Письма в ЖЭТФ, том 90, вып. 2, с. 153 – 155

Нелинейные гриновские функции в смектиках

Е. А. Бренер[+], *В. И. Марченко*[+*△]

[+]*Institut für Festkörperforschung, Forschungszentrum Jülich, D-52425 Jülich, Germany*

[*]*Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН, 119334 Москва Россия*

[△]*Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия*

Поступила в редакцию 24 июня 2009 г.

Предложено решение задачи о деформации смектика при приложении к нему уединенной силы. По мере увеличения силы рост амплитуды деформации переходит от линейного к корневому закону.

PACS: 61.30.–v

Уравнение упругого равновесия смектиков

$$\lambda^2\Delta_\perp^2 u - \partial_z^2 u + \partial_z(\partial_\alpha u)^2 + (\partial_z u)(\Delta_\perp u) -$$

$$-\partial_\alpha[(\partial_\beta u)^2\partial_\alpha u]/2 = F(\mathbf{r})/A \qquad (1)$$

получается при варьировании энергии деформаций (44.13) [1]; здесь u – смещение слоев вдоль оси смектика z, A – модуль упругости, λ – микроскопический параметр длины, ∂_α – вектор градиента в плоскости слоев xy, $\Delta_\perp = \partial_\alpha^2$, $F(\mathbf{r})$ – плотность внешних сил.

В случае уединенного распределения сил с интегралом F в линейном приближении далеко от места приложения силы

$$u = h\ln\frac{d}{\rho} - h\int_{\rho^2/\lambda|z|}^{\infty} e^{-\xi/4}\frac{d\xi}{2\xi} \qquad (2)$$

(см. [2]), где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $h = \lambda F/F_c$, $F_c = 4\pi A\lambda^2$. Асимптотика (2) верна на расстояниях $|z| \ll L$ и $\rho \ll d \sim \sqrt{\lambda L}$, где L – расстояние от места приложения силы до границы смектика по оси z. Вне этой области становятся существенны граничные условия.

Однако, как было показано нами ранее [2, 3], в ряде задач малоуглового приближения (1) дальние асимптотики определяются нелинейными эффектами. Это явление в случае краевой дислокации [3] было наблюдено Ишикавой и Лаврентовичем [4]. Как мы увидим, решение (2) верно лишь в пределе $F \ll F_c$ (обычно $F_c \sim 10^{-5} \div 10^{-4}$ дин).

Покажем, что существует решение нелинейной задачи об уединенной силе в виде $u = h\ln(d/\rho) + f(v)$, где $v = \rho^2/z$ (считаем положительным направление оси z по направлению F, при этом $F, h > 0$). Уравнение (1) сводится тогда к виду

$$\left(16\lambda^2 v\psi'' - v\psi + 4h\psi - 6\psi^2 + \frac{(h-2\psi)^3}{v}\right)' = 0, \quad (3)$$

где $\psi = vf'$. Таким образом, имеем

$$16\lambda^2 v\psi'' - v\psi + 4h\psi - 6\psi^2 + \frac{(h-2\psi)^3}{v} = C, \qquad (4)$$

где C – постоянная. Нас интересует решение уравнения (4), не имеющее особенности при $v \to 0$. Нетрудно убедиться, что так будет только при выполнении двух условий $\psi \to h/2$ и $C = h^2/2$. Введя новые обозначения $\varphi = \psi/h$, $x = v/h$, получим

$$\frac{16\lambda^2}{h^2}x\varphi'' = (4\varphi - 2 + x)\left(\frac{(1-2\varphi)^2}{2x} + \varphi\right). \qquad (5)$$

Выражение во второй скобке в правой части этого уравнения определяет поле напряжения σ_{zz}, которое должно удовлетворять интегральному соотношению баланса сил $F_+ + F_- = F$, где

$$F_\pm = \pm\int \sigma_{zz}dS = \pm A\int\left(\frac{(\partial_\alpha u)^2}{2} - \partial_z u\right)dS. \qquad (6)$$

Интеграл F_+ берется при некотором фиксированном значении $z > 0$, а F_- при $z < 0$. В терминах φ имеем

$$F = \pi A h^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{(1-2\varphi)^2}{2x} + \varphi\right)dx. \qquad (7)$$

Поэтому при $|x| \gg 1$ решение должно стремиться к одному из нулей этой второй скобки. Поскольку далеко от точки приложения силы наклон смектических слоев должен исчезать, то $\varphi \to -1/2x$ при $|x| \gg 1$.

В пределе $h \gg \lambda$ член со второй производной в уравнении (5) существенен лишь в местах резкого изменения функции φ. В остальных областях решение мало отличается от одной из трех функций $\varphi_0 = (2-x)/4$, $\varphi_\pm = \{2 - x \pm \sqrt{x(x-4)}\}/4$, обращающих в нуль правую сторону уравнения (5).

Поведение поля смещения при противоположных знаках x существенно различно. При $x > 4 : \varphi \approx \varphi_+$, а в интервале $0 < x < 4 : \varphi \approx \varphi_0$. Вблизи точки $x = 4$ уравнение (5) можно упростить: $\eta'' = \eta(\eta^2 - t)$, где $\eta = 2^{-1/6}(h/\lambda)^{1/3}(\phi - \phi_0)$, $\quad t = 2^{-8/3}(h/\lambda)^{2/3}(x - 4)$. Детали поведения функции φ здесь, однако, не важны при вычислении F_+. Интеграл F_+ набирается в основном в области $x < 4$ и равен $F_+ = \pi A h^2$.

При $x < 0$ имеем $\varphi = \varphi_- + \chi$, где $\chi \ll \varphi_-$. Для вычисления F_- необходимо нахождение поправки χ. При $|x| \gg (\lambda/h)^2$ левую часть уравнения (5) можно рассматривать как возмущение. Тогда $\chi = (4\lambda/h)^2(-x)^{-1/2}(4 - x)^{-5/2}$. При этом интеграл F_- на малых x логарифмически расходится, $F_- = \pi A \lambda^2\{2\ln(2h/\lambda) - 1 + c\}$. Число c определяется решением на масштабах $|x| \sim (\lambda/h)^2$, где теория возмущений неприменима. Уравнение (5) здесь упрощается к виду $t^2\eta'' = \eta(\eta^2 - t)$, где $\eta = h(\varphi - \varphi_0)/\sqrt{2}\lambda$, $t = -h^2 x/8\lambda^2$. Численное решение дает $c \approx 1$.

Таким образом, в балансе сил $F \gg F_c$ эффектом растяжения при $z < 0$ можно пренебречь по сравнению с эффектом сжатия $\pi A h^2 \approx F$ при $z > 0$. В результате получаем закон $h = \sqrt{F/\pi A}$.

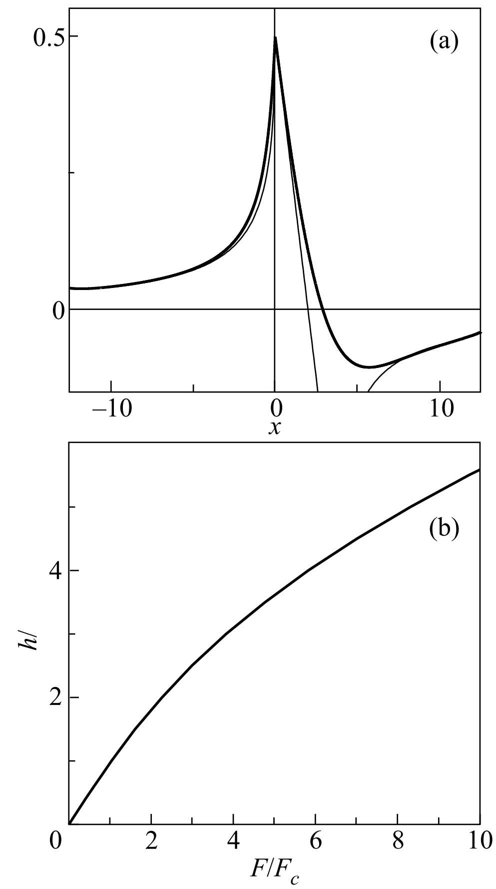
Поле смещения легко восстанавливается по функциям $\varphi_0, \varphi_\pm$. В обычных переменных при $z > 0$ и $\rho > 2\sqrt{hz}$, а также при $z < 0$ и $\rho \gg \lambda\sqrt{|z|/h}$

$$u = h \ln \frac{2d}{\sqrt{\rho^2 - 4hz} + \rho} + \frac{\rho}{4z}\left(\sqrt{\rho^2 - 4hz} - \rho\right) + \frac{h}{2}.$$

При $z > 0$ $\quad u = h\ln(d/\sqrt{hz}) - \rho^2/4z + h/2$ в интервале $0 < \rho < 2\sqrt{hz}$, а при $z < 0$ на расстояниях $\rho \sim \lambda\sqrt{|z|/h}$ происходит переход к $u = h\ln(d/\sqrt{h|z|}) + h/2$ при $\rho \ll \lambda\sqrt{|z|/h}$. Полученная асимптотика поля смещения верна при $|z| \ll L$ и $\rho \ll d \sim \sqrt{hL}$.

При $0 < F < 10F_c$ задача была решена численно (см. рисунок) методом стрельбы из точки $x = 0$, вблизи которой $\varphi = 1/2 + \gamma x$. Параметр γ (различный при разных знаках x) подбирался так, чтобы получалась правильная асимптотика $\varphi = -1/2x$ при больших $|x|$.

Заметим, что профиль смектического слоя при $z = 0$ есть $u = h\ln(d/\rho)$, причем здесь $\sigma_{zz} = 0$ вне точки приложения силы ($\rho = 0$). Поэтому результаты можно перенести на задачу о силе, действующей на базисную поверхность смектика. Действительно, деформация поверхности обычной жидкости под действием силы F_s есть $u = (F_s/2\pi\sigma)\ln(R/\rho)$, где σ – поверхностное натяжение (жидкость занимает полупространство $z < 0$). В смектике сила F разлагается на поверхностную и объемную. Поверхностная часть F_s уравновешивается поверхностным натяжением, так же, как и в обычной жидкости (отметим, что на базисной поверхности смектика, и только на ней, поверхностное натяжение равно поверхностной энергии). Из условия совпадения двух выражений для профиля поверхности находим $F_s = 2\pi\sigma h$ и $R = d$.



(a) Жирная кривая – функция $\varphi(x)$ при $h = 4\lambda$; тонкая кривая – аналитический предел при $h \gg \lambda$, заметим, что в линейном приближении (2) функция симметрична: $\varphi = 0.5\exp(-h|x|/4\lambda)$. (b) Зависимость $h(F)$

В линейном приближении объемная часть силы $F_v = 2\pi A\lambda h$ (теперь деформации возникают только в половине пространства). Таким образом, $2\pi\sigma h + 2\pi A\lambda h = F$ и амплитуда профиля поверхности просто меняет знак при смене знака силы. По мере роста силы поведение смектика становится асимметричным. При приложении большой силы, направленной внутрь смектика (сжатие: $F < 0$, $h < 0$), имеем $2\pi\sigma h - \pi A h^2 = F$. Если же сила направлена в противоположную сторону (растяжение: $F > 0$, $h > 0$), то $2\pi\sigma h + 2\pi A\lambda^2\ln(2h/\lambda) = F$.

Благодарим Е.И. Каца и Д.А. Пилипенко за полезное обсуждение. Работа выполнена при поддержке

German-Israeli Foundation и Российского фонда фундаментальных исследований, грант # 09-02-00483.

---

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, М.: Наука, 1987.
2. Е. А. Бренер, В. И. Марченко, Письма в ЖЭТФ **86**, 446 (2007).
3. E. A. Brener and V. I. Marchenko, Phys. Rev. E **59**, R4752 (1999).
4. T. Ishikawa, O. L. Lavrentovich, Phys. Rev. E **60**, R5037 (1999).