

Национальный исследовательский университет
Высшая Школа Экономики

курс-майнор 2017-2018 уч.года
«Квантовая физика 'для чайников'»

В.Н.Глазков

Лекция 8

Неразличимость частиц: ферми- и бозе-частицы.
Момент импульса и спин в квантовой механике.

Оглавление

Цель лекции.....	4
Напоминание о формализме квантовой механики.....	4
Неразличимость частиц и возможные статистики частиц.....	4
Ферми- и Бозе-частицы. Принцип Паули.....	4
Неразличимость частиц. Связь неразличимости частиц с возможными статистиками.....	5
Момент импульса и спин.....	7
Момент импульса в классической физике. Динамика вращающегося тела, закон сохранения, момент инерции.....	7
Гиромагнитное отношение в классической физике.....	8
Момент импульса в квантовой физике. Спин и магнитный момент.....	9
Экспериментальные проявления квантования момента импульса.....	10
Опыт Штерна-Герлаха.....	10
Классическая постановка.....	10
Опыт типа Штерна-Герлаха с ультрахолодными газами.....	11
Эффект Зеемана. Измерение магнитного поля на Солнце.....	13
Магнитный резонанс. ЯМР-томография.....	14

Список литературы

- 1: EnotShow, УДИВИТЕЛЬНЫЙ ГИРОСКОП TEDCO, 2017, <https://www.youtube.com/watch?v=7hN67r90xE8>
- 2: В.Я.Френкель, К истории эффекта Эйнштейна-де Гааза, Успехи физических наук, 128, 545 (1979)
- 3: wikipedia.org, Stern-Gerlach experiment, 2017, https://en.wikipedia.org/wiki/Stern-Gerlach_experiment
- 4: Walter Gerlach, Otto Stern, Das magnetische Moment des Silberatoms, Zeitschrift für Physik, 9, 353 (1922)
- 5: wikipedia.org, Otto Stern (Physiker), 2017, [https://de.wikipedia.org/wiki/Otto_Stern_\(Physiker\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Otto_Stern_(Physiker))
- 6: Otto Stern, Nobel Lecture: The Method of Molecular Rays, 2017, https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1943/stern-lecture.html
- 7: Christoph Anton Kaefer, Inaugural-Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines doctor rerum naturalium: Stern-Gerlach experiments with Bose-Einstein condensates and the introduction of a new thermometry method in an optical dipole trap, 2010
- 8: National Optical Astronomy Observatory, Sunspot with spectrum, 2017, https://www.noao.edu/image_gallery/html/im0404.html
- 9: wikipedia.org, Magnetic resonance imaging, 2017, https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_resonance_imaging

Цель лекции

Мы рассмотрели основные построения, лёгшие в основу квантовой физики и теперь пришла пора начинать «пожинать плоды» наших знаний. Первой целью (целью этой и следующей лекции) будет более строгое рассмотрение вопросов строения атомов и молекул. Мы увидим, что многие (привычные нам ещё со школьной химии) картинки оказываются результатом квантовой физики, что структура таблицы Менделеева однозначно связана с решением квантовомеханической задачи об устройстве атома и разберем другие связанные вопросы. Но для этого необходимо сделать ещё несколько шагов.

Напоминание о формализме квантовой механики

Мы ранее рассмотрели несколько простых задач квантовой физики и увидели как, в принципе, могут решаться эти задачи. Мы увидели и поняли, что квантовая механика описывает свойства частицы на статистическом языке: на смену детерминизму классической физики пришло описание на языке волновой функции ψ , квадрат модуля которой описывает плотность вероятности обнаружения частицы в окрестности данной точки.

Мы также увидели, что существуют такие состояния частицы, в которых распределение плотности вероятности в пространстве оказывается постоянным во времени. Такие состояния называются стационарными, каждое такое состояние однозначно описывается некоторой волновой функцией и обладает вполне определённой энергией. Совокупность возможных значений энергии определяет энергетический спектр данной системы

Можно показать, что для финитного движения (для движения, локализованного в конечной области пространства) энергетический спектр дискретен, а тогда все стационарные состояния можно «пронумеровать». Это означает, что можно полностью и однозначно описать волновую функцию данного состояния не выписывая ее явно, а лишь назвав достаточно полный набор чисел, которыми перенумерованы состояния — квантовых чисел.

Например, для простейшей квантовомеханической задачи: потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками, стационарным состояниям частицы с массой m соответствуют стоячие волны де Бройля, когда на ширине ямы d укладывается целое число полуволен —

$$d = n \frac{\lambda}{2}. \text{ Или, вспоминая определение волнового вектора (волнового числа) } k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$dk = \pi n. \text{ Энергия этих состояний } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2d^2 m} \text{ полностью определяется одним}$$

главным квантовым числом n . Это же число полностью определяет число полуволен на размере ямы — то есть полностью описывает вид волновой функции n -ого стационарного состояния.

Неразличимость частиц и возможные статистики частиц

Ферми- и Бозе-частицы. Принцип Паули.

Прежде чем начинать рассмотрение строения атома необходимо рассмотреть один

кажущийся на первый взгляд странным вопрос. Как мы уже неоднократно видели, в квантовой механике частицы могут стационарно существовать только в каких-то определённых состояниях (например, орбита электрона в атоме). Ранее мы всегда рассматривали одну единственную частицу: в задаче о потенциальной яме, в простейшей модели атома водорода, в задачах о туннелировании и распространении частицы.

Что будет если частиц несколько? Могут ли несколько частиц занимать одно квантовомеханическое состояние?

Ответ на этот вопрос в микромире оказывается неоднозначен: есть и такие частицы, которые могут находиться в одном состоянии в неограниченном количестве, и такие, которые не могут «жить с соседями». Первый вид частиц (допускающих наличие других частиц в таком же состоянии) называют бозе-частицами или бозонами (в честь индийского физика Сатиендры Бозе, отметившего это свойство у частиц), иногда говорят, что эти частицы подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна. Второй вид частиц (не допускающих наличия других частиц в том же состоянии) называют ферми-частицами или фермионами (в честь итальянского физика Энрико Ферми), иногда о таких частицах говорят, как о частицах, подчиняющихся статистике Ферми-Дирака.

Примерами бозе-частиц являются уже ставшие нам привычными фотоны. Действительно, электромагнитная волна на частоте ω в квантовом описании является потоком квантов (фотонов) с абсолютно одинаковыми частотой и волновым вектором. Волновой вектор является квантовым числом¹, описывающим фотон, так как в волне может быть запасена произвольная энергия, то в состоянии с данным волновым вектором может быть сколько угодно фотонов.

Примерами ферми-частиц являются многие элементарные частицы: электроны, протоны, нейтроны.

Свойство фермионов «не собираться» в одном состоянии описывается так называемым принципом Паули, сформулированным Вольфгангом Паули в 1925 году. Формулировка этого принципа позволила (как мы увидим позднее) объяснить принципы устройства сложных атомов. За открытие этого принципа В.Паули была присуждена Нобелевская премия 1945 года. Как и с остальными постулатами, возникавшими в ходе становления квантовой теории, постулат Паули последовательно включен в формализм квантовой механики, но его полное описание даётся только в релятивистской квантовой теории.

Неразличимость частиц. Связь неразличимости частиц с возможными статистиками

Необходимо подчеркнуть принципиальную особенность микромира — частицы в микромире неразличимы. Если мы имеем квантовую систему из нескольких одинаковых частиц, для определённости — двух электронов, то мы *принципиально* не можем указать какой из электронов оказался в некоторой области пространства, мы можем только указать, что какой-то электрон оказался в этой области.

Поясним это простым формальным рассуждением. Пусть наши два электрона могут

¹ Вообще говоря, у электромагнитной волны, и, следовательно, у фотонов, может быть ещё две поляризации — поэтому полным набором квантовых чисел является волновой вектор и поляризация. Это, однако, не меняет наши рассуждения существенно.

находиться в состояниях a и b . Волновая функция пары частиц должна зависеть от двух координат $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, вероятностный смысл которой заключается в том, что вероятность обнаружить одну частицу в окрестности точки \vec{r}_1 , а вторую — в окрестности точки \vec{r}_2 равна $w = |\psi|^2 dV_1 dV_2$ (аналогично понятию условной вероятности в статистике).

Для нашего примера с двумя состояниями и двумя частицами можно наивно написать $\psi_{ab}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2)$, что соответствует описанной выше вероятностной трактовке. Однако в силу неразличимости частиц с теми же основаниями можно «переставить» частицы (поменять индексы у координат): $\psi_{ab}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1)$. В силу линейности уравнения Шредингера можно сделать произвольную линейную комбинацию этих функций: $\psi_{ab}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \alpha \psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) + \beta \psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1)$. Есть ли какой-то правильный способ?

Ответ кроется все в той же неразличимости частиц. Так как перестановка частиц не меняет никаких физически наблюдаемых параметров, и в частности не меняет плотность вероятности $|\psi|^2$, то это означает что «правильная» волновая функция является собственной функцией оператора перестановки частиц \hat{T} , причём (не меняется $|\psi|^2$!) $\hat{T}\psi = e^{i\lambda}\psi$. В то же время, двукратное повторение перестановки частиц не должно ничего изменить вовсе. Следовательно $e^{2i\lambda} = 1$ и $e^{i\lambda} = \pm 1$. Ну а тогда для возможных волновых функций есть всего два варианта:

$$\psi_{ab}^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) \pm \psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1),$$

другими словами — волновая функция пары частиц должна быть либо чётной либо нечётной (не менять или менять знак) при перестановке частиц.

Из этого следует два важных следствия

1. Для данного типа частиц все состояния должны иметь чётность к перестановке одного типа — иначе из чётного и нечётного состояний можно было бы сделать смешанное состояние, которое ни чётное, ни нечётное. То есть, эта чётность связана с природой конкретной частицы и является неизменным свойством частицы
2. Вариант со знаком «минус» запрещает частицам пребывать в одном состоянии: при $a=b$ $\psi_{ab}^{(-)} = 0$.² Поэтому для ферми-частиц волновая функция пары частиц нечётная по перестановке, а для бозе-частиц — чётная.

² Таким образом, запрет Паули оказывается включён в формализм квантовой механики.

Момент импульса и спин

Момент импульса в классической физике. Динамика вращающегося тела, закон сохранения, момент инерции



Рисунок 1: Юла. С сайта магазина "Детский мир" detmir.ru

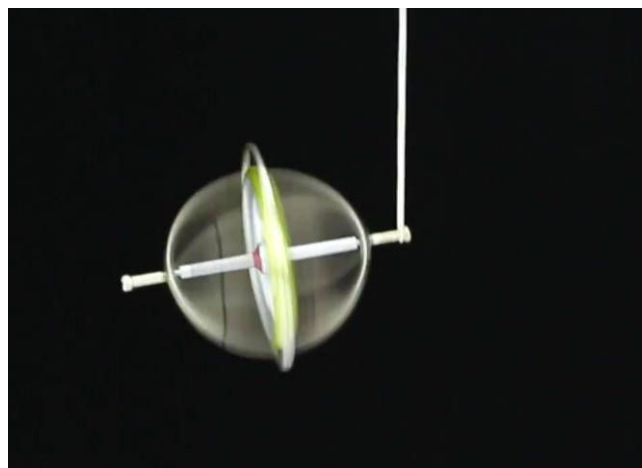


Рисунок 2 Опыты с гирископом, с сайта [1].

Одним из первых физических опытов в нашей жизни (не считая изучения падения в поле тяжести при наших первых шагах) оказывается изучение динамики вращающегося тела — наблюдение за юлой. Эти опыты настолько занимательны, что всегда привлекают и внимание взрослых, и даже порой взрослые изучают эти явления со специальными волчками-гирископами (см., например, [1]).

Чему нас учат эти опыты? Мы знаем, что раскрученный волчок приобретает устойчивость — в отсутствие внешних сил направление оси вращения не меняется. Это свойство широко используется в системах навигации (хотя современная электроника потеснила классические механические гирископы). Это свойство является проявлением ещё одного закона сохранения: в замкнутой системе отсчёта сохраняется величина, называемая моментом импульса $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.³ Здесь знак умножения — это векторное произведение⁴, результатом которого является вектор, ортогональный сомножителям, направление которого определяется «по правилу буравчика», а длина равна $r p \sin \alpha$.

Получим элементарное описание динамики вращающегося тела. Пусть тело вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω . Момент импульса такого тела направлен, очевидно, вдоль оси вращения и по модулю равен

3 Заметим без строгого доказательства, что один из законов Кеплера, закон равных площадей: «при движении по орбите за равные интервалы времени радиус-вектор заметает равные площади» как раз выражает закон сохранения момента импульса. Доказательство оставим заинтересованному читателю, оно требует несложного анализа геометрии.

4 В координатном выражении $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$.

$$L = \sum_i r_i p_i = \sum_i r_i m_i V_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega, \text{ здесь суммирование идёт по составляющим тело}$$

материальным точкам. Мы воспользовались тем, что при вращении вокруг оси все точки тела движутся по окружности и при этом радиус вектор и импульс ортогональны. Величину

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \text{ называют моментом инерции тела относительно данной оси, он полностью}$$

определяется его геометрией и расположением оси вращения.

Например, при вращении диска (или цилиндра) вокруг его оси:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int_0^R \rho r^2 2\pi r h dr = \frac{1}{2} \pi R^4 h \rho = \frac{1}{2} m R^2.$$

Если на вращающееся тело действуют силы, причём равнодействующей силы нет $\sum_i \vec{F}_i = 0$ (тогда центр масс тела остаётся в покое), то можно записать второй закон

Ньютона для каждой точки тела $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$. Домножим векторно на радиус-вектор частицы

и просуммируем по всем частицам: $\sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$. В правой части равенства

стоит произведение силы на плечо — то есть момент сил. В левой части заметим, что

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_i \left[\vec{v}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right]$, здесь первое слагаемое зануляется, так как скорость и импульс параллельны.

Окончательно получаем $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T}$: момент импульса меняется под действием момента внешних сил. Это уравнение описывает и прецессию обычного гироскопа.

Гиромагнитное отношение в классической физике

Пусть заряженная частица массы m и с зарядом q движется по круговой орбите радиуса r с угловой скоростью ω . Момент импульса, возникающий при этом вращении равен $L = m \omega r^2$, а магнитный момент (связанный с круговым током, которым является движущаяся заряженная частица) $M = I S = q \frac{\omega}{2\pi} \pi r^2 = q \omega r^2 / 2$.

Вектора момента импульса и магнитного момента витка с током параллельны (сонаправлены для положительного знака заряда и противоположно направлены для отрицательного знака заряда). Таким образом, отношение магнитного момента к механическому оказывается константой, определяемой только массой частицы и её зарядом, но не параметрами движения:

$$\gamma_0 = \frac{M}{L} = \frac{1}{2} \frac{q}{m}.$$

Это отношение называют гиромагнитным отношением.

Существование связи между магнитным и механическим моментом проявляется в известных эффекте Эйнштейна — де Гааза и эффекте Барнетта, когда при намагничивании тела возникает его вращение или наоборот [2].

Момент импульса в квантовой физике. Спин и магнитный момент

Как мы помним, в классической механике существует три закона сохранения: закон сохранения энергии, импульса и момента импульса. Моментом импульса материальной точки называется величина $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. При свободном вращении в классической физике момент импульса сохраняется. На этом, например основано действие гироскопов.

В квантовой физике, как мы обсуждали, законы сохранения и сохраняющиеся величины играют важную роль. Например, энергия характеризует стационарные состояния системы. Импульс определяет дебройлевскую длину волны свободно движущейся частицы, является квантовым числом (связан с волновым числом) для свободного движения квантовой частицы.

Момент импульса, как сохраняющаяся величина, тоже должен иметь определённое значение в стационарных состояниях. Заметим сразу, что размерность момента импульса

$$[p][r] = \frac{кг \times м}{с} \times м = \left(\frac{кг \times м^2}{с^2} \right) \times с = Дж \times с \quad \text{совпадает с размерностью постоянной Планка,}$$

поэтому в квантовой механике часто используют безразмерный момент импульса, измеряемый в единицах постоянной Планка.

Однако у момента импульса есть принципиальная особенность. Как видно из определения, он определяется произведением координат и импульсов: $L_x = y p_z - p_y z$ и т.д. Но по принципу неопределенности Гейзенберга все проекции координаты и импульса нельзя измерить одновременно! Из-за этого оказывается невозможным измерить одновременно все три компоненты момента импульса.

Строгое рассмотрение показывает, что одновременно можно измерить длину вектора момента импульса и его проекцию на одно выбранное направление. При этом, так как вращательное движение финитно, возникают правила квантования момента импульса:

- Длина вектора (под «длиной» имеется в виду максимально возможная проекция на заданное направление) момента импульса составляет целое или полуцелое число нормированных констант Планка \hbar .
- Если длина вектора момента импульса равна $N \hbar$, то проекция момента импульса на произвольное направление может принимать одно из следующих $(2N+1)$ значений: $L_z = \{-N \hbar, (-N+1) \hbar, \dots, (N-1) \hbar, N \hbar\}$.
- Если длина вектора момента импульса равна $N \hbar$, то среднее значение квадрата момента импульса $L^2 = \hbar^2 N(N+1)$ (при этом получается, что $\sqrt{L^2} > \max L_z$!)

Кроме того, оказывается, что, помимо орбитального момента импульса, возникающего, например, при движении по круговой траектории, у всякой частицы есть собственный момент импульса — спин. Грубое представление о спине можно получить, если представить, что в каждой элементарной частице есть «встроенный волчок». Это представление, строго говоря неправильно — но оно даёт наглядную картину, применимую в достаточно широком круге задач. Строгое объяснение того, что такое спин даётся в релятивистской квантовой механике и выходит за рамки нашего курса. При этом оказывается, что спин частицы полностью определяет её тип статистики: является ли она бозе-частицей (частицы с целым спином $S = 0, 1, 2, \dots$) или ферми-частицей (частицы со спином $S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$).

Экспериментальные проявления квантования момента импульса

Объединим сформулированные выше правила с тем, чтобы получить экспериментально проверяемые факты.

Если у атома, в состав которого входят заряженные частицы есть полный момент вращения, то с ним должен быть связан магнитный момент (следствие наличия гироманнитного отношения).

В силу правил квантования момента импульса проекция магнитного момента на выделенное направление (в качестве которого обычно выступает направление магнитного поля) тоже должна принимать дискретные значения:

$\mu_z = g \mu_B j_z$, здесь j_z — выраженная в единицах постоянной Планка \hbar проекция полного механического момента, $\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_e} = 0.92 \times 10^{-23} \text{ Джс/Тл}$ магнетон Бора,

определяющий характерный масштаб величины магнитного момента атома, а g — некоторое число, называемое спектроскопическим фактором Ланде, оно обычно примерно равно 1...2 и его точное значение на наши оценки не повлияет.

Как известно, магнитный момент взаимодействует с магнитным полем. Мы все знаем два примера такого взаимодействия: стрелка компаса выравнивается вдоль магнитного поля, всегда указывая на магнитный северный полюс (или на ближайший массивный железный предмет), а магнитики притягиваются друг к другу. Эти два эффекта могут быть формально выражены следующим образом:

1. Если магнитный момент $\vec{\mu}$ помещён в магнитное поле \vec{B} , то энергия, связанная с ориентацией этого момента (с поворотом «стрелки компаса») равна $E = -(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$.
2. Если магнитный момент $\vec{\mu}$ направлен вдоль силовых линий магнитного поля, но находится в неоднородном магнитном поле, то возникает сила «втягивающая» магнитный момент в сильное поле, равная $F = \mu_z \frac{dB}{dz}$.

Как мы увидим ниже, эти виды взаимодействия позволяют провести показательные и порой даже практически полезные эксперименты.

Опыт Штерна-Герлаха

Классическая постановка

Сначала рассмотрим классический опыт Штерна-Герлаха [3][4] (в том числе и за эти результаты Отто Штерн [5] получил Нобелевскую премию по физике 1943 года⁵ [6]).

⁵ Точнее, в 1943 году не было выбрано номинанта Нобелевской премии по физике, поэтому в соответствии с правилами решение было перенесено на год позже, и в 1944 году Отто Штерн был избран лауреатом премии 1944 года. При этом с 1940 по 1942 год Нобелевская премия по физике не вручалась вовсе. Нобелевскую лекцию Штерн прочитал только после войны, в 1946 году.

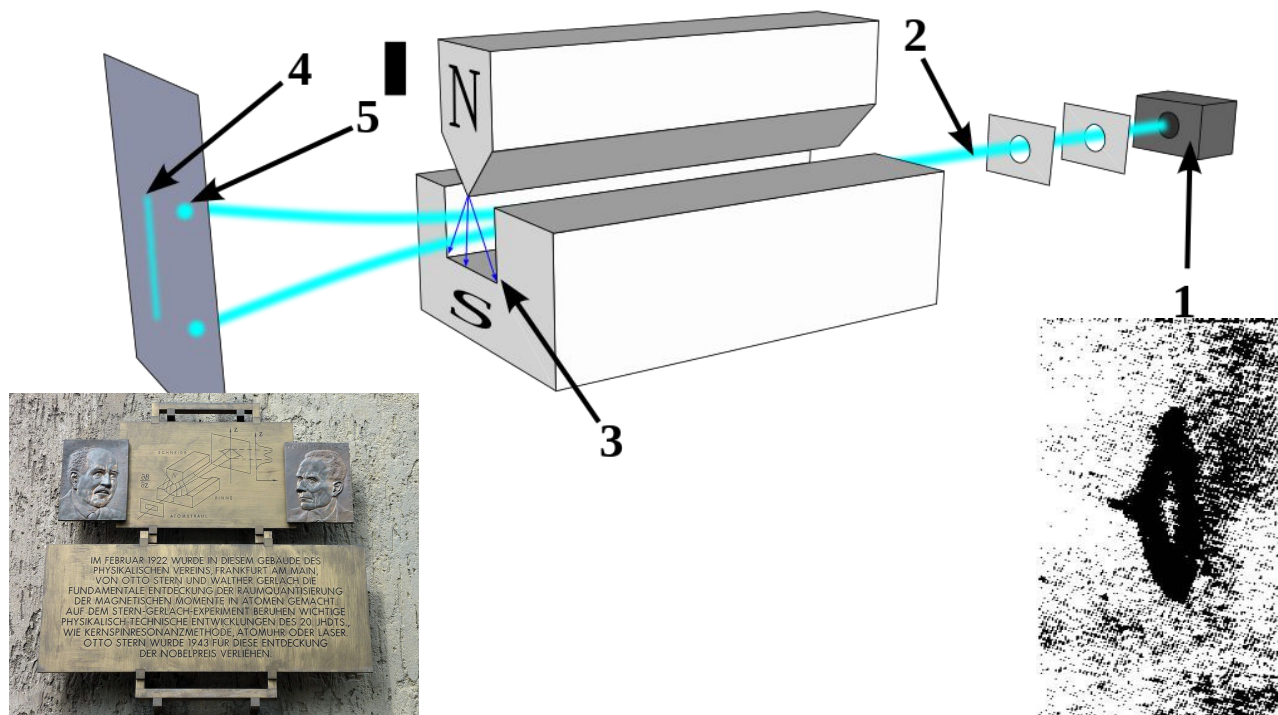


Рисунок 3: Схема опыта Штерна-Герлаха. С сайта [3]. На вставках: мемориальная табличка на корпусе Университета Франкфурта-на-Майне с сайта [5] и фотопластинка с результатами опыта с атомами серебра из нобелевской лекции [6].

В этом опыте (рисунок 3) атомы пролетают в неоднородном магнитном поле, в котором на них действует сила, направление которой зависит от ориентации магнитного момента. Опыты Штерна-Герлаха [4] были сделаны с атомами серебра, в котором всего один электрон на внешней оболочке. Опыт показал, что пучок атомов серебра в неоднородном поле расщепляется на *две* компоненты. Это одновременно подтверждает и правила квантования полного момента (есть только дискретные значения возможной проекции магнитного момента, см. демонстрационное видео на сайте [3]), и то, что полный момент атома серебра равен $\frac{1}{2}$, что (как мы сейчас понимаем, Штерн этого в тот момент не знал) доказывает существование у электрона полуцелого спина.

Опыт типа Штерна-Герлаха с ультрахолодными газами

Отметим вкратце один из современных экспериментов, в котором объединяются многие из изученных нами концепций [7].

При разговоре о давлении света мы обсуждали понятие «оптического пинцета» - ловушки, в которой взаимодействие с электромагнитным полем электромагнитной волны может удерживать микрообъекты и контролируемо оперировать ими. По этому же принципу можно создать ловушку для атомов — при специально подобранной конфигурации скрещенных

лазерных пучков атомам выгодно находиться в области их пересечения.

На языке квантовой механики это означает, что в области пересечения пучков образуется *потенциальная яма*. В этой яме у атомов есть дискретные уровни энергии, причём у экспериментаторов есть возможность при помощи настройки параметров пучка регулировать свойства этой ямы. Не вдаваясь в тонкости (за которые были присуждены Нобелевские премии 1997 и 2001 годов) отметим, что удерживающие силы малы, поэтому оказывается мал квант энергии $\hbar\omega$ и для наблюдения квантовых эффектов необходимо работать при очень низких температурах. Пойманные в такие ловушки атомы охлаждаются до температур порядка нанокельвин, всего на 10^{-9} градуса выше абсолютного нуля.

В рассматриваемых экспериментах использовались атомы изотопа ^{87}Rb . Рубидий это щелочной металл, у него есть один электрон на внешней оболочке, спин которого равен $1/2$. Из-за нечётного числа протонов и нейтронов в ядре полный спин ядра также оказывается нечётным и равным $3/2$ (величина ядерного спина для каждого изотопа может быть измерена в других опытах и известна). Слабое магнитное взаимодействие ядра и электрона (но так как речь идёт про *очень холодные* атомы этого взаимодействия достаточно чтобы преодолеть тепловой беспорядок) фиксирует антипараллельную ориентацию этих спинов, так что *полный момент* атома ^{87}Rb оказывается равен 1. Таким образом, атомы ^{87}Rb оказываются *бозонами* и на нижний энергетический уровень полученной ловушки можно поместить много атомов. В опытах с ультрахолодными газами удерживают в ловушке миллионы атомов, что конечно ничтожно мало по сравнению с числом Авогадро $N_A \approx 6 \times 10^{23}$.

Оказывается удивительным, что пойманные в ловушке атомы можно увидеть практически «глазом»: из-за взаимодействия атомов с электромагнитной волной при освещении ловушки на экране (или на матрице фотоаппарата) образуется лёгкая «тень».

Если ловушку выключить, то под действием силы тяжести атомы начнут падать вниз. Так как они очень холодные, их тепловые скорости ничтожно малы и капля не разлетается в стороны. Если падение происходит в градиенте магнитного поля, то в результате эффекта Штерна-Герлаха капля должна будет разделиться на три компоненты в соответствии с числом возможных проекций полного момента ($+1$, 0 и -1). Это и наблюдается в эксперименте (рисунок 4).

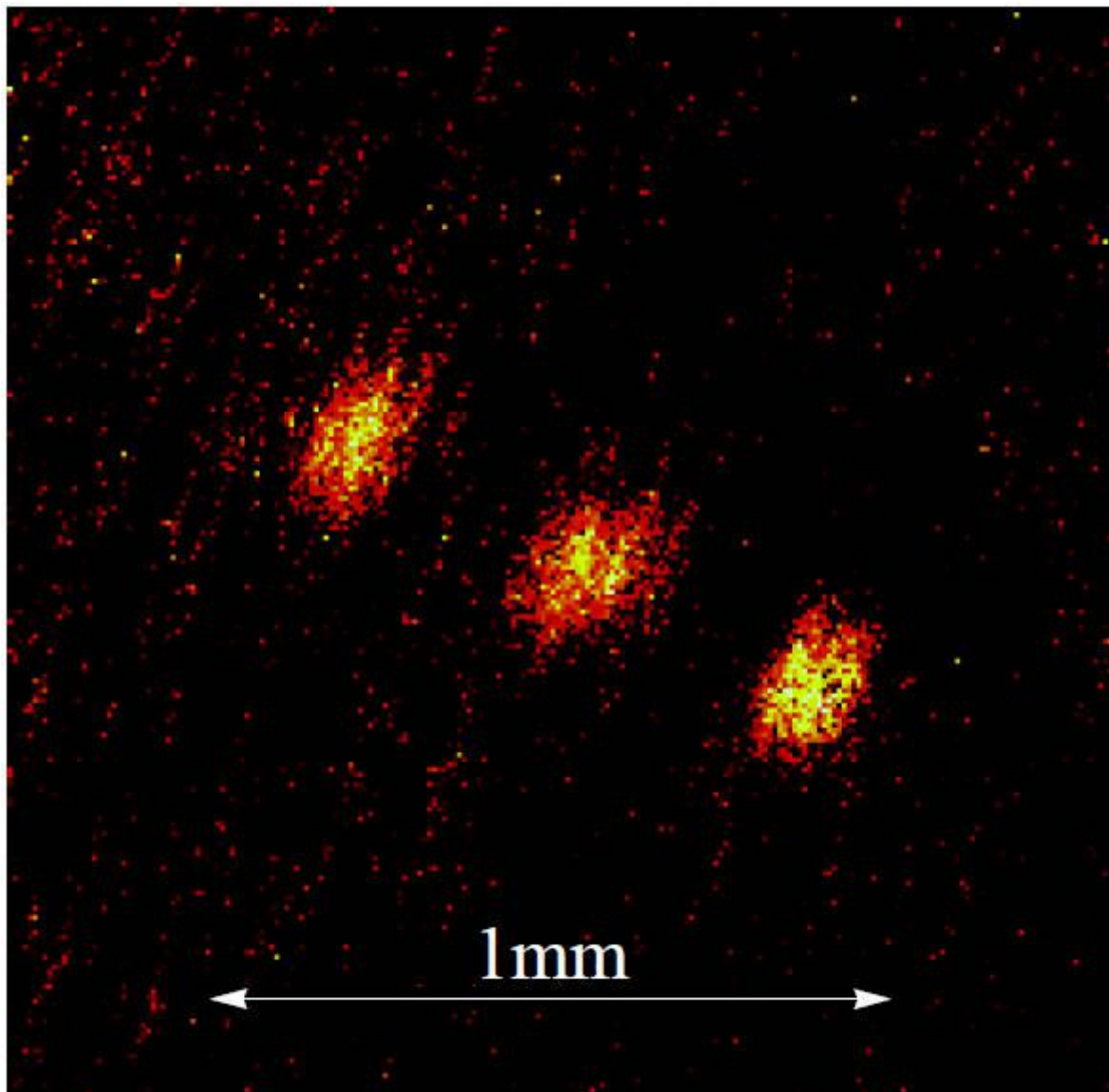


Рисунок 4: Результат опыта типа опыта Штерна-Герлаха с "каплями" ультрахолодных атомов рубидия-87. Фото сделано через 10 мс после начала падения (выключения ловушки).

Вертикальное смещение «капли» за это время $h = \frac{gt^2}{2} = 0.5 \text{ мм}$. Из работы [7].

Эффект Зеемана. Измерение магнитного поля на Солнце

Мы с самого начала сформулировали как одну из проблем классической физики существование линейчатых спектров поглощения и испускания. Как мы уже обсуждали, эти спектры связаны с дискретными уровнями энергии электронов в атоме: при переходе электрона между уровнями с чётко определённой энергией поглощается или испускается квант света с чётко определённой энергией.

Однако теперь мы знаем, что у электрона есть орбитальный и спиновый моменты вращения, с которыми связан магнитный момент электрона. В результате мы можем ожидать, что в магнитном поле некоторые уровни энергии электрона в атоме начнут расщепляться в

зависимости от проекции полного момента импульса на направление поля. А тогда расщепятся и линии спектра испускания или поглощения.

Этот эффект действительно наблюдается и называется эффектом Зеемана (Питер Зееман является нобелевским лауреатом 1902 года). Красивым применением этого эффекта оказывается возможность измерить магнитное поле на поверхности астрономического объекта: по положению спектральной линии мы можем определить, с каким элементом она связана, и таким образом прокалибровать связь расщепления спектральной линии с полем в лабораторных условиях.

Пример такого измерения на Солнце [8] показан на рисунке 5. Видно, что расщепление возникает в области солнечного пятна, что позволяет делать выводы об устройстве магнитного поля нашей ближайшей звезды.

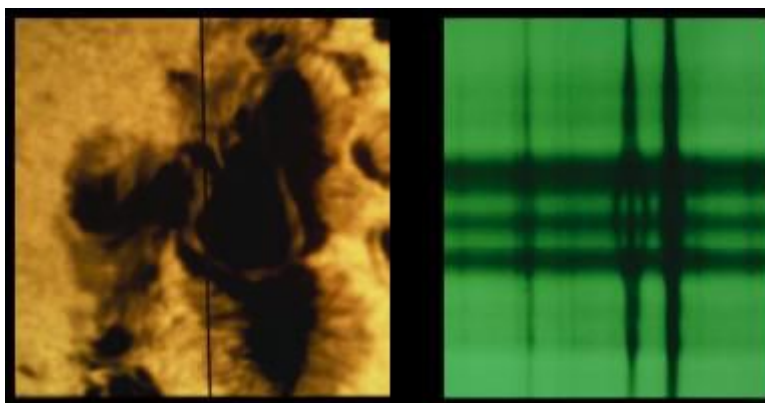


Рисунок 5: Расщепление линии поглощения железа (длина волны 525 нм) в области солнечного пятна. Слева: фотография области солнечного пятна. Справа: спектр излучения вдоль отмеченной на левом рисунке прямой. Наблюдаемое расщепление соответствует индукции магнитного поля около 0.4 Тл. С сайта [8].

Магнитный резонанс. ЯМР-томография

В оптическом эффекте Зеемана наблюдается маленькое расщепление оптической линии спектра. В то же время, возможен и переход между расщепившимися подуровнями, который конечно же будет сопровождаться излучением или поглощением кванта энергии. Энергия этого кванта окажется однако много меньше энергии фотона.

Для расщепления электронного уровня в магнитном поле характерный масштаб энергии равен $\mu_B B$, в поле 1 Тл это соответствует частотам в десятки гигагерц и длинам волн сантиметрового диапазона. Таким образом, эти кванты будут лежать в невидимой части спектра, в области СВЧ-частот.

У некоторых атомов есть свой магнитный момент у ядра, его типичная величина определяется ядерным магнетонам $\mu_{яд} = \frac{e\hbar}{2m_p}$ (та же формула, что и для магнетона Бора, только с заменой массы электрона на массу протона). Эта величина примерно в 2000 раз меньше боровского магнетона, соответственно в поле 1 Тл расстояние между подуровнями будет соответствовать частотам в десятки мегагерц — обычному, технически удобному радиодиапазону.

Явление резонансного поглощения квантов электромагнитного излучения за счёт переходов между расщеплёнными в магнитном поле подуровнями называется электронным и ядерным магнитным резонансом, соответственно. За открытие ЯМР Исаку Раби была присуждена нобелевская премия 1944 года, явление ЭПР было открыто советским физиком Н.К.Завойским в 1943 году.

Не вдаваясь в многочисленные подробности отметим применение метода ЯМР в медицине — ЯМР томографию [9] (рисунок 6). Идея метода заключена в том, что условие резонансного поглощения радиочастотного излучения $\hbar\omega = g\mu_n B$ выполнено в конкретном магнитном поле. Если объект исследования находится в однородном поле, то все ядра-зонды⁶ оказываются в резонансе одновременно и мы можем лишь увидеть возникновение резонансного поглощения. Если поместить исследуемый объект (пациента) в *неоднородное* магнитное поле, то это условие будет выполнено только в некотором слое (магнитное поле меняется непрерывно). Повторив этот опыт с разной ориентацией слоёв (с разными направлениями градиента поля) можно получить набор данных, позволяющий восстановить информацию о распределении зондов в объекте исследования. Эти данные могут включать в себя не только и не столько величину поглощения, но и другие характеристики магнитного резонанса, в первую очередь время релаксации. Получаются характеристики, различные для разных тканей, что позволяет расшифровать структуру тканей. Эта расшифровка данных требует компьютерного анализа, поэтому распространение томографических методов (не только ЯМР, но и рентгеновской, позитронной томографии и других) стало возможно только с появлением доступных мощных компьютеров. Расшифрованная картина оказывается трёхмерной, что позволяет более точно диагностировать разные заболевания.

Таким образом, ЯМР-томограф включает в себя систему для создания однородных и неоднородных магнитных полей, колебательный контур радиочастотного диапазона — и внутрь всей этой системы нужно поместить пациента. Получается довольно большая установка, которую однако можно встретить во многих больницах. Забегая вперёд добавим, что в этих томографах часто используются сверхпроводящие магниты (для полей выше 1 Тл) — так что на пользу здоровью работает сразу два квантовых эффекта: ЯМР и сверхпроводимость.

6 ЯМР-томографию часто делают на протонах (ядрах водорода), входящих в состав всех тканей. При некоторых исследованиях используют специально вводимые ядра (контрастное вещество). Например, для исследования лёгких во вдыхаемый воздух добавляют небольшое количество гелия-3. При исследовании каких-то заболеваний могут использовать специально добавляемые к лекарственным формам изотопы-зонды, которые собираются в исследуемых тканях.

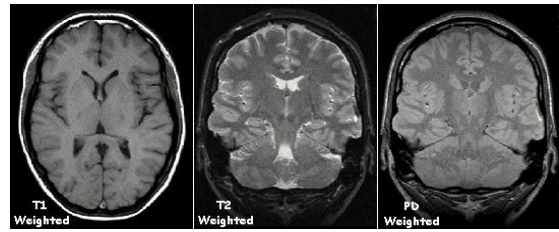


Рисунок 6: Слева: Современный ЯМР-томограф с полем до 3 Тл. Справа: примеры ЯМР-томограмм мозга с разной обработкой сигнала. С сайта [9].