $(B_{1g}A_{1u}B_{2g})$, $(B_{1g}A_{2u}B_{2g})$, $(A_{1g}A_{1u}B_{1u})$, $(A_{1g}B_{1u}B_{2u})$, $(A_{2g}A_{2u}B_{1u})$, $(A_{2g}B_{1u}B_{2u})$, $(B_{1g}A_{1u}A_{2u})$, $(B_{1g}A_{1u}B_{1u})$, $(B_{1g}A_{2u}B_{1u})$.

C_3. 3;1. A.

S_6. 9;6. A_g, E_g, A_u, E_u, (A_gE_g), (A_uE_u).

C_{3v}. 6;4. A_1, A_2, E, (A_1A_2).

D_3. 6;2. A_1, A_2.

D_{3d}. 24;14. A_{1g}, A_{2g}, E_g, A_{1u}, A_{2u}, E_u, $(A_{1g}A_{2g})$, $(A_{1g}E_g)$, $(A_{2g}E_g)$, $(A_{1u}A_{2u})$, $(A_{1u}E_u)$, $(A_{2u}E_u)$, $(A_{1g}A_{1u})$, $(A_{2g}A_{2u})$.

C_{3h}. 9;6. A', E', A'', E'', $(A'E'')$, $(A''E')$.

D_{3h}. 24;14. A_1', A_2', A_1'', A_2'', E', E'', $(A_1'A_2')$, $(A_1'A_1'')$, $(A_1'E'')$, $(A_2'A_2'')$, $(A_2'E'')$, $(A_1''A_2'')$, $(A_1''E')$, $(A_2''E')$.

C_6. 9;3. A, B, (AB).

C_{6h}. 34;24. A_g, B_g, E_{1g}, E_{2g}, A_u, B_u, E_{1u}, E_{2u}, (A_gB_g), (A_gE_{1g}), (A_gE_{2g}), (B_gE_{1g}), (B_gE_{2g}), (A_uB_u), (A_uE_{1u}), (A_uE_{2u}), (B_uE_{1u}), (B_uE_{2u}), (A_gB_u), (A_gE_{1u}), (B_gA_u), (B_gE_{2u}), $(E_{1g}A_u)$, $(E_{2g}B_u)$.

C_{6v}. 18;15. A_1, A_2, B_1, E_2, E_1, (A_1A_2), (A_1B_1), (A_1E_2), (A_2B_1), (A_2E_2), (B_2B_1), (B_1E_1), $(A_1A_2B_1)$, $(A_1B_2B_1)$, $(A_2B_2B_1)$.

D_6. 18;5. A_1, A_2, B_1, (A_1B_1), (A_2B_1).

D_{6h}. 86;63. A_{1g}, A_{2g}, B_{1g}, E_{2g}, E_{1g}, A_{1u}, A_{2u}, B_{1u}, E_{2u}, E_{1u}, $(A_{1g}A_{2g})$, $(A_{1g}B_{1g})$, $(A_{1g}E_{2g})$, $(A_{1g}E_{1g})$, $(A_{2g}B_{1g})$, $(A_{2g}E_{2g})$, $(A_{2g}E_{1g})$, $(B_{1g}B_{2g})$, $(B_{1g}E_{2g})$, $(B_{1g}E_{1g})$, $(A_{1u}A_{2u})$, $(A_{1u}B_{1u})$, $(A_{1u}E_{2u})$, $(A_{1u}E_{1u})$, $(A_{2u}B_{1u})$, $(A_{2u}E_{2u})$, $(A_{2u}E_{1u})$, $(B_{1u}B_{2u})$, $(B_{1u}E_{2u})$, $(B_{1u}E_{1u})$, $(A_{1g}A_{1u})$, $(A_{1g}B_{1u})$, $(A_{1g}E_{2u})$, $(A_{2g}A_{2u})$, $(A_{2g}B_{1u})$, $(A_{2g}E_{2u})$, $(B_{1g}A_{1u})$, $(B_{1g}A_{2u})$, $(B_{1g}B_{1u})$, $(B_{1g}E_{1u})$, $(E_{2g}A_{1u})$, $(E_{2g}A_{2u})$, $(E_{1g}B_{1u})$, $(A_{1g}A_{2g}B_{1g})$, $(A_{1g}B_{1g}B_{2g})$, $(A_{2g}B_{1g}B_{2g})$, $(A_{1u}A_{2u}B_{1u})$, $(A_{1u}B_{1u}B_{2u})$, $(A_{2u}B_{1u}B_{2u})$, $(A_{1g}A_{1u}B_{1u})$, $(A_{1g}B_{1u}B_{2u})$, $(A_{2g}A_{2u}B_{1u})$, $(A_{2g}B_{1u}B_{2u})$, $(B_{1g}A_{1u}A_{2u})$, $(B_{1g}A_{1u}B_{1u})$, $(B_{1g}A_{2u}B_{1u})$, $(A_{1u}A_{1g}B_{1g})$, $(A_{1u}B_{1g}B_{2g})$ $(A_{2u}A_{2g}B_{1g})$, $(A_{2u}B_{1g}B_{2g})$, $(B_{1u}A_{1g}A_{2g})$, $(B_{1u}A_{1g}B_{1g})$, $(B_{1u}A_{2g}B_{1g})$.

T. 4;3. A, E, (AE).

T_h. 11;11. A_g, E_g, F_g, A_u, E_u, F_u, (A_gE_g), (A_uE_u), (A_gA_u), (A_gE_u), (E_gA_u).

T_d. 8;8. A_1, A_2, E, F_2, F_1, (A_1A_2), (A_1E), (A_2E).

O. 8;6. A_1, A_2, E, (A_1A_2), (A_1E), (A_2E).

O_h. 28;28. A_{1g}, A_{2g}, E_g, F_{2g}, F_{1g}, A_{1u}, A_{2u}, E_u, F_{2u}, F_{1u}, (A_{1g}, A_{2g}), $(A_{1g}E_g)$, $(A_{2g}E_g)$, $(A_{1u}A_{2u})$, $(A_{1u}E_u)$, $(A_{2u}E_u)$, $(A_{1g}A_{1u})$, $(A_{1g}A_{2u})$, (A_{1g}, E_u), (A_{2g}, A_{1u}), $(A_{2g}A_{2u})$, $(A_{2g}E_u)$, (E_gA_{1u}), (E_gA_{2u}), $(A_{1g}A_{2g}A_{1u})$, $(A_{1g}A_{2g}A_{2u})$, $(A_{1g}A_{1u}A_{2u})$, $(A_{2g}A_{1u}A_{2u})$.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
17 ноября 1975 г.

Литература

[1] Ф. Блох. Молекулярная теория магнетизма, ОНТИ, 1936, гл. 1, § 5.
[2] T. Holstein, H. Primakoff. Phys. Rev., 58, 1098, 1940.
[3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Phys. Zs. Sowjet., 8, 153, 1935, Л. Д. Ландау. Собрание трудов, т. 1, «Наука», 1969, стр. 128.
[4] М. И. Каганов, В. М. Цукерник. ЖЭТФ, 34, 106, 1958.

[5] Е. А. Туров. Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов, Изд. АН СССР, 1963.
[6] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика, Физматгиз, 1963, §§ 94, 95.
[7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля, «Наука», 1973, § 41.
[8] Я. И. Френкель. Электродинамика, ОНТИ, 1935, том II, гл. 1, § 5.
[9] И. А. Дзялошинский. ЖЭТФ, 46, 1420, 1964.
[10] Ю. Гуфан, И. Е. Дзялошинский. ЖЭТФ, 52, 604, 1967.
[11] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика. «Наука», 1964, § 139.
[12] В. Е. Найш. Изв. АН СССР, сер. физич., 27, 1497, 1963.
[13] W. Brinkman, R. J. Elliott. Proc. Poy. Soc., A294, 343, 1966.
[14] В. А. Копцик, И. Н. Коцев. Препринт ОИЯИ, Р4-8466, Дубна, 1974.

MACROSCOPIC THEORY OF SPIN WAVES

A. F. Andreev, V. I. Marchenko

A description of magnetic structures by means of macroscopic multipole moments is presented. All types of macroscopically different exchange magnetic structures of ferromagnetic or collinearly ferrimagnetic substances (32 types), antiferromagnetic substances (230 types) and noncollinear ferrimagnetic substances (79 types) are found. The general form of the equations describing longwave, low-frequency spin waves is elucidated. The examples considered show that in many cases anomalous branches of spin oscillations should exist.