



NATIONAL RESEARCH
UNIVERSITY

Майнор “Мир глазами физиков”

Весна 2019

Введение в квантовую физику

Лекция 9:

Квантовые осцилляции.

Неразличимость частиц.

Орбитальный момент и спин.

Часть 1. Два слова о ямах...

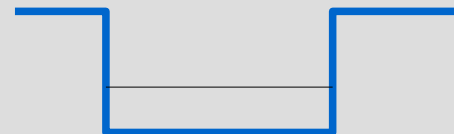
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi + U(x) \Psi = E \Psi$$



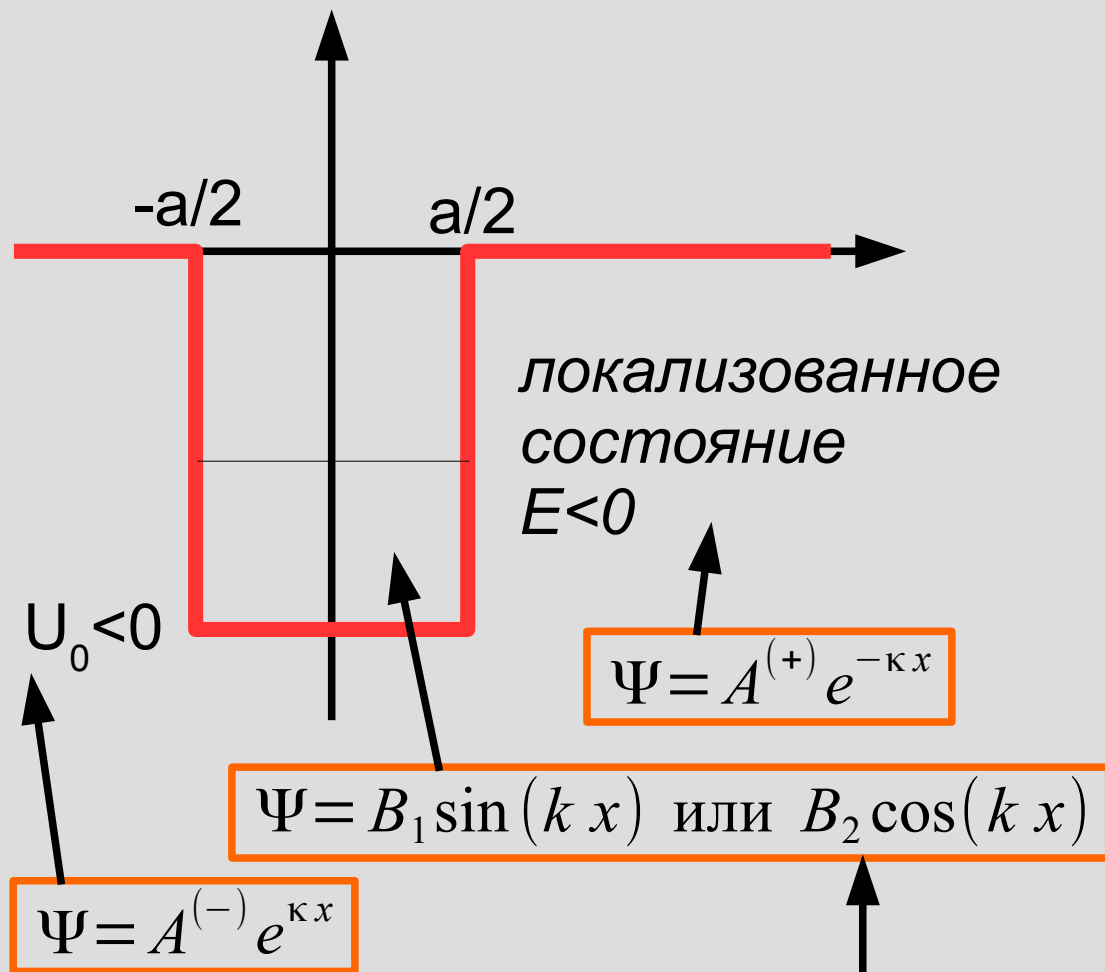
барьер



потенциальная яма



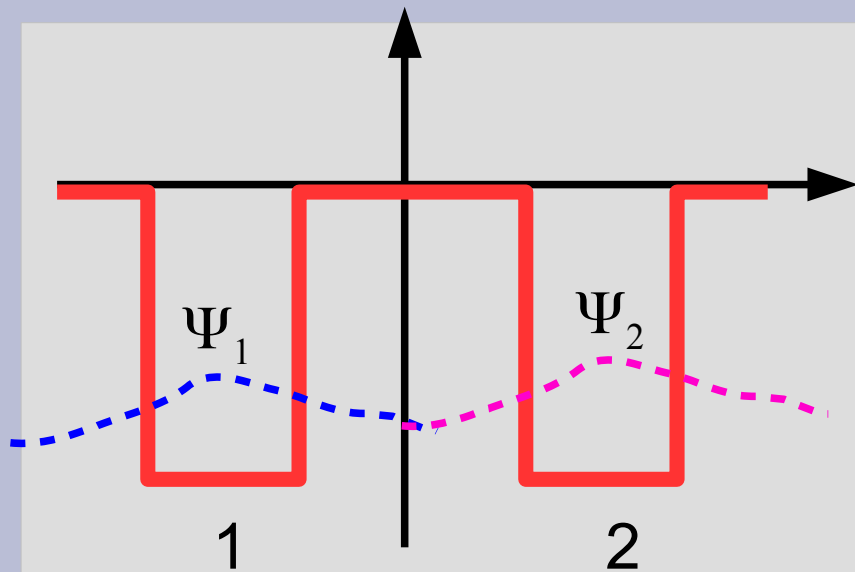
Симметричная одномерная яма конечной глубины



основное состояние — с косинусом
(без «лишних» нулей)

- 1) Для локализованного состояния можно выбрать **действительные** волновые функции
- 2) Потенциал симметричен, поэтому распределение вероятностей (наблюдаемая величина!) симметрично. Поэтому волновые функции **четные или нечетные**.

Связанные ямы



Две одинаковые ямы, достаточно далеко друг от друга (вероятность туннелирования есть, но мала)

Без учёта туннелирования

$$\hat{H}_0 \Psi_{1,2} = E_0 \Psi_{1,2}$$

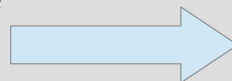
Модельный учёт туннелирования:
оператор туннелирования

$$\hat{T} \Psi_{1,2} = \hbar T \Psi_{2,1}$$

Задача на поиск собственных функций: $(\hat{H}_0 + \hat{T}) \Psi = E \Psi$

$$\Psi^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1 \pm \Psi_2)$$

туннельное расщепление
уровня энергии



$$E^{(\pm)} = E_0 \pm \hbar T$$

СВ

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{T}) \Psi$$

$$\Psi(t=0) = \Psi_1$$

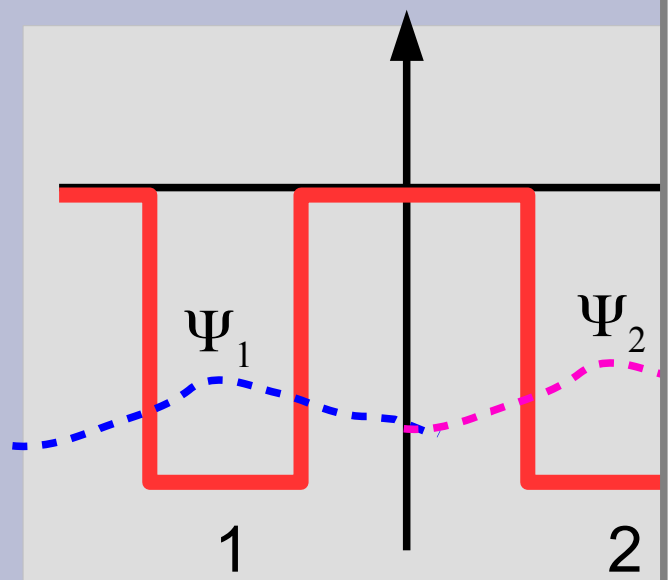
изначально частица локализована в левой яме (несобственное состояние!)

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^{(+)} e^{-iE^{(+)}t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^{(-)} e^{-iE^{(-)}t/\hbar} = \\ &= e^{-iE_0t/\hbar} [\Psi_1 \cos(Tt) - \Psi_2 \sin(Tt)] \end{aligned}$$

Вероятности обнаружить частицу в разных ямах осциллируют:

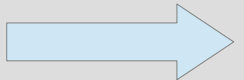
$$\begin{aligned} w_1 &= \cos^2(Tt) \\ w_2 &= \sin^2(Tt) \end{aligned}$$

Общее утверждение: если изначально система (частица) не в собственном состоянии, то наблюдаемое состояние осциллирует между «спутанными» состояниями



Задача на поиск собствен

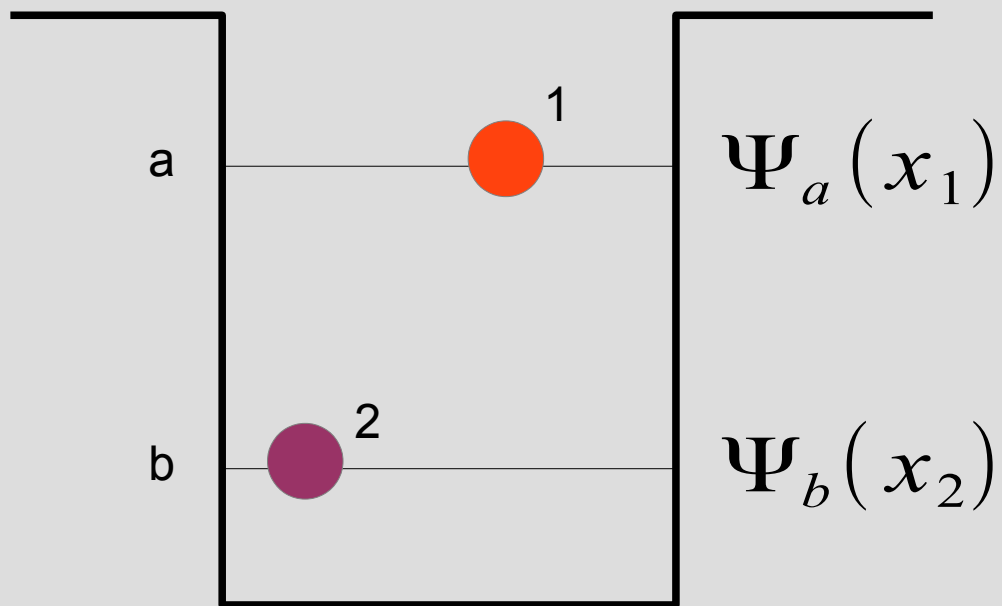
туннельное расщепление уровня энергии



$$\begin{aligned} \Psi^{(\pm)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1 \pm \Psi_2) \\ E^{(\pm)} &= E_0 \pm \hbar T \end{aligned}$$

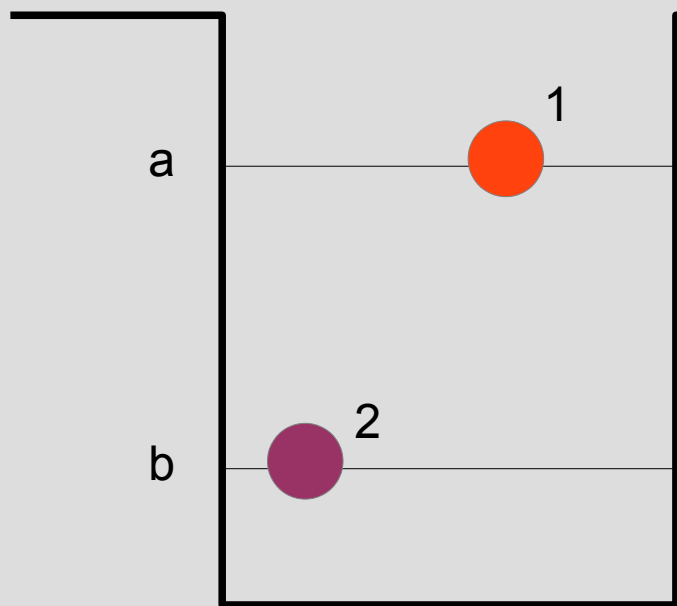
Часть 2. Неразличимость частиц и статистика

Волновая функция пары частиц.



$$\Psi_{ab}(x_1, x_2) \text{ ???}$$

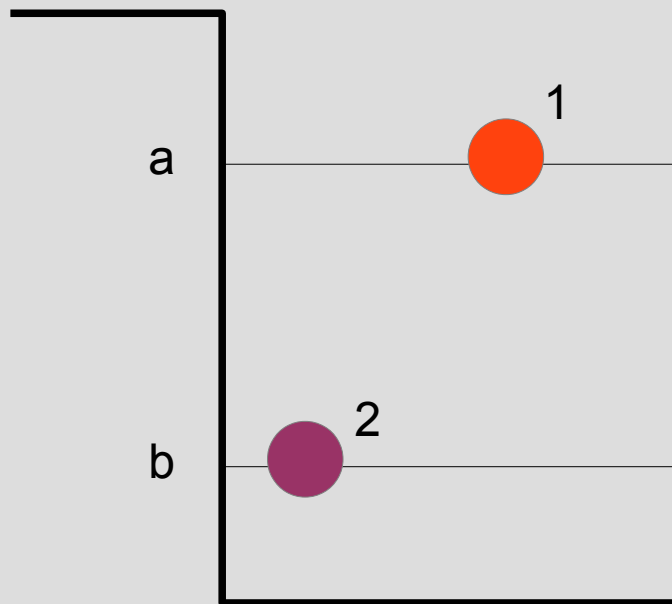
Волновая функция пары частиц.



$$\Psi_{ab}(x_1, x_2)$$

$$w_1 = \int_{\xi}^{\zeta} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 [\Psi_{ab}^* \Psi_{ab}]$$

Волновая функция пары частиц.



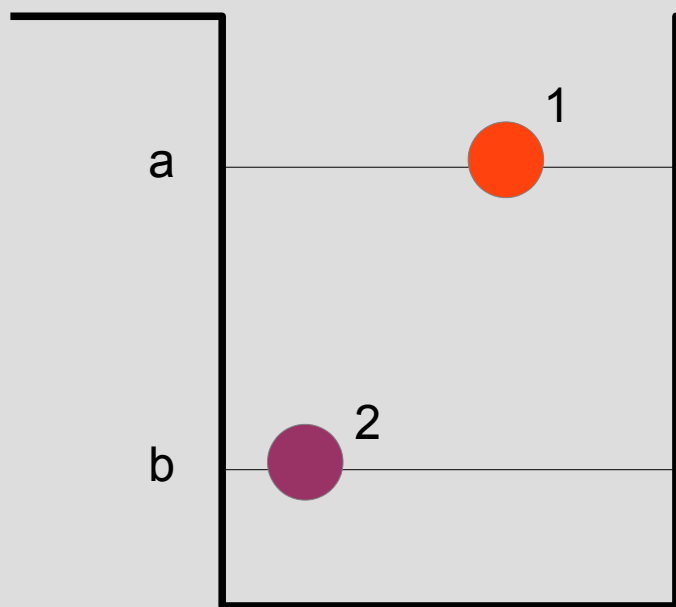
$$\Psi_{ab}(x_1, x_2)$$

$$w_1 = \int_{\xi}^{\zeta} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 [\Psi_{ab}^* \Psi_{ab}]$$

Догадка №1

$$\Psi_{ab}^{проб}(x_1, x_2) = \Psi_a(x_1) \Psi_b(x_2)$$

Волновая функция пары частиц.



The diagram shows a rectangular box divided into two horizontal sections, labeled 'a' and 'b'. Section 'a' is the upper section and section 'b' is the lower section. An orange circle labeled '1' is positioned in section 'a', and a purple circle labeled '2' is positioned in section 'b'. To the right of the box, the wave function is denoted as $\Psi_{ab}(x_1, x_2)$.

$$w_1 = \int_{\xi}^{\zeta} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 [\Psi_{ab}^* \Psi_{ab}]$$

Догадка №1

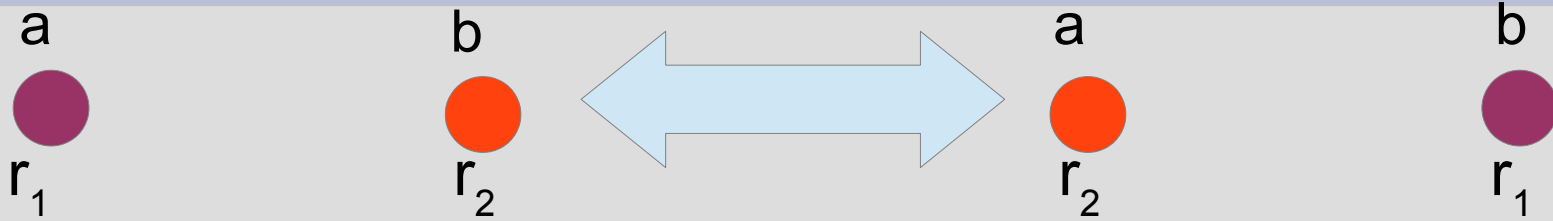
~~$\Psi_{ab}^{проб}(x_1, x_2) = \Psi_a(x_1) \Psi_b(x_2)$~~

Неразличимость частиц!
Перестановка ($1 \leftrightarrow 2$) не должна менять
наблюдаемые

Волновая функция пары частиц.



Волновая функция пары частиц.



$$\Psi_{ab}^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Psi_a(\vec{r}_1)\Psi_b(\vec{r}_2) \pm \Psi_a(\vec{r}_2)\Psi_b(\vec{r}_1)$$

Волновая функция пары частиц.



$$\Psi_{ab}^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Psi_a(\vec{r}_1) \Psi_b(\vec{r}_2) \pm \Psi_a(\vec{r}_2) \Psi_b(\vec{r}_1)$$

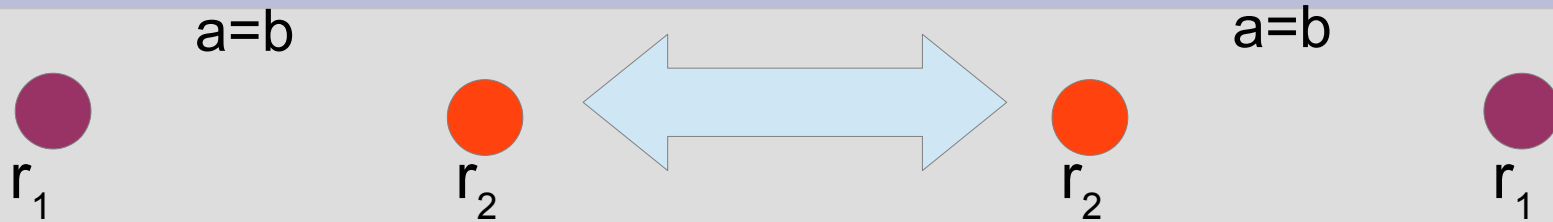
Четность или нечётность парной волновой функции к перестановке — внутреннее свойство частицы!

Запрет Паули



$$\Psi_{ab}^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Psi_a(\vec{r}_1)\Psi_b(\vec{r}_2) \pm \Psi_a(\vec{r}_2)\Psi_b(\vec{r}_1)$$

Запрет Паули



$$\Psi_{ab}^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Psi_a(\vec{r}_1)\Psi_b(\vec{r}_2) \pm \Psi_a(\vec{r}_2)\Psi_b(\vec{r}_1)$$

БОЗЕ-
частицы

ЧЁТНЫЕ k
перестановке

МОГУТ находиться в одном
состоянии

ФЕРМИ-
частицы

НЕЧЁТНЫЕ k
перестановке

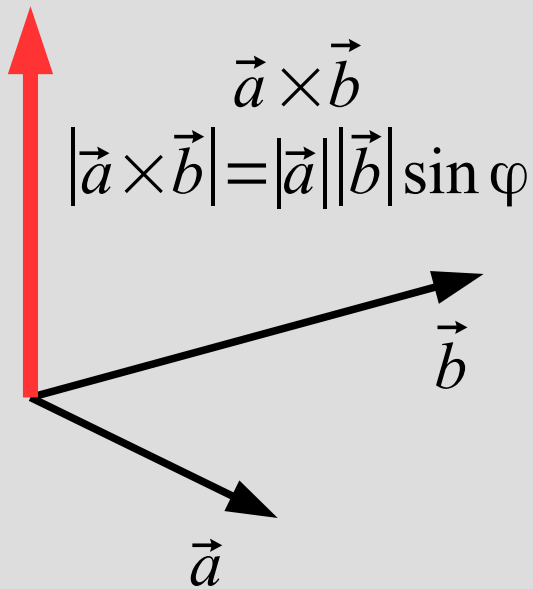
НЕ МОГУТ находиться в
одном состоянии

Часть 3. Момент импульса и спин.

Момент импульса в механике

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Сохраняющаяся величина
в замкнутой системе



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Закон сохранения момента импульса... знаком с детства



https://www.youtube.com/watch?v=_EZiw_a8B5A

Более “взрослый” пример



<https://www.youtube.com/watch?v=7hN67r90xE8>

Немного механики

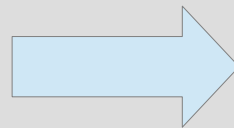
При вращении вокруг оси

$$L = \sum_i r_i p_i = \sum_i r_i m_i V_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{момент инерции}$$

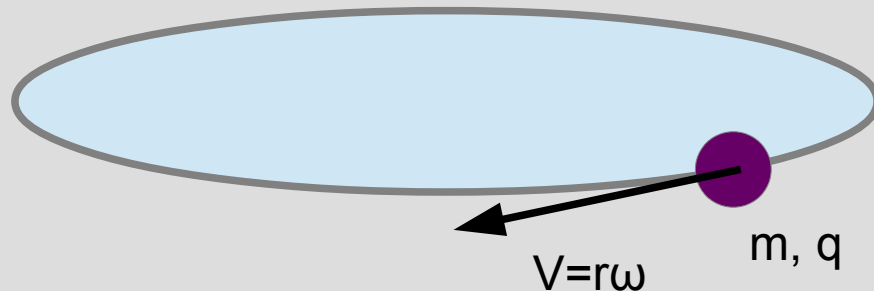
$$\frac{d \vec{p}_i}{d t} = \vec{F}_i$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \frac{d \vec{p}_i}{d t} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$



$$\frac{d \vec{L}}{d t} = \vec{T}$$

Гиромагнитное отношение



$$L = m \omega r^2$$

$$M = I S = q \frac{\omega}{2\pi} \pi r^2 = q \omega r^2 / 2$$

$$\gamma_0 = \frac{M}{L} = \frac{1}{2} \frac{q}{m}$$

Не зависит от
траектории!

Специфика момента импульса в квантовой физике

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$L_x = y p_z - p_y z$$

Но все компоненты импульса и координаты нельзя одновременно измерить!!!

- Длина вектора (под «длиной» имеется в виду максимально возможная проекция на заданное направление) момента импульса составляет целое или полуцелое число нормированных констант Планка \hbar .
- Если длина вектора момента импульса равна $N \hbar$, то проекция момента импульса на произвольное направление может принимать одно из следующих $(2N+1)$ значений: $L_z = \{-N \hbar, (-N+1) \hbar, \dots, (N-1) \hbar, N \hbar\}$.
- Если длина вектора момента импульса равна $N \hbar$, то среднее значение квадрата момента импульса $L^2 = \hbar^2 N(N+1)$ (при этом получается, что $\sqrt{L^2} > \max L_z$!)

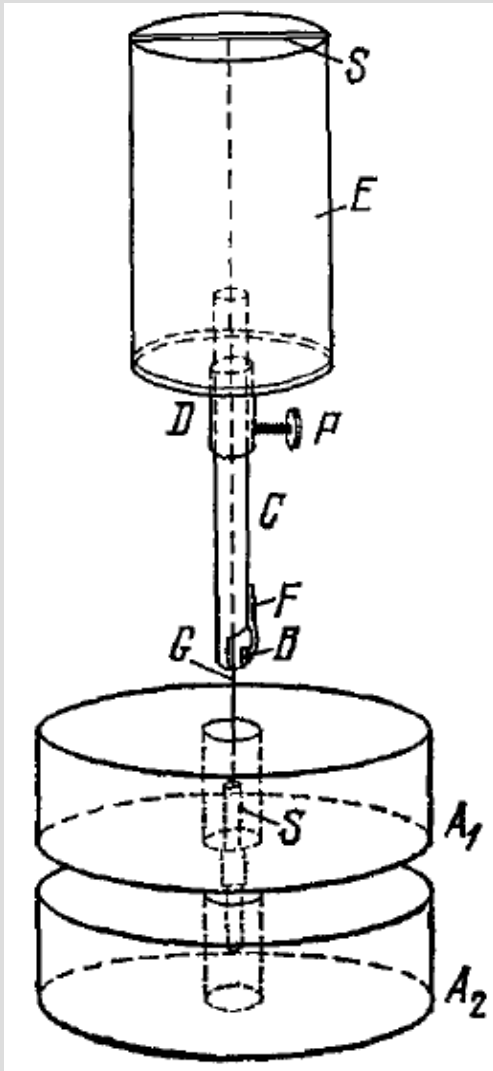
Квантование проекции магнитного момента

$$\mu_z = g \mu_B j_z$$

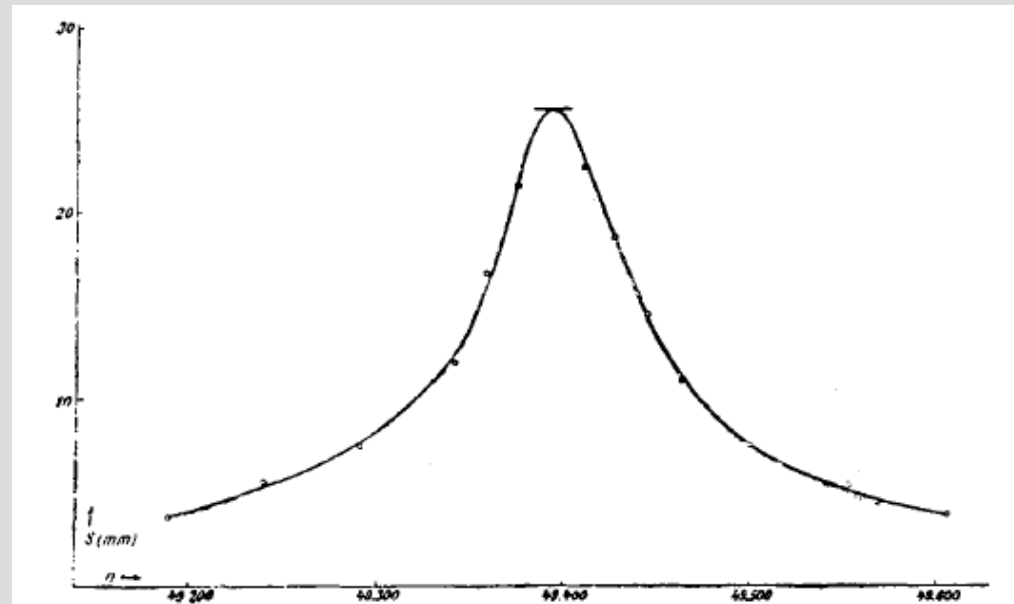
$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_e} = 0.92 \times 10^{-23} \text{ Дж/Тл} \quad \text{магнетон Бора}$$

1. Если магнитный момент $\vec{\mu}$ помещён в магнитное поле \vec{B} , то энергия, связанная с ориентацией этого момента (с поворотом «стрелки компаса») равна $E = -(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$.
2. Если магнитный момент $\vec{\mu}$ направлен вдоль силовых линий магнитного поля, но находится в неоднородном магнитном поле, то возникает сила «втягивающая» магнитный момент в сильное поле, равная $F = \mu_z \frac{dB}{dz}$.

Организация опыта Эйнштейна-де Гааза



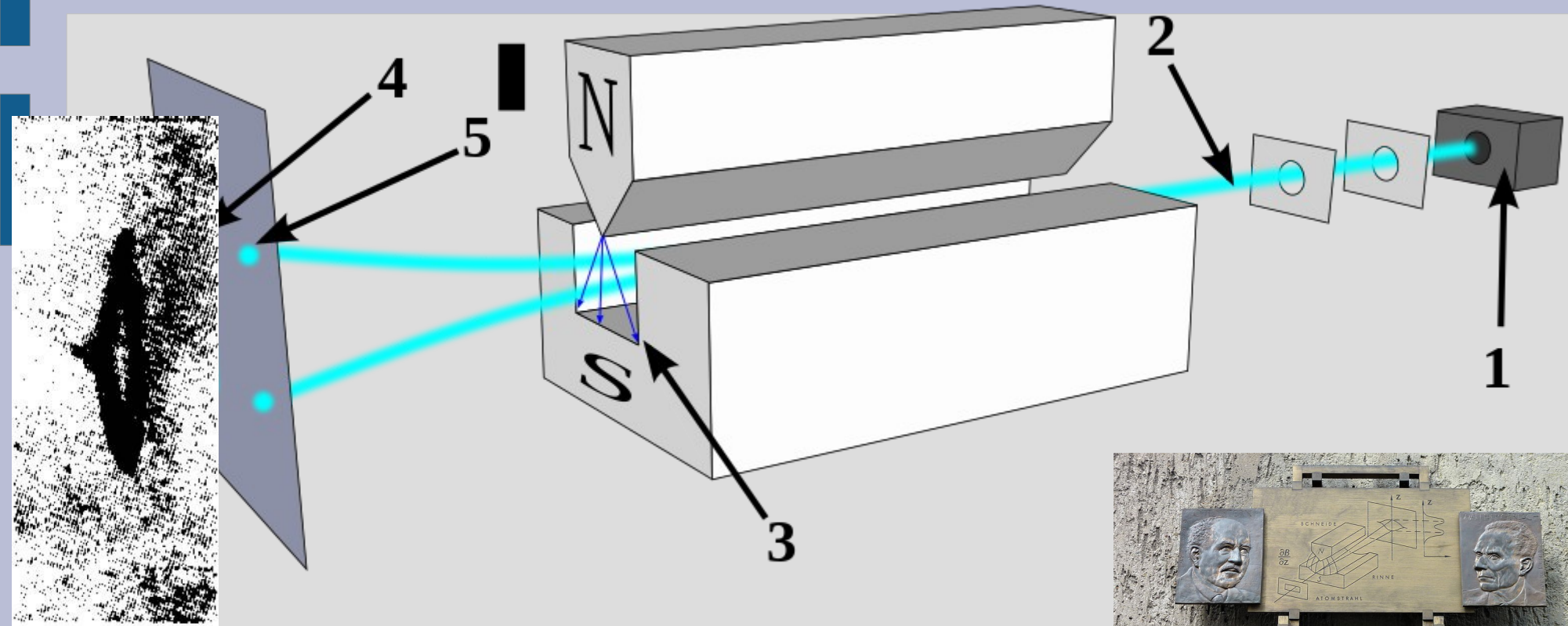
УФН 128, 545 (1979)



Beck, Ann. Phys. 60, 109 (1919)

$$\gamma' = \frac{m}{e} = 0.57 \times 10^{-11} \frac{\text{КГ}}{\text{КЛ}}$$

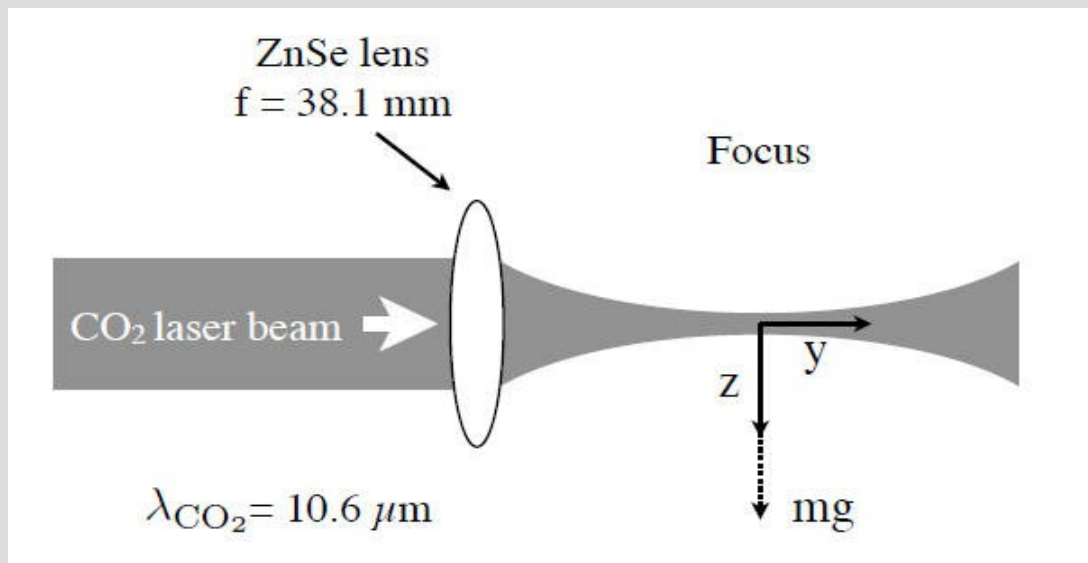
Опыт Штерна-Герлаха



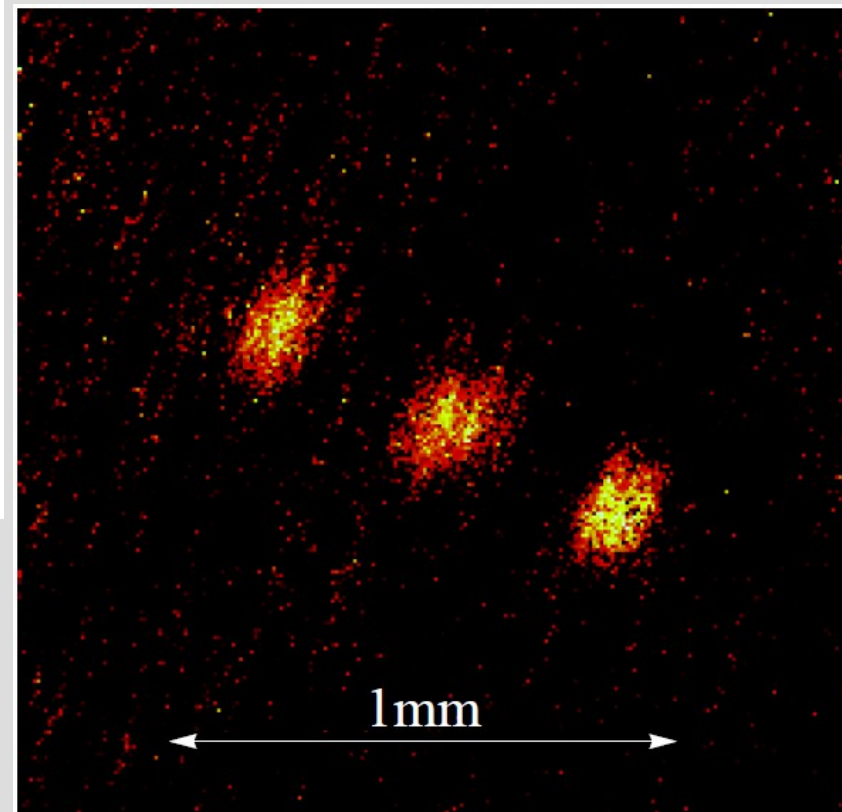
Штерн, 1943

https://en.wikipedia.org/wiki/Stern-Gerlach_experiment; [https://de.wikipedia.org/wiki/Otto_Stern_\(Physiker\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Otto_Stern_(Physiker)); https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1943/stern-lecture.html

Опыт типа опыта Штерна-Герлаха с ультрахолодными атомами



Рубидий-87: нечётное число нуклонов в ядре, спин $1/2$ – полный момент $1 \Rightarrow$ бозон



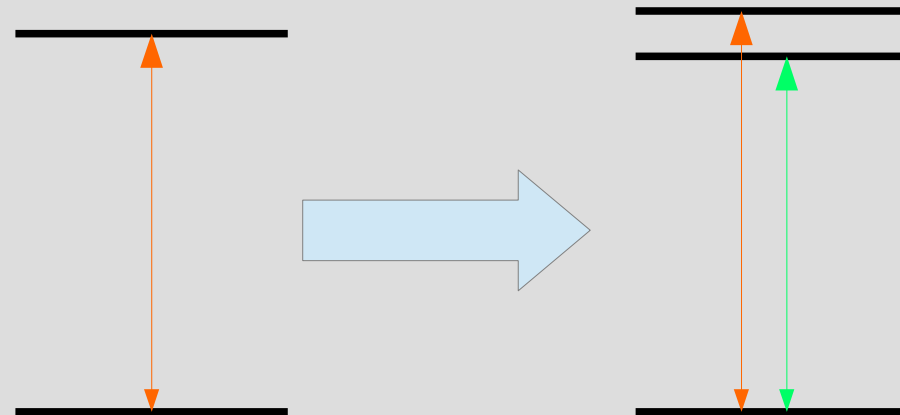
Результат опыта типа опыта Штерна-Герлаха с "каплей" ультрахолодных атомов рубидия-87. Фото сделано через 10 мс после начала падения (выключения ловушки).

Эффект Зеемана.



$$\mu_z = g \mu_B j_z$$
$$E = -(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

расщепление
уровней энергии в
магнитном поле

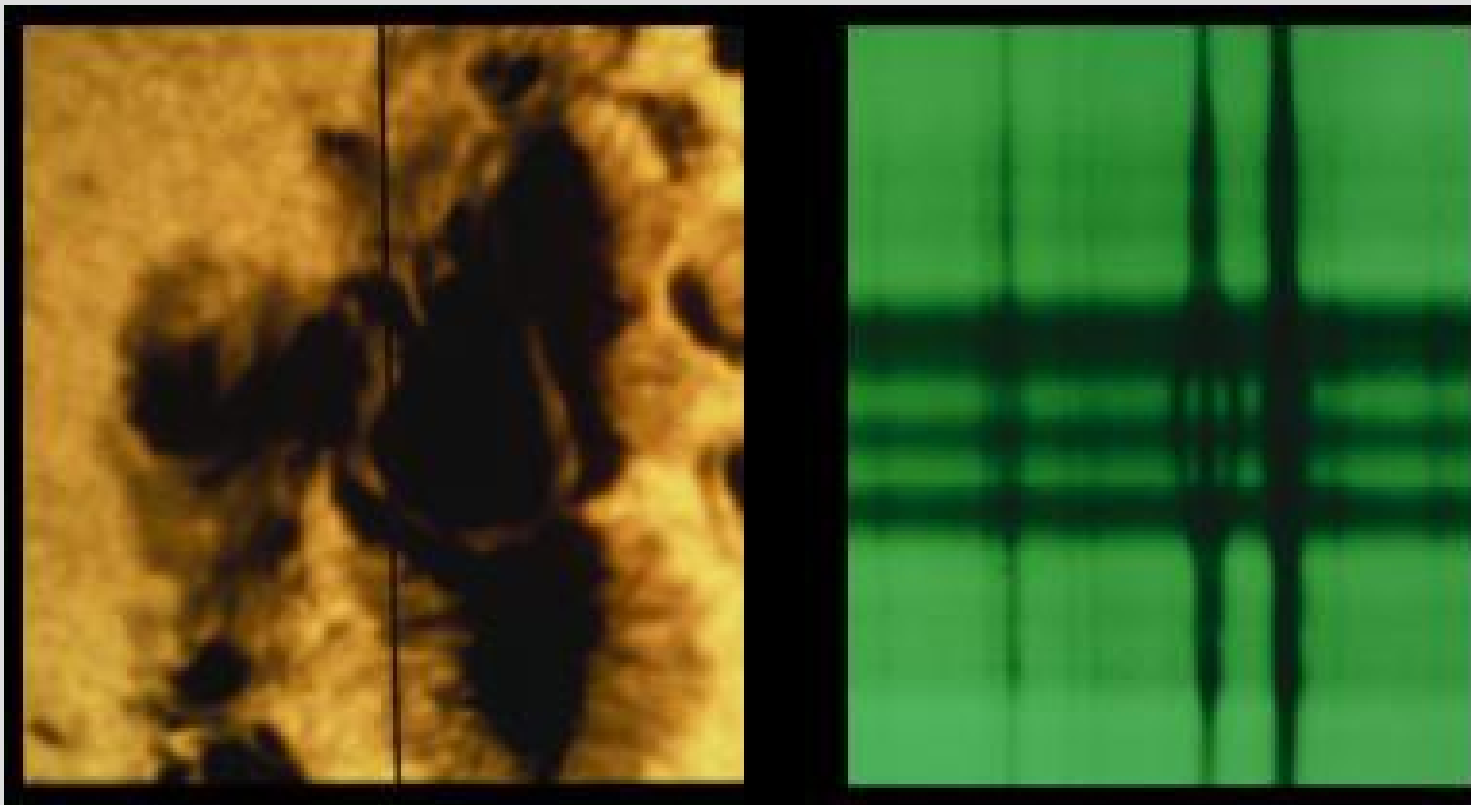


расщепление
спектральных линий



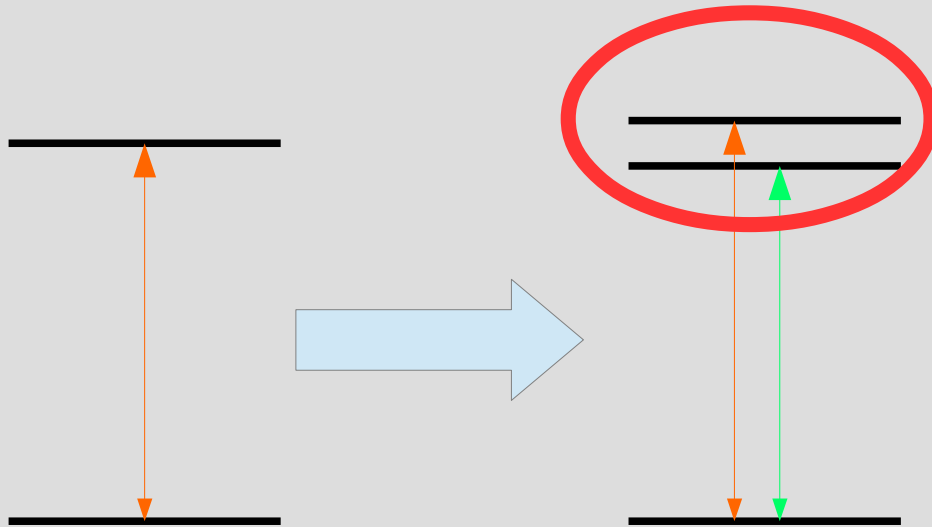
Зееман, 1902

Эффект Зеемана на Солнце



Поле в солнечном пятне примерно 0.4 Тл

ЯМР, ЭПР



расщепление
спектральных линий

Между этими уровнями тоже
возможен резонансный переход!

В поле 1 Тл:
ЭПР – десятки гигагерц,
сантиметровый СВЧ-
диапазон

ЯМР – десятки мегагерц,
радиочастотный
диапазон

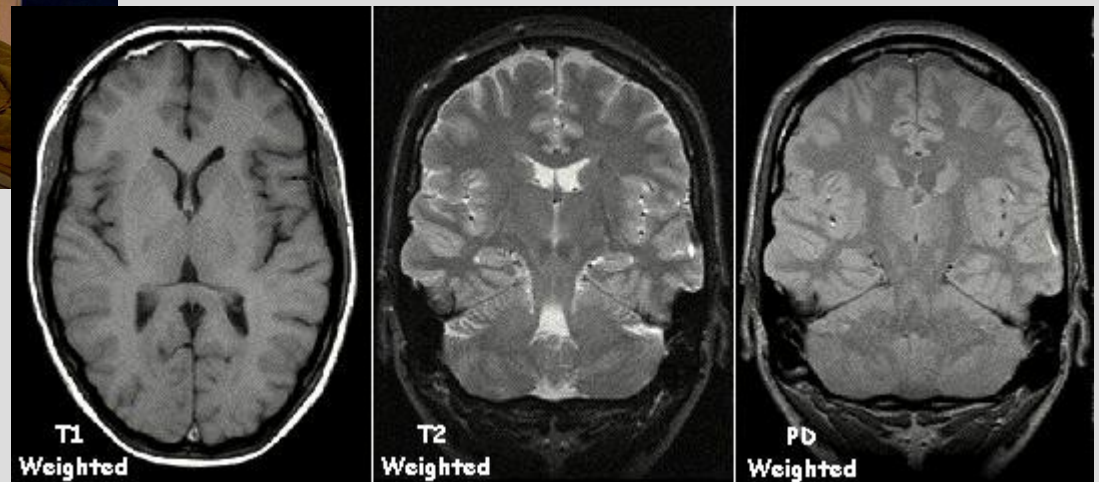


Раби, 1944

ЯМР-томография



Слева: Современный ЯМР-томограф с полем до 3 Тл. Справа: примеры ЯМР-томограмм мозга с разной обработкой сигнала.



Задачи домашнего задания

1. В современных томографах с полем 3Тл градиент магнитного поля составляет около 0.1 Тл/см. Неосторожный сотрудник подошёл к включенному томографу, держа в руке чайную ложку из магнитного материала массой 15 грамм. Оценить силу, которая будет действовать на ложку. Считать для оценки молярную массу материала равной 60 г/моль, каждый атом имеет магнитный момент равный магнетону Бора.

2. В магнитном поле происходит расщепление уровней энергии электрона в атоме, что приводит к наблюдаемому расщеплению линий оптического спектра (оптический эффект Зеемана). Оценить, на сколько будут различаться в поле 1 Тл длины волн расщепленной линии спектра с длиной волны 500 нм.