В.Н.Глазков
«Физика низкоразмерных систем»

слайды к лекции 2

ОДНОМЕРНАЯ И ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ИЗИНГА.

Модель Изинга

$$\hat{H} = \sum_{ij} J_{ij} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j$$

Два значения изинговской переменной на узле

$$\hat{\sigma} \left| \pm \right\rangle = \pm 1 \left| \pm \right\rangle$$

интерпретация: две ориентации «изинговского спина»

собственные функции цепочки изинговских спинов

$$\left| \ldots + + + + - + - + - - - + + \ldots \right\rangle$$

Цель:

$$\boxed{Z = Sp\left(e^{-\hat{H}/T}\right) = \sum e^{-\frac{E_n}{T}} \qquad F = -T \ln Z}$$

свободная энергия и теплоёмкость одномерной изинговской цепочки

$$Z_N = \sum_{|\ldots\rangle} \exp\left(-\frac{J}{T}\sum_{i=1}^{N-1}\sigma_i\sigma_{i+1}\right) = \sum_{|\ldots\rangle} \exp\left(-\frac{J}{T}\sum_{i=1}^{N-2}\sigma_i\sigma_{i+1}\right)\times\exp\left(-\frac{J}{T}\sigma_{N-1}\sigma_N\right)$$

$$Z_N = Z_{N-1}\, 2\, ch\left(\frac{J}{T}\right)$$

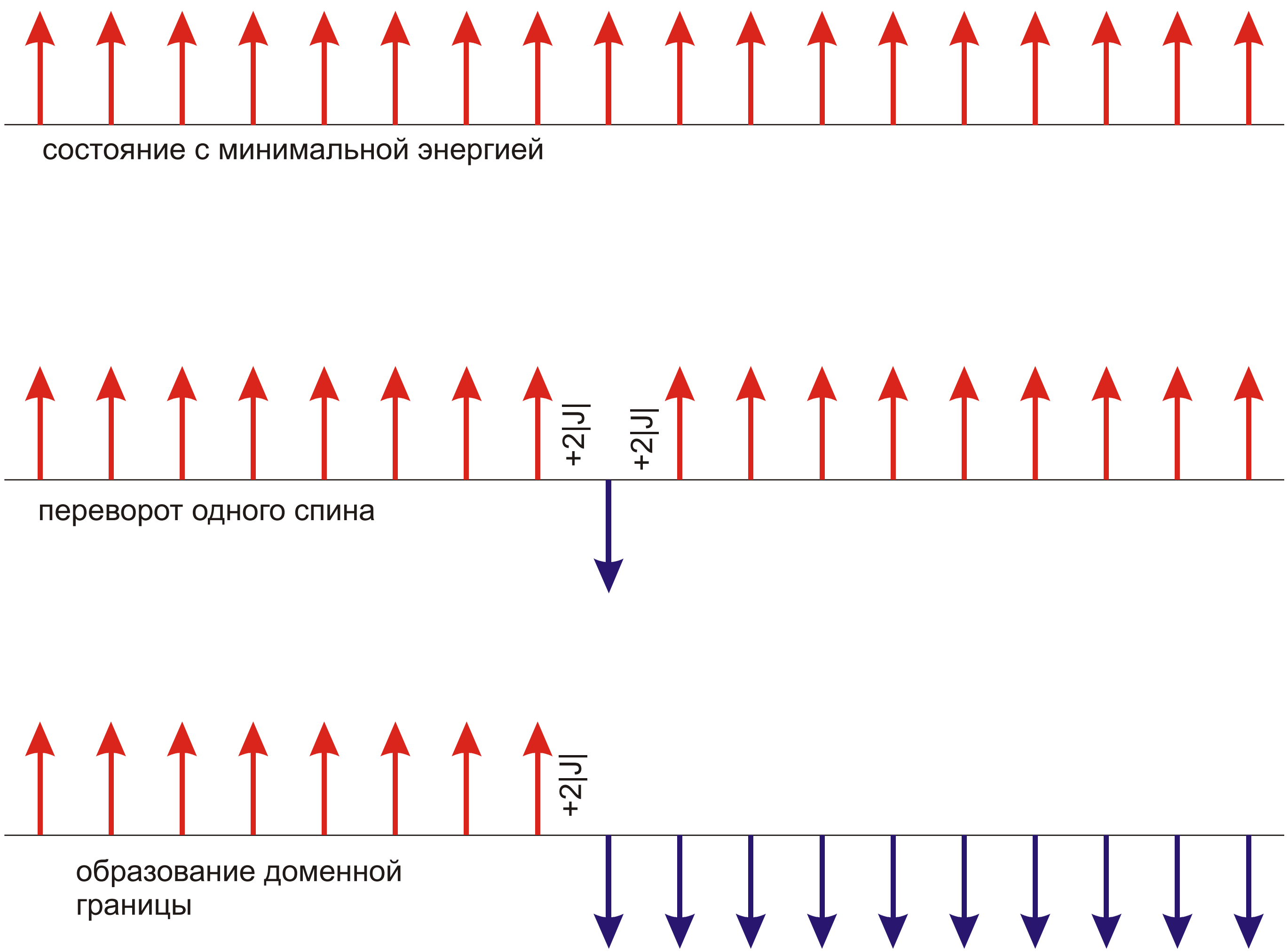
$$\boxed{Z_N = 2^N\left[ch\left(\frac{J}{T}\right)\right]^{N-1}}$$

$$\boxed{F = -T\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\ln\left(2^N\left[ch\left(J/T\right)\right]^{N-1}\right)\right] = -T\ln\left[2\,ch\left(J/T\right)\right]}$$

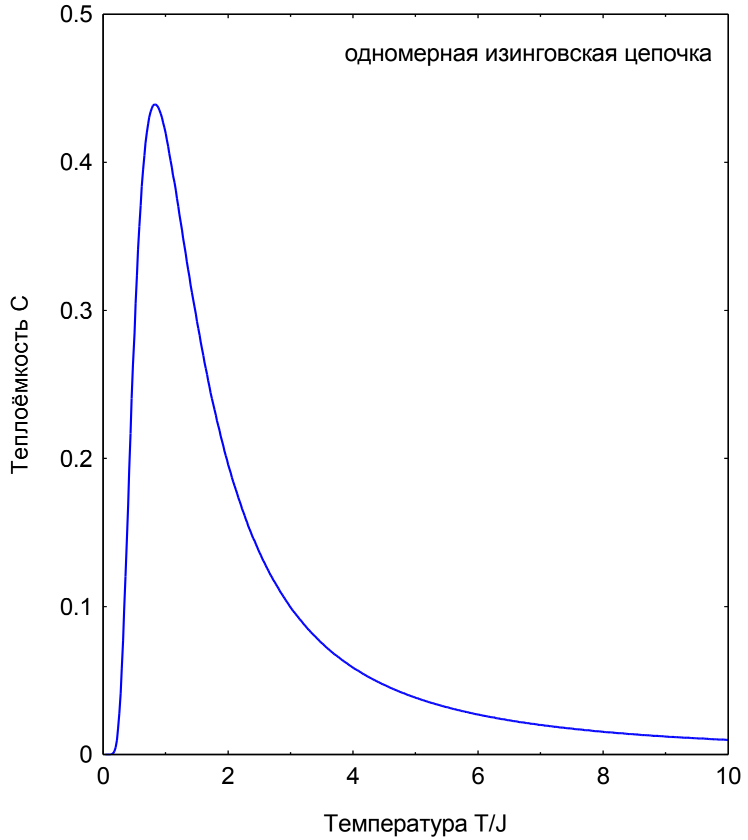
$$\boxed{c = -T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right) = \left(\frac{J}{T}\right)^2\frac{1}{ch^2\left(J/T\right)} = \begin{cases} \propto \dfrac{1}{T^{2,}} & T \gg |J| \\ \propto \left(\dfrac{J}{T}\right)^2 e^{-\frac{2|J|}{T}}, & T \ll |J| \end{cases}}$$

- возбуждение с минимальной энергией: $E_{min}=2|J|$
- отсутствие скачков/разрывов в теплоёмкости

элементарное возбуждение в изинговской цепочке



теплоёмкость и парная корреляционная функция в изинговской цепочке

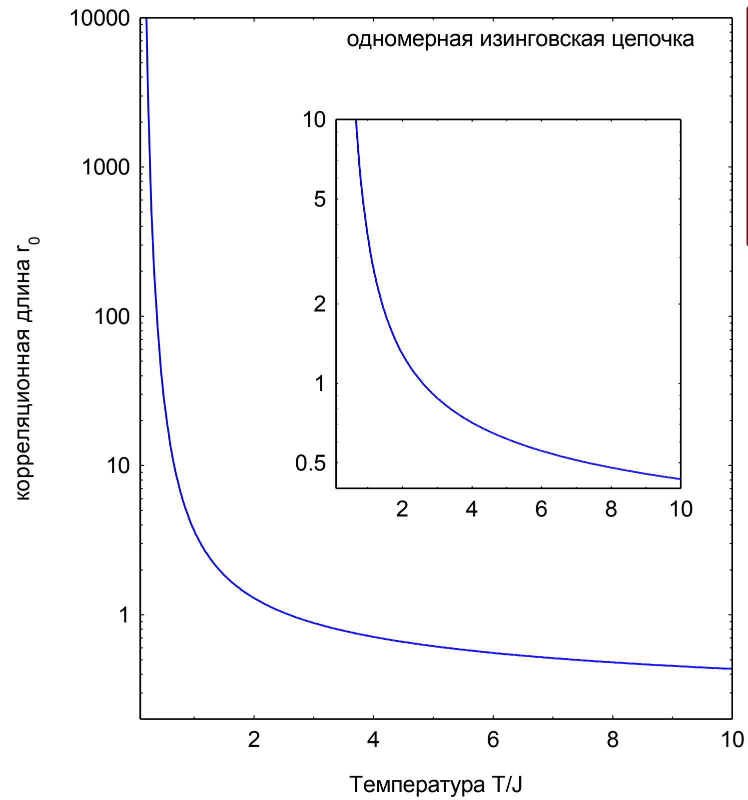


особенностей на кривой C(T) нет

корреляционная функция:

$$f(r) = \langle \sigma_i \sigma_{i+r} \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{|n\rangle} \sigma_i \sigma_{i+r} e^{-E_n/T}$$

$$\boxed{f(r) = \langle \sigma_i \sigma_{i+r} \rangle = \left[th\left(-\frac{J}{T} \right) \right]^r = (-sign(J))^r e^{-r/r_0}}$$



$$\boxed{r_0 = -\frac{1}{\ln\left| th\left(-\frac{J}{T} \right) \right|}}$$

Двумерная модель Изинга

от физической задачи к комбинаторике....

$$\hat{H} = J\sum_{k,l}\left(\hat{\sigma}_{k,l}\hat{\sigma}_{k,l+1} + \hat{\sigma}_{k,l}\hat{\sigma}_{k+1,l}\right)$$

$$Z = \sum_{|n\rangle} e^{-E_n/T} = \sum_{|n\rangle} \exp\left[-\frac{J}{T}\sum_{k,l}\left(\sigma_{k,l}\sigma_{k,l+1} + \sigma_{k,l}\sigma_{k,l+1}\right)\right]$$

$$\boxed{\exp\left[-\frac{J}{T}\sigma_{k,l}\sigma_{k',l'}\right] = ch\left[\frac{J}{T}\right] - \left(\sigma_{k,l}\sigma_{k',l'}\right)sh\left[\frac{J}{T}\right] = ch\left[\frac{J}{T}\right]\left(1 - \left(\sigma_{k,l}\sigma_{k',l'}\right)th\left[\frac{J}{T}\right]\right)}$$

$$\boxed{Z_N = \left(ch^2\left[\frac{J}{T}\right]\right)^{N^2} \sum_{|n\rangle}\prod_{k,l=1}^{N}\left(1 - \left(\sigma_{k,l}\sigma_{k,l+1}\right)th\left(\frac{J}{T}\right)\right)\left(1 - \left(\sigma_{k,l}\sigma_{k+1,l}\right)th\left(\frac{J}{T}\right)\right)}$$

Стоящее в этом выражении произведение после раскрытия всех скобок преобразуется в полином по σ.

Так как каждый узел решётки связан с четырьмя соседями, σ входит максимум в четвёртой степени.

Так как также производится суммирование по всевозможным состояниям, нечётные степени σ взаимноуничтожаются.

Таким образом, в полиноме остаются чётные степени σ, а с учётом того, что $\sigma^2=1$, σ исключается из полинома как переменная, и задача сводится к комбинаторной задаче о подсчёте числа вхождений соответствующего узла решётки.

Двумерная модель Изинга
комбинаторная часть

$$\prod_{k,l=1}^{N}\left(1-\left(\sigma_{k,l}\sigma_{k,l+1}\right)th\left(\frac{J}{T}\right)\right)\left(1-\left(\sigma_{k,l}\sigma_{k+1,l}\right)th\left(\frac{J}{T}\right)\right)$$

визуализация на решётке

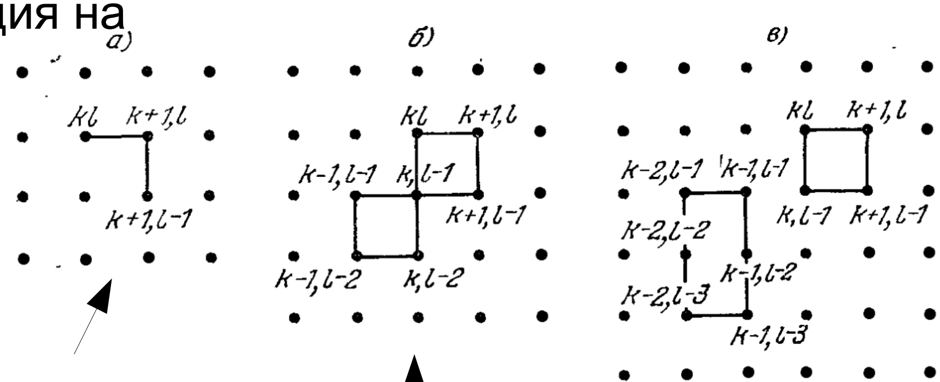


рисунок из «Стат.физики» курса Ландау и Лифшица

$$\left(th\left(J/T\right)\right)^2\sigma_{k,l}\sigma_{k+1,l}^2\sigma_{k+1,l-1}$$

$$\left(th\left(J/T\right)\right)^8\sigma_{k,l}^2\sigma_{k+1,l}^2\sigma_{k+1,l-1}^2\sigma_{k,l-1}^4\sigma_{k,l-2}^2\sigma_{k-1,l-2}^2\sigma_{k-1,l-1}^2$$

$$\left(th\left(J/T\right)\right)^{10}\sigma_{k,l}^2\sigma_{k+1,l}^2\sigma_{k+1,l-1}^2\sigma_{k,l-1}^2\sigma_{k-1,l-1}^2\sigma_{k-1,l-2}^2\sigma_{k-1,l-3}^2\sigma_{k-2,l-3}^2\sigma_{k-2,l-2}^2\sigma_{k-2,l-1}^2$$

$$\boxed{Z_N=\left(2\,ch\left[\frac{J}{T}\right]\right)^{N^2}\sum_{r=2\mathrm{k}}\left(th\left(J/T\right)\right)^r g_r}$$

чётные степени всех σ = замкнутость траектории

g_r — число возможных замкнутых (в т.ч. составных и с самопересечениями) циклов полной длины r

Двумерная модель Изинга
ответ

$$Z_N = \left(2\,ch^2\left[\frac{J}{T}\right]\right)^{N^2} \prod_{p,q=0}^{N} \sqrt{\left(1+th^2(J/T)\right)^2 + 2\,th(J/T)\left(1-th^2(J/T)\right)\left(\cos\frac{2\pi p}{N} + \cos\frac{2\pi q}{N}\right)}$$

$$F = -T\ln Z = -N^2 T \ln\left(2\,ch^2(J/T)\right) -$$
$$-\frac{1}{2} T \sum_{p,q=0}^{N} \ln\left[\left(1+th^2(J/T)\right)^2 + 2\,th(J/T)\left(1-th^2(J/T)\right)\left(\cos\frac{2\pi p}{N} + \cos\frac{2\pi q}{N}\right)\right]$$

$$F = -T\ln\left(2\,ch^2(J/T)\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^2} T \iint_0^{2\pi} \ln\left[\left(1+th^2(J/T)\right)^2 + 2\,th(J/T)\left(1-th^2(J/T)\right)\left(\cos\xi_1+\cos\xi_2\right)\right] d\xi_1\, d\xi_2 =$$
$$\boxed{= -T\ln 2 - \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^2} T \iint_0^{2\pi} \ln\left[ch^2\left(\frac{2J}{T}\right) + sh\left(\frac{2J}{T}\right)\left(\cos\xi_1+\cos\xi_2\right)\right] d\xi_1\, d\xi_2}$$

Двумерная модель Изинга
фазовый переход

$$ch^2\left(\frac{2J}{T}\right)-2\,sh\left(\frac{2|J|}{T}\right)=0$$

$$\left(ch^2\left(\frac{J}{T}\right)+sh^2\left(\frac{|J|}{T}\right)\right)^2-4\,ch\left(\frac{J}{T}\right)sh\left(\frac{|J|}{T}\right)=0$$

$$\left(1+th^2(J/T)\right)^2-4\,th(|J|/T)\left(1-th^2(J/T)\right)=0$$

$$\left(th^2(|J|/T)+2\,th(|J|/T)-1\right)^2=0$$

$$th(|J|/T)=\sqrt{2}-1$$

$$\boxed{\frac{T_c}{|J|}=\frac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\approx 2.269}$$

$$t=T-T_c$$

$$\iint_0 \ln\left[c_1 t^2+c_2\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)\right]d\,\xi_1\,d\,\xi_2\propto\int_0 \ln\left[c_1 t^2+c_2 r^2\right]r\,dr\propto\int_0 \ln\left[c_1 t^2+c_2 x\right]dx\propto -t^2\ln|t|$$

$$\boxed{F=a+\frac{1}{2}b\left(T-T_c\right)^2\ln\left|T-T_c\right|}$$

$$\boxed{C=-T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)\approx -b\,T_c\ln\left|T-T_c\right|}$$

Двумерная модель Изинга
элементарное возбуждение

$$F=-T\ln 2-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}T\iint_0^{2\pi}\ln\left[ch^2\left(\frac{2J}{T}\right)+sh\left(\frac{2J}{T}\right)(\cos\xi_1+\cos\xi_2)\right]d\xi_1 d\xi_2$$

$$\begin{aligned}
&\ln\left[ch^2\left(\frac{2J}{T}\right)+sh\left(\frac{2J}{T}\right)(\cos\xi_1+\cos\xi_2)\right]=\frac{4J}{T}-2\ln 2+\\
&+\ln\left[1+2e^{-\frac{4J}{T}}+e^{-\frac{8J}{T}}+2e^{-\frac{2J}{T}}\left(1-e^{-\frac{4J}{T}}\right)(\cos\xi_1+\cos\xi_2)\right]\approx\\
&\approx\frac{4J}{T}-2\ln 2+\left\{2e^{-\frac{4J}{T}}+e^{-\frac{8J}{T}}+2\left(e^{-\frac{2J}{T}}-e^{-\frac{6J}{T}}\right)(\cos\xi_1+\cos\xi_2)\right\}-\\
&-\frac{1}{2}\left\{4e^{-\frac{8J}{T}}+4\left(e^{-\frac{4J}{T}}-2e^{-\frac{8J}{T}}\right)(\cos\xi_1+\cos\xi_2)^2+8e^{-\frac{6J}{T}}(\cos\xi_1+\cos\xi_2)\right\}+\\
&+\frac{1}{3}\left\{8e^{-\frac{6J}{T}}(\cos\xi_1+\cos\xi_2)^3+24e^{-\frac{8J}{T}}(\cos\xi_1+\cos\xi_2)^2\right\}-\frac{1}{4}\left\{16e^{-\frac{8J}{T}}(\cos\xi_1+\cos\xi_2)^4\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&e^{-\frac{2J}{T}}:\langle 2(\cos\xi_1+\cos\xi_2)\rangle=0\\
&e^{-\frac{4J}{T}}:\langle 2-2(\cos\xi_1+\cos\xi_2)^2\rangle=\langle 2-2\rangle=0\\
&e^{-\frac{6J}{T}}:\langle -6(\cos\xi_1+\cos\xi_2)+\frac{8}{3}(\cos\xi_1+\cos\xi_2)^3\rangle=0\\
&e^{-\frac{8J}{T}}:\langle -2+12(\cos\xi_1+\cos\xi_2)^2-4(\cos\xi_1+\cos\xi_2)^4\rangle=\langle -2+12-4\cdot 2\cdot\frac{3}{8}-4\cdot 6\cdot\frac{1}{4}\rangle=1
\end{aligned}$$

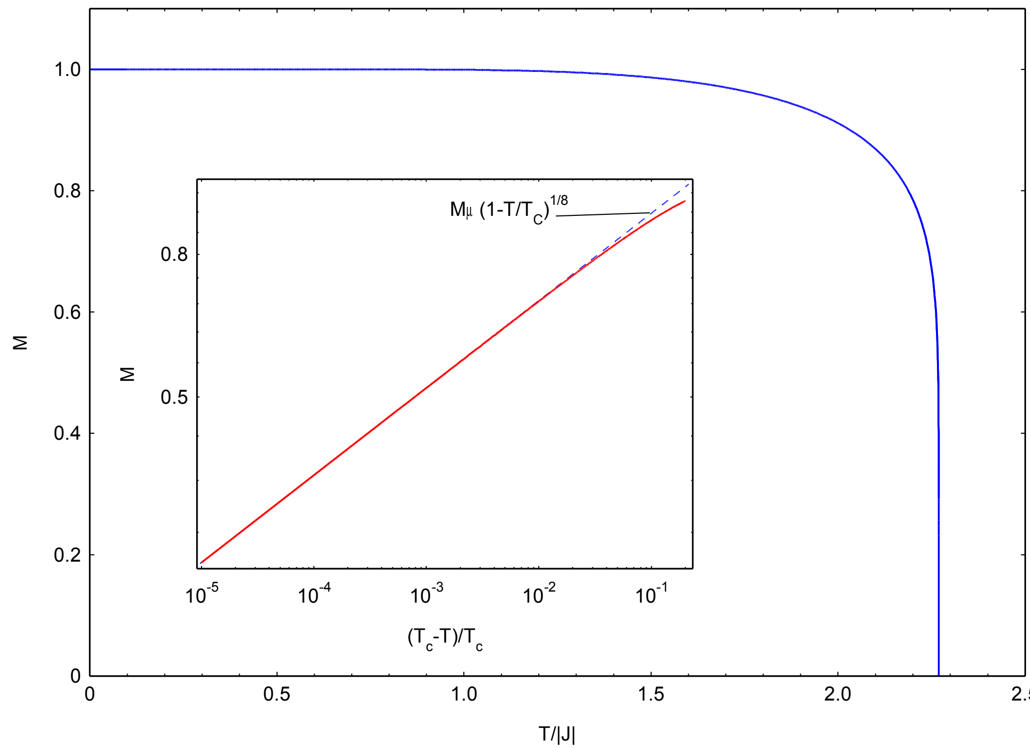
$$\boxed{F=-2J-\frac{T}{2}e^{-\frac{8J}{T}}}\qquad\boxed{C=32\left(\frac{J}{T}\right)^2 e^{-\frac{8J}{T}}}$$

Энергия возбуждения 8|J| соответствует перевороту спина (потеря 2|J| на четырёх связях)

Двумерная модель Изинга
параметр порядка

$$\boxed{M=\left[1-\frac{1}{sh^4\left(\frac{2J}{T}\right)}\right]^{1/8}}$$

вблизи T_c $\quad M \propto \left(T_c - T\right)^{1/8}$



Двумерная модель Изинга
переход к одномерному пределу

$$F=-T\ln 2-\frac{T}{2(2\pi)^2}\iint_0^{2\pi}\ln\left[ch\left(\frac{2J_1}{T}\right)ch\left(\frac{2J_2}{T}\right)+sh\left(\frac{2J_1}{T}\right)\cos\xi_1+sh\left(\frac{2J_2}{T}\right)\cos\xi_2\right]d\xi_1\, d\xi_2$$

условие на температуру перехода

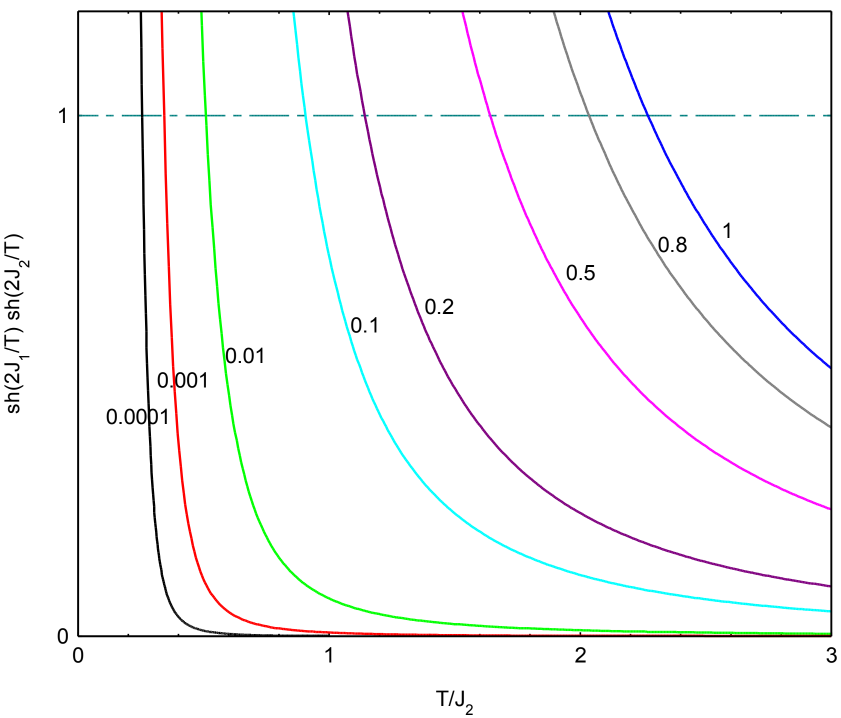
$$ch\left(\frac{2J_1}{T}\right)ch\left(\frac{2J_2}{T}\right)=sh\left(\frac{2|J_1|}{T}\right)+sh\left(\frac{2|J_2|}{T}\right)$$

$$sh\left(\frac{2|J_1|}{T}\right)sh\left(\frac{2|J_2|}{T}\right)=1$$

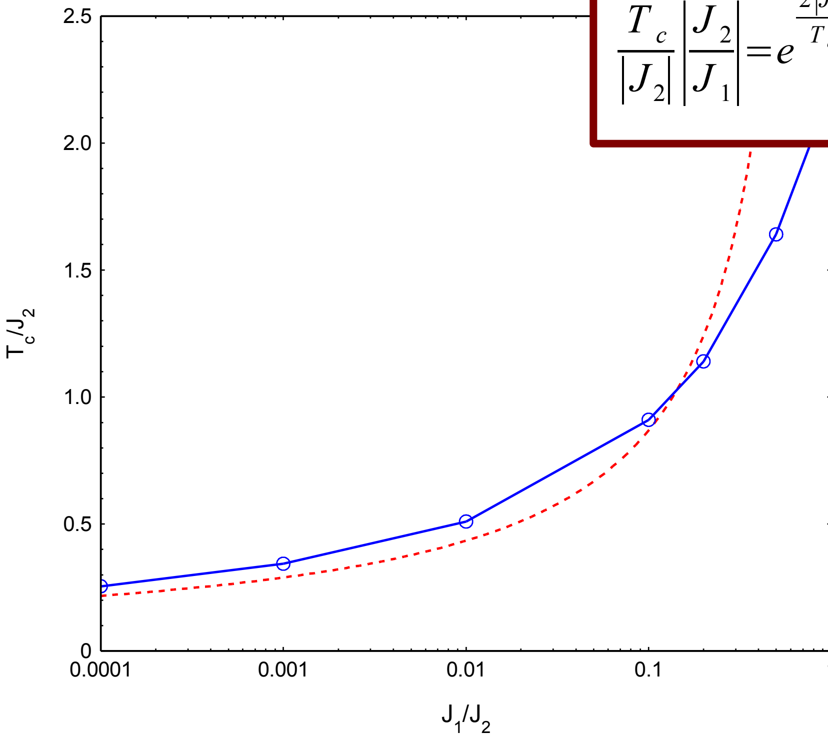
$$\frac{J_1}{J_2}\ll\frac{T_c}{J_2}\ll 1$$

$$\frac{2|J_1|}{T_c}\,\frac{e^{\frac{2|J_2|}{T_c}}}{2}=1$$

$$\frac{T_c}{|J_2|}\left|\frac{J_2}{J_1}\right|=e^{\frac{2|J_2|}{T_c}}$$



Графическое решение уравнения для определения критической температуры. Надписи у кривых соответствуют отношению параметров взаимодействия.



Зависимость температуры перехода от отношения констант взаимодействия. Красная пунктирная кривая — асимптотика при малом межцепочечном обмене.