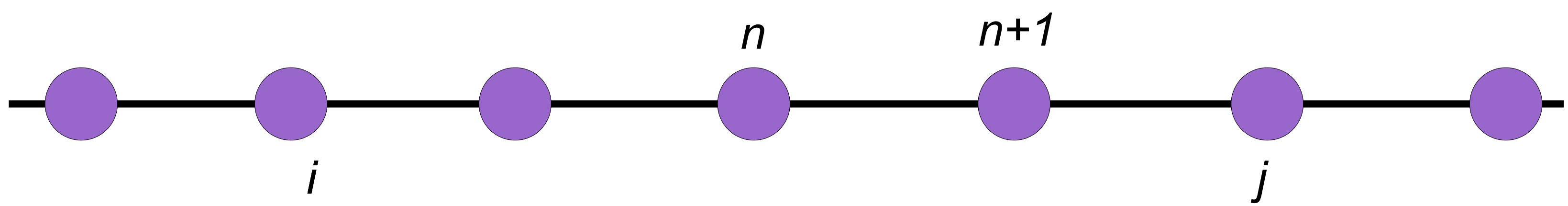
В.Н.Глазков

«Физика низкоразмерных систем»

слайды к лекции 8

Одномерные спиновые системы 1: Изинговская и XY-модели.

Гамильтониан одномерной цепочки



$$\hat{H}=\sum_{\langle i,j\rangle} J_{ij}\left(\hat{\vec{S}}_i\cdot\hat{\vec{S}}_j\right)=\sum_{\langle i,j\rangle} J_{ij}\left(\hat{S}_i^z\hat{S}_j^z+\frac{1}{2}\left(\hat{S}_i^+\hat{S}_j^-+\hat{S}_i^-\hat{S}_j^+\right)\right)$$ гейзенберговская модель

$$\hat{H}=J\sum_n\left(\hat{S}_n^z\hat{S}_{n+1}^z+\frac{1}{2}\left(\hat{S}_n^+\hat{S}_{n+1}^-+\hat{S}_n^-\hat{S}_{n+1}^+\right)\right)$$ взаимодействие ближайших соседей

$$\hat{H}=J\sum_n\left(\Delta\hat{S}_n^z\hat{S}_{n+1}^z+\frac{1}{2}\left(\hat{S}_n^+\hat{S}_{n+1}^-+\hat{S}_n^-\hat{S}_{n+1}^+\right)\right)$$ XXZ-модель

$\Delta=1$	гейзенберговский
$\Delta=0$	XY-модель
$\lvert\Delta\rvert\gg 1$	изинговский

НО: спиновый вектор остаётся трёхмерным

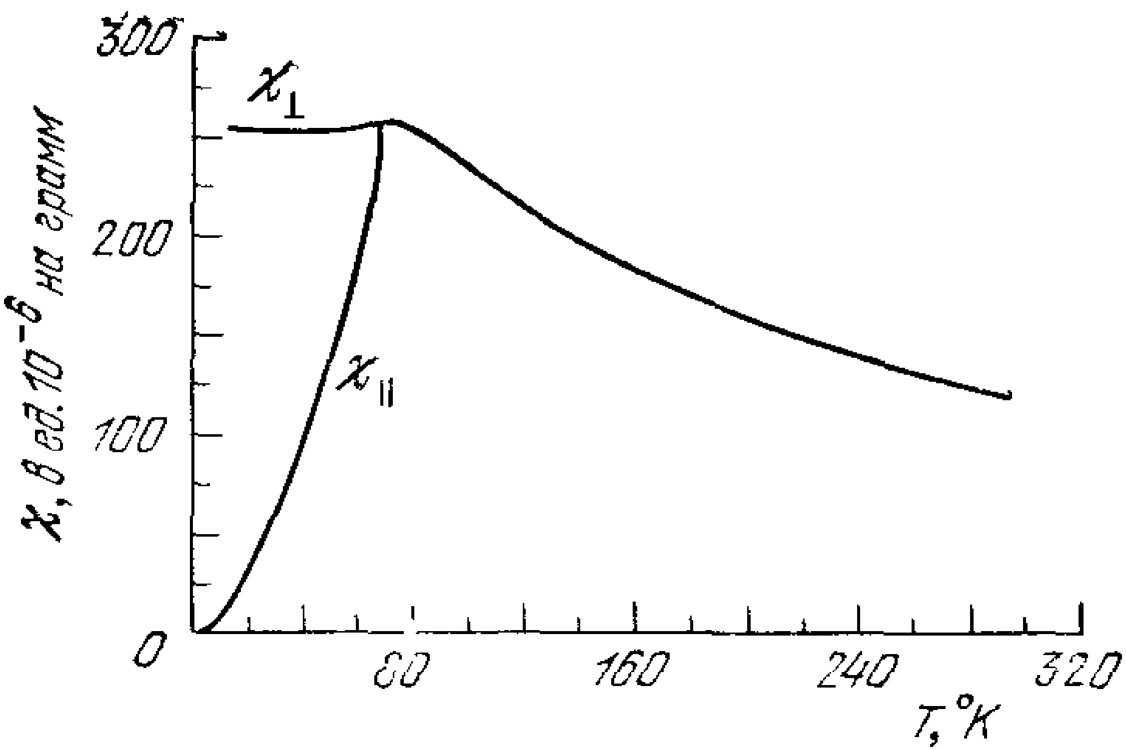
Классический антиферромагнетик: напоминание.

$$E=\sum_{\langle ij\rangle} J_{ij}\left(\vec{S}_i\cdot\vec{S}_j\right)-g\mu_B\left(\vec{H}\cdot\sum_i \vec{S}_i\right)$$

закон Кюри-Вейса,
переход в АФМ состояние
при T~Θ

$$\vec{m}=\chi_p\vec{H}_{eff}=\chi_p\left(\vec{H}-\sum_j\frac{J_{ij}}{g\mu_B}\langle\vec{S}_j\rangle\right)=\frac{g^2\mu_B^2S(S+1)}{3T}\left(\vec{H}-\vec{m}\sum_j\frac{J_{ij}}{(g\mu_B)^2}\right)$$

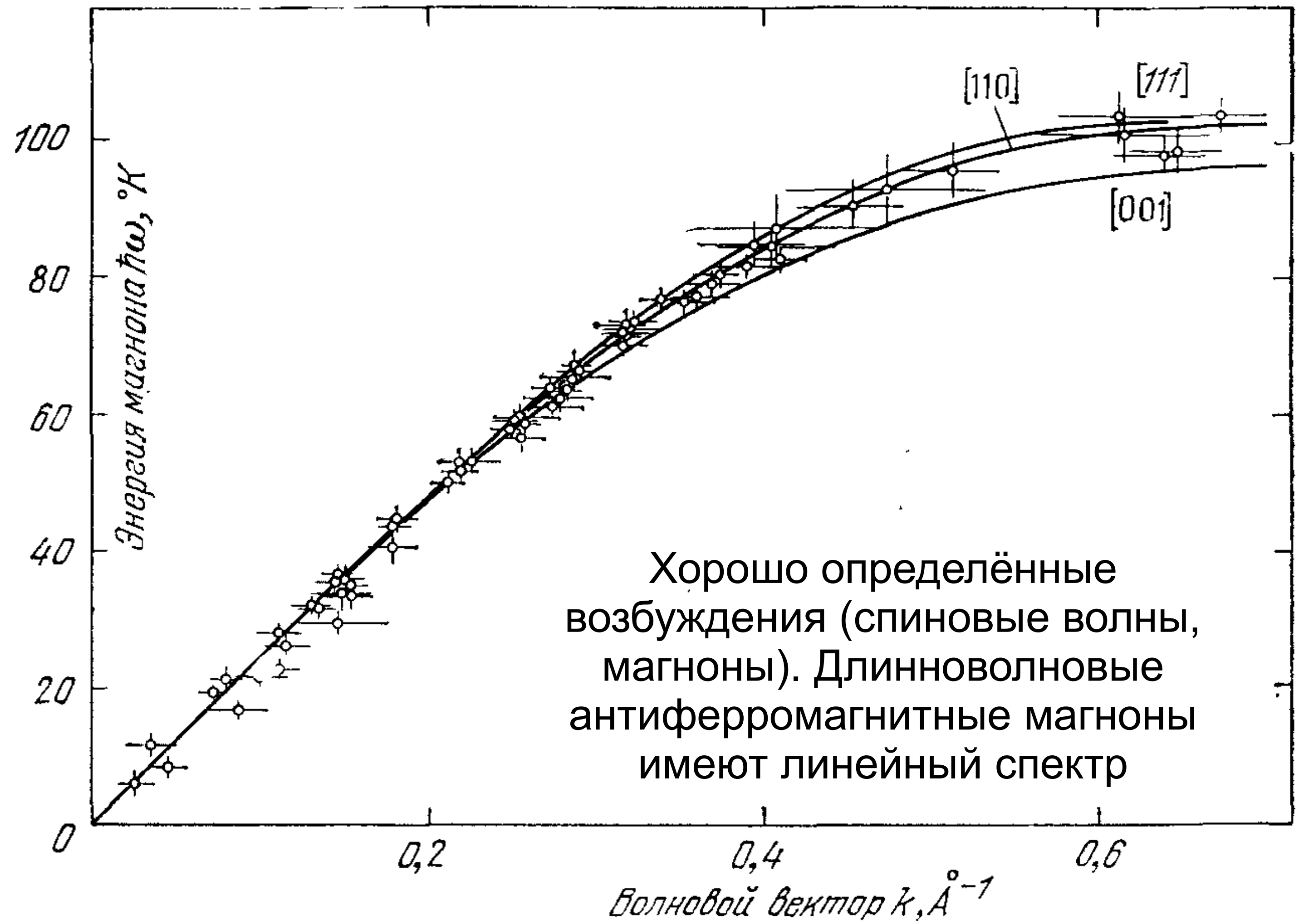
$$\chi_{AFM}=\frac{g^2\mu_B^2S(S+1)/3}{T+\frac{S(S+1)}{3}\sum_j J_{ij}}=\frac{C}{T+\Theta}$$



Магнитная восприимчивость антиферромагнетика MnF2 вдоль и перпендикулярно тетрагональной оси. Из книги Киттеля

Классический антиферромагнетик: спектр возбуждений

$$\boxed{\hbar\omega = 2JS|\sin ka|}$$



Хорошо определённые возбуждения (спиновые волны, магноны). Длинноволновые антиферромагнитные магноны имеют линейный спектр

Закон дисперсии для магнонов в простом кубическом антиферромагнетике RbMnF3, установленный по данным неупругого рассеяния нейтронов при температуре 4.2К. Из книги Киттеля

XXZ-модель: предел изинговского антиферромагнетика.

$$\hat{H}=J\sum_{n}\left(\Delta\,\hat{S}^{z}_{n}\hat{S}^{z}_{n+1}+\frac{1}{2}\left(\hat{S}^{+}_{n}\,\hat{S}^{-}_{n+1}+\hat{S}^{-}_{n}\,\hat{S}^{+}_{n+1}\right)\right)$$

$$\boxed{\Delta>1}$$

теория возмущений при Δ>>1

$$\psi_0=\left|\ldots+-+-+-\ldots\right\rangle$$

$$\psi_1=\left|\ldots+-+--+-+\ldots\right\rangle=\left|n+1/2\right\rangle$$

n *n+1*

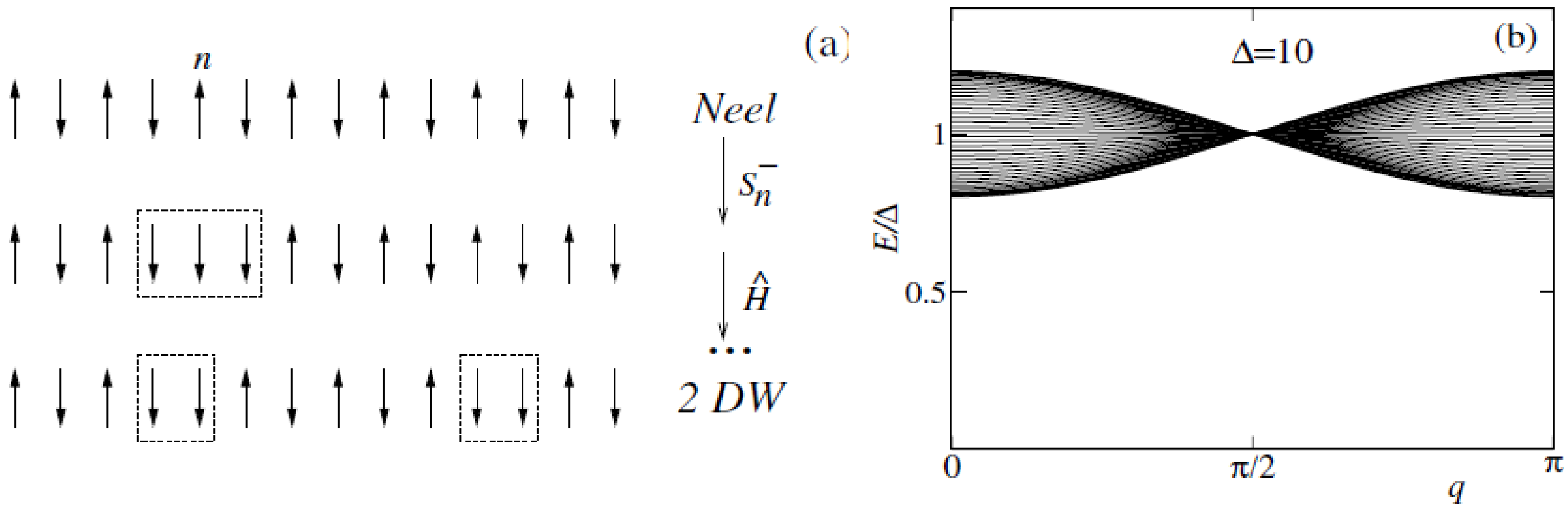
$$\hat{H}\left|n+1/2\right\rangle=J\,\Delta\sum_{p}\hat{S}^{z}_{p}\hat{S}^{z}_{p+1}\left|n+1/2\right\rangle+\frac{J}{2}\sum_{p}\left(\hat{S}^{+}_{p}\,\hat{S}^{-}_{p+1}+\hat{S}^{-}_{p}\,\hat{S}^{+}_{p+1}\right)\left|n+1/2\right\rangle$$

изменяет волновую функцию

$$\psi_k=A\sum_{p=1}^{N}e^{i(p+1/2)k}\left|p+1/2\right\rangle$$

$$\boxed{\epsilon(k)=\frac{J\,\Delta}{2}+J\cos 2\mathrm{k}}$$

Изинговский предел XXZ модели: спектр возбуждений



Слева: возникновение "магнонного" состояния при перевороте одного спина и его преобразование в две доменные стенки под действием XY-части гамильтониана. Справа: спектр возбуждений с двухчастичным континуумом в XXZ модели с параметром Δ=10.

H.J.Mikeska and A.K.Kolezhuk, One-Dimensional Magnetism, Lect. Notes Phys. , 645, 1-83 (2004)

$$\boxed{E(K)=\epsilon\left(\frac{K}{2}+\Phi\right)+\epsilon\left(\frac{K}{2}-\Phi\right)=J\Delta+2J\cos K\cos 2\Phi}$$

$$\frac{dN_{сост}}{dE}=\frac{dN_{сост}}{d\Phi}\left|\frac{d\Phi}{dE}\right|=\frac{N}{\pi}\frac{1}{4J|\cos K||\sin 2\Phi|}$$

XY-модель.

$$\boxed{\hat{H}_{XY}=\frac{J}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{S}_i^{+}\hat{S}_{i+1}^{-}+\hat{S}_i^{-}\hat{S}_{i+1}^{+}\right),}\quad N+1\equiv 1$$

$$\psi_0=|\ldots------------\ldots\rangle$$ собственная функция (но заведомо не основное состояние), «вакуум»

$$S_z=-N/2+1$$

$$\boxed{\psi_k=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_n e^{i\,kna}\hat{S}_n^{+}\psi_0}$$

$$\hat{S}^z\psi_k=\left(\sum_m \hat{S}_m^z\right)\psi_k=\sum_{m,n}\frac{1}{\sqrt{N}}e^{ikna}\hat{S}_m^z\hat{S}_n^{+}\psi_0=\sum_{m,n}\frac{1}{\sqrt{N}}e^{ikna}\left(-\frac{1}{2}+\delta_{mn}\right)\hat{S}_n^{+}\psi_0=\left(-\frac{N}{2}+1\right)\psi_k$$

$$\sum_m \hat{S}_m^{+}\hat{S}_{m+1}^{-}\psi_k=\sum_{m,n}\frac{1}{\sqrt{N}}e^{i\,kna}\hat{S}_m^{+}\hat{S}_{m+1}^{-}\hat{S}_n^{+}\psi_0=\sum_{m,n}\frac{1}{\sqrt{N}}e^{i\,kna}\delta_{n,m+1}\hat{S}_m^{+}\psi_0=e^{ika}\psi_k$$

Энергия состояния с одной «частицей» над «вакуумом» $$E_k=J\cos(ka)$$

XY-модель. Построение двухчастичного состояния.

????

$$\psi'_{k,k'} = A \sum_{n,n'} e^{ikna} e^{ik'n'a} \hat{S}^+_n \hat{S}^+_{n'} \psi_0$$

Такой набор волновых функций избыточен и не ортогонален.

$$\psi_{k,k'} = \frac{1}{2} \sum_{n \neq n'} f_{nn'} \hat{S}^+_n \hat{S}^+_{n'} \psi_0 = \sum_{n>n'} f_{nn'} \hat{S}^+_n \hat{S}^+_{n'} \psi_0 = \sum_{n<n'} f_{nn'} \hat{S}^+_n \hat{S}^+_{n'} \psi_0$$

лучше

$$\psi_{k,k'} = \begin{cases} A \sum\limits_{n,n'>n} \left[e^{i(kna+k'n'a)} - e^{i(kn'a+k'na)} \right] \hat{S}^+_n \hat{S}^+_{n'} \psi_0 = A \sum\limits_{n,n'>n} \begin{vmatrix} e^{ikna} & e^{ik'na} \\ e^{ikn'a} & e^{ik'n'a} \end{vmatrix} \hat{S}^+_n \hat{S}^+_{n'} \psi_0 \\ -A \sum\limits_{n,n'<n} \left[e^{i(kna+k'n'a)} - e^{i(kn'a+k'na)} \right] \hat{S}^+_n \hat{S}^+_{n'} \psi_0 \end{cases}$$

$$\boxed{\psi_{k,k'} = A \sum_{\langle n,n' \rangle} e_{n,n'} \begin{vmatrix} e^{ikna} & e^{ik'na} \\ e^{ikn'a} & e^{ik'n'a} \end{vmatrix} \hat{S}^+_n \hat{S}^+_{n'} \psi_0}$$

$e_{n,n'}$=+1, если n'>n

$e_{n,n'}$=–1, если n'<n

XY-модель. Свойства двухчастичной волновой функции.

$$(n, n') = (0,1) \Longleftrightarrow (N, 1)$$ одна и та же пара спинов

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{ika} & e^{ik'a} \end{vmatrix} \qquad -\begin{vmatrix} e^{ikNa} & e^{ik'Na} \\ e^{ika} & e^{ik'a} \end{vmatrix}$$ должны быть равны

$$\boxed{k, k' = \frac{\pi}{Na}(2p+1)}$$

$$\boxed{E(k_{1,} k_2) = J\left(\cos(k_1 a) + \cos(k_2 a)\right)}$$

k и k' должны различаться

XY-модель. Обобщение на случай многих частиц.

$$\psi_{k_1, k_2 \dots} = C \sum_{n_1, n_2 \dots} F^{n_1, n_2 \dots}_{k_1, k_2 \dots} \hat{S}^+_{n_1} \hat{S}^+_{n_2} \dots \psi_0$$

$$F^{n_1, n_2 \dots}_{k_1, k_2 \dots} = e_{n_1, n_2 \dots} \begin{vmatrix} e^{ik_1 n_1 a} & e^{ik_2 n_1 a} & \dots \\ e^{ik_1 n_2 a} & e^{ik_2 n_2 a} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$\boxed{E = J \sum_{i=1}^{n} \cos(k_i a)}$$

все k_i различные

условия квантования для n-частичного состояния:

чётное n $\quad k_i = \dfrac{\pi(2p_i + 1)}{Na}$

нечётное n $\quad k_i = \dfrac{\pi\, 2p_i}{Na}$

$$\boxed{E = J \sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{N}\left(\frac{2p_i}{2\,p_i + 1}\right)\right)}$$

Энергия основного состояния XY-модели.

$$E = J\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{N}\begin{pmatrix}2\mathrm{p}_i\\ 2\,p_i+1\end{pmatrix}\right)$$

$S_z = 0 \Leftrightarrow$ N/2 частиц

НУЖНО: подобрать набор различных чисел p_i в количестве *N/2* штук, обеспечивающий минимум энергии

$$\frac{\pi}{2}\le ka\le\frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{N}{4}\le\begin{pmatrix}p\\ p+1/2\end{pmatrix}\le\frac{3\mathrm{N}}{4}$$

$$E = J\sum_{p=N/4}^{3\mathrm{N}/4}\cos\left(\frac{2\pi}{N}\,p\right) = \frac{JN}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos x\,dx = -\frac{JN}{\pi}\approx -0.318\,NJ$$

Вторичное квантование XY-модели: бозевские или фермиевские квазичастицы?

$$b_i^+ \Leftrightarrow \hat{S}_i^+ , \quad b_i \Leftrightarrow \hat{S}_i^-$$

$$\hat{S}_i^z = b_i^+ b_i - \frac{1}{2}$$

+ условие сильного отталкивания
(hard core bosons)

$$\hat{S}_n^+ = c_n^+ \exp\left(i\pi \sum_{p=1}^{n-1} c_p^+ c_p \right)$$

$$\hat{S}_n^z = c_n^+ c_n - \frac{1}{2}$$

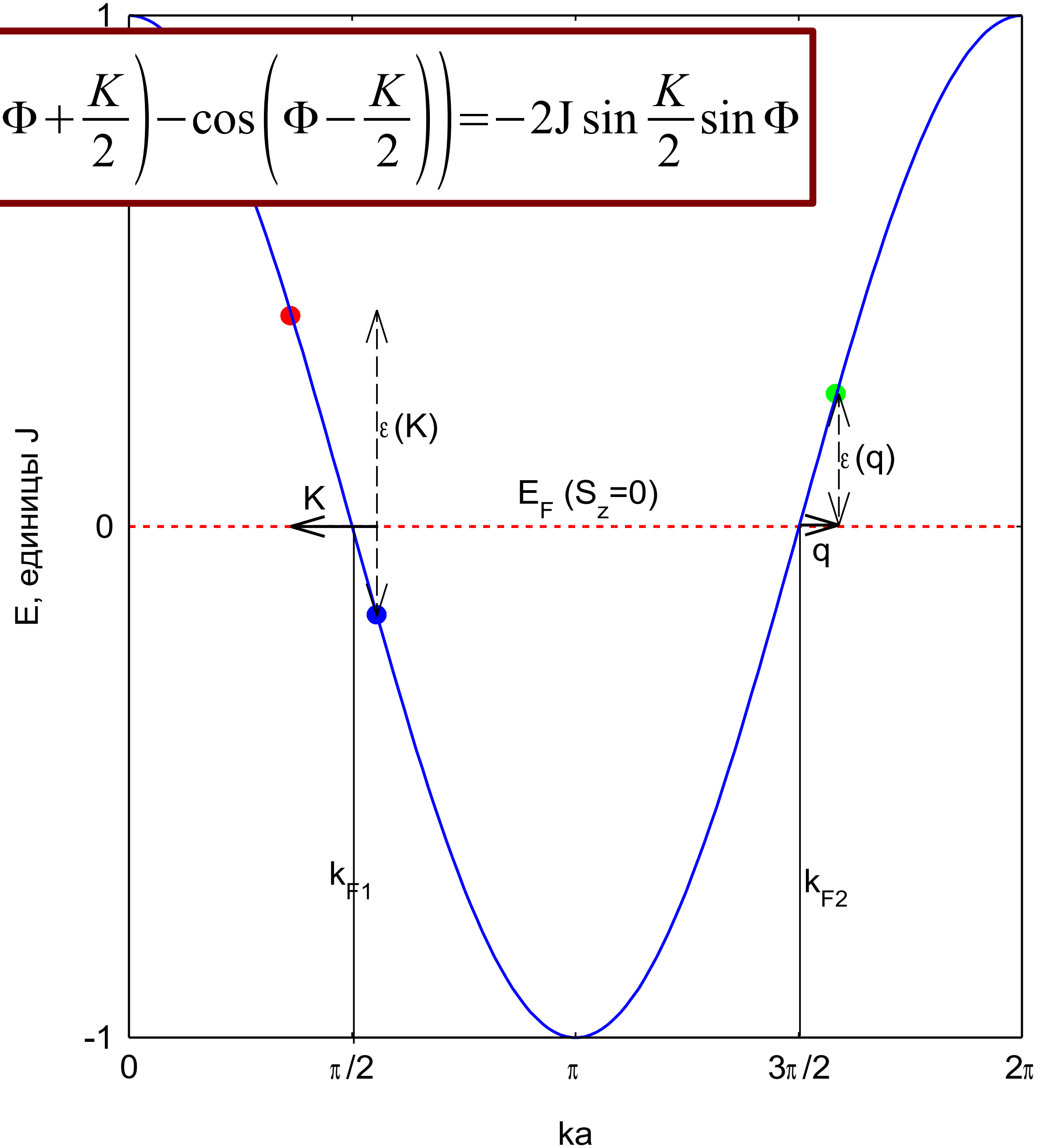
нелокальное преобразование
Йордана-Вигнера

$$\boxed{\hat{H}_{XXZ} = J \sum_n \left[\frac{1}{2}\left(c_n^+ c_{n+1} + c_n c_{n+1}^+ \right) + \Delta \left(c_n c_n^+ - \frac{1}{2} \right)\left(c_{n+1} c_{n+1}^+ - \frac{1}{2} \right) \right] - g\mu_B H \sum_n \left(c_n^+ c_n - \frac{1}{2} \right)}$$

свободные частицы — взаимодействие — химпотенциал

Фермионное представление основного состояния и возбуждений XY-модели

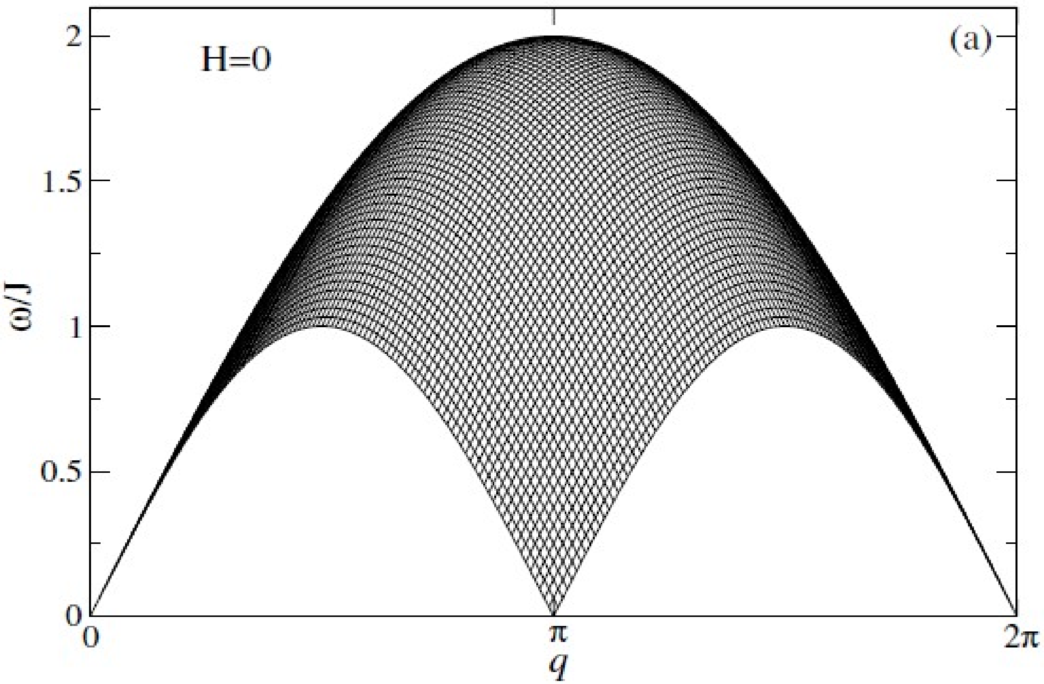
$$\epsilon(K)_{\Delta S_z=0} = J\left(\cos\left(\Phi+\frac{K}{2}\right)-\cos\left(\Phi-\frac{K}{2}\right)\right) = -2\mathrm{J}\sin\frac{K}{2}\sin\Phi$$



$$\epsilon_{\Delta S_z=1} = J\left|\sin q\right|$$

Спектр фермионов в антиферромагнитной XY-модели (синяя кривая). Красная пунктирная линия показывает энергию Ферми в случае S_z=0. Вблизи правой точки поверхности Ферми показано возбуждение в виде добавленной частицы, вблизи левой точки поверхности Ферми - в виде пары частица-дырка.

Двухчастичный континуум в XY-модели



Спектр возбуждений XY-гамильтониана в подпространстве S_z=0

H.J.Mikeska and A.K.Kolezhuk, One-Dimensional Magnetism, Lect. Notes Phys. , 645, 1-83 (2004)

$$E_{min} = J\left|\sin K\right| \longleftarrow$$ совпадает с классическим антиферромагнетиком

$$E_{max} = 2\mathrm{J}\left|\sin\frac{K}{2}\right|$$