



NATIONAL RESEARCH
UNIVERSITY

Майнор “Мир глазами физиков”

Весна 2019

Введение в квантовую физику

Лекция 12:

Макроскопические квантовые

явления II:

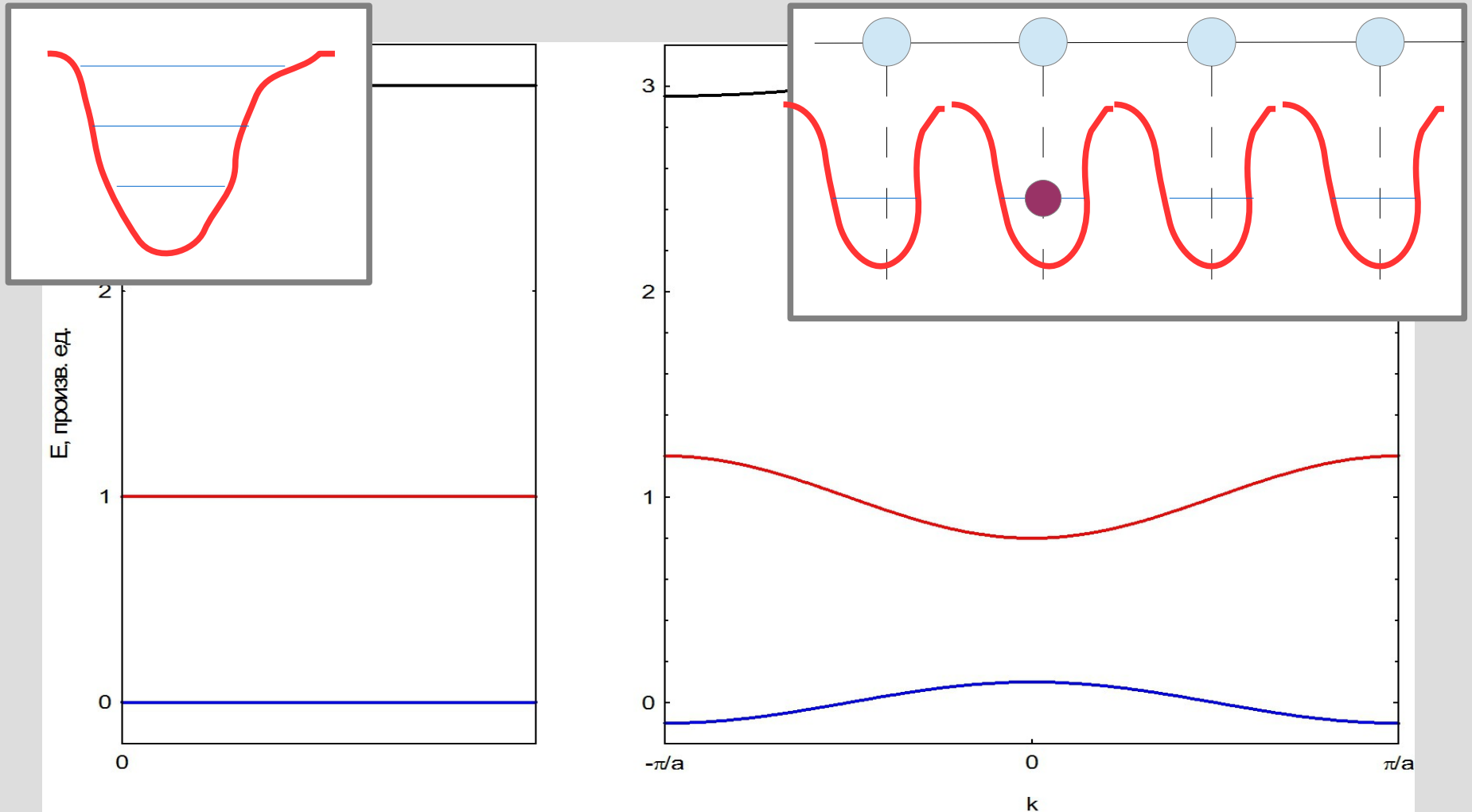
полупроводники,

двумерный электронный газ,

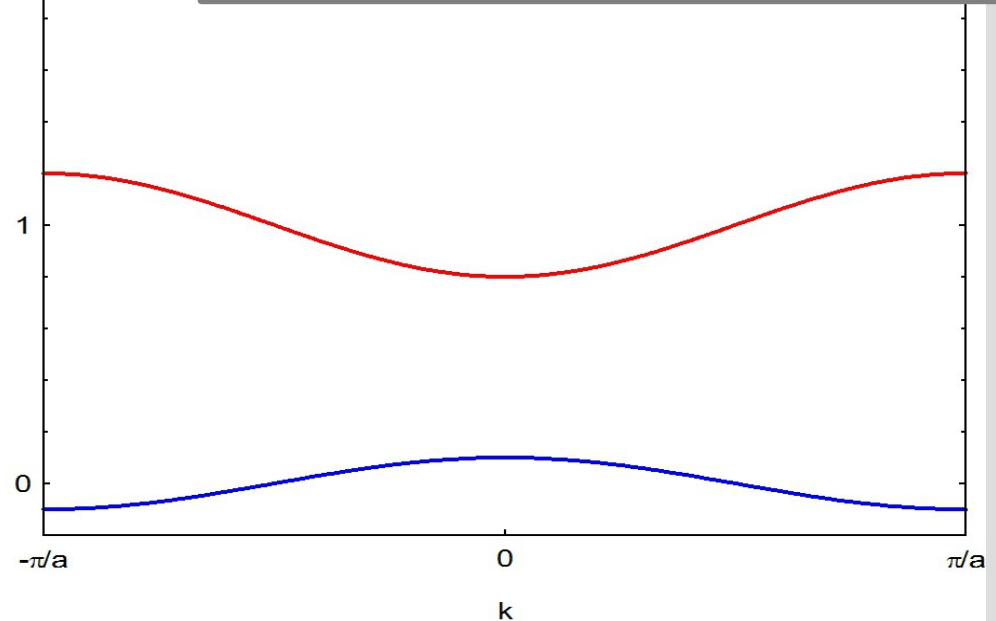
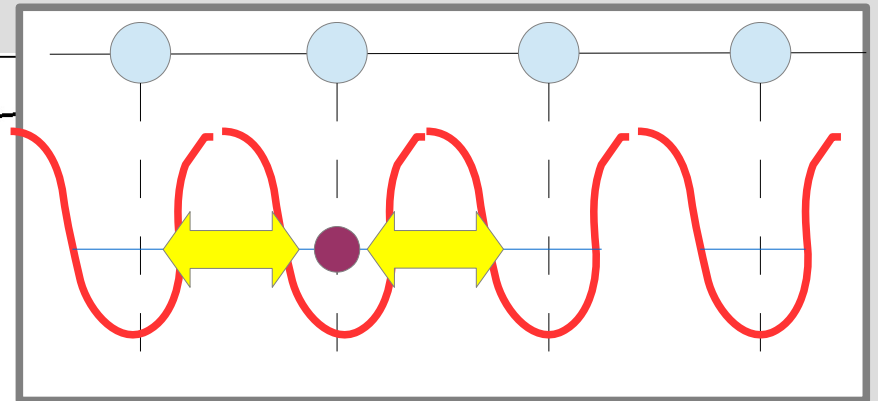
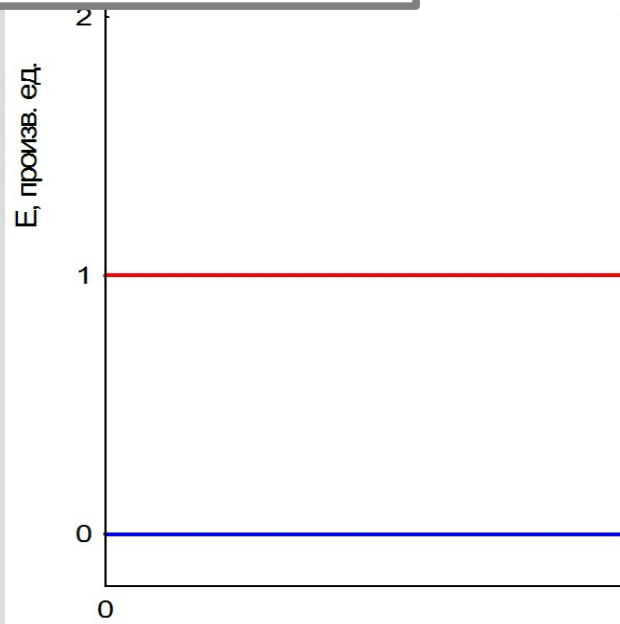
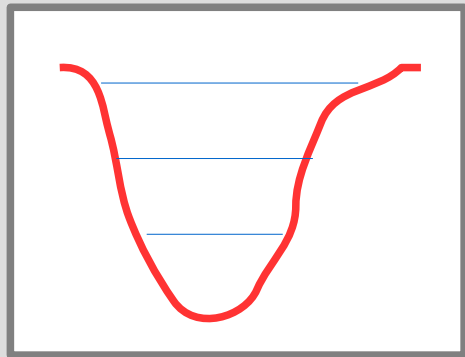
фононы

Часть 1. Полупроводники

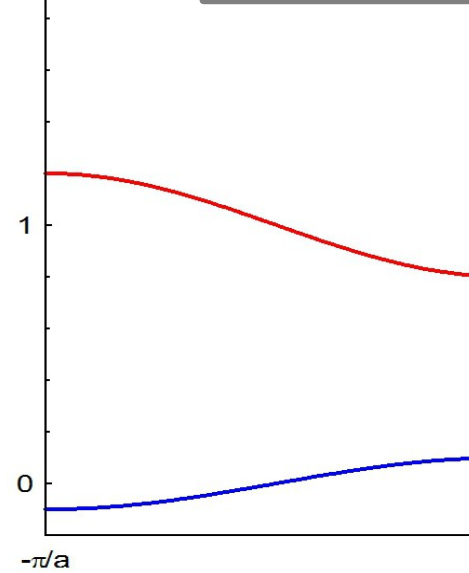
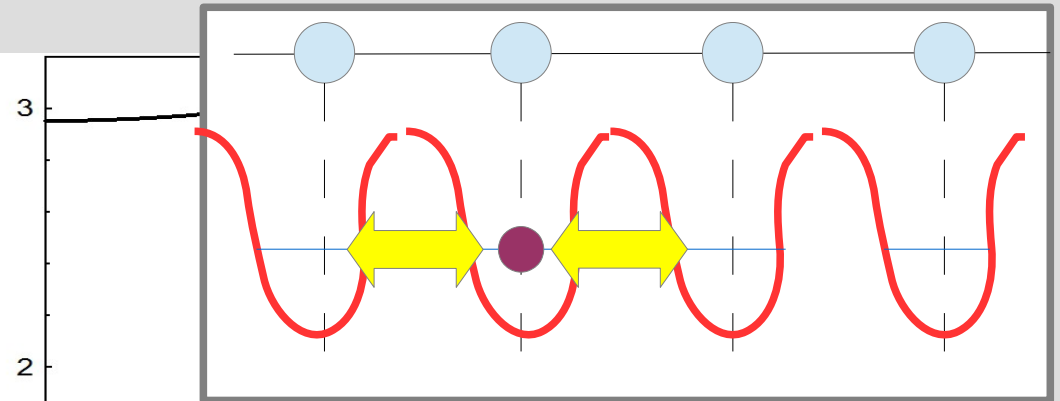
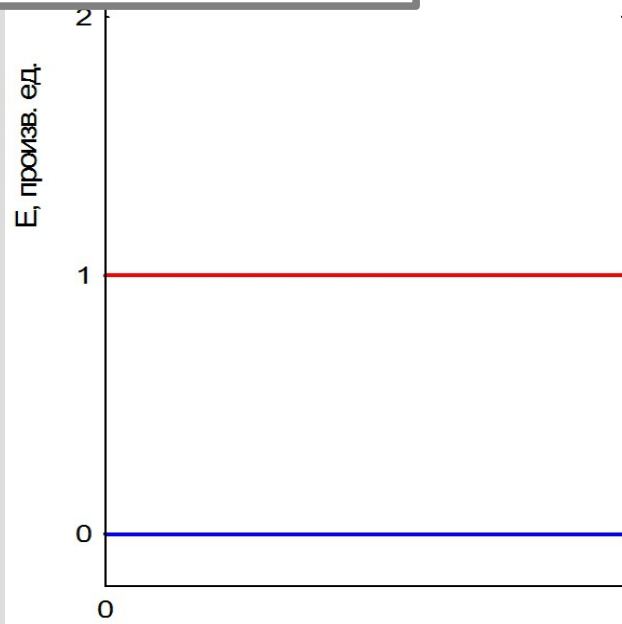
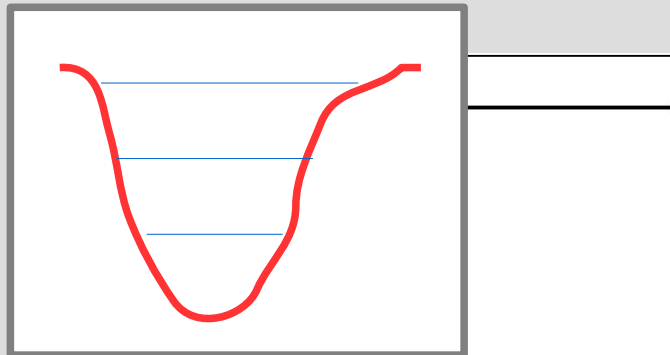
Энергетические зоны в кристалле



Энергетические зоны в кристалле



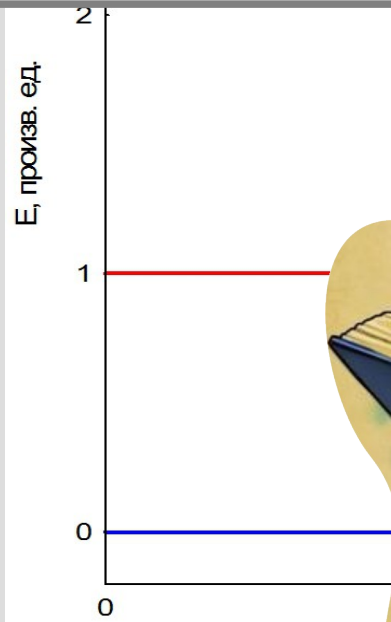
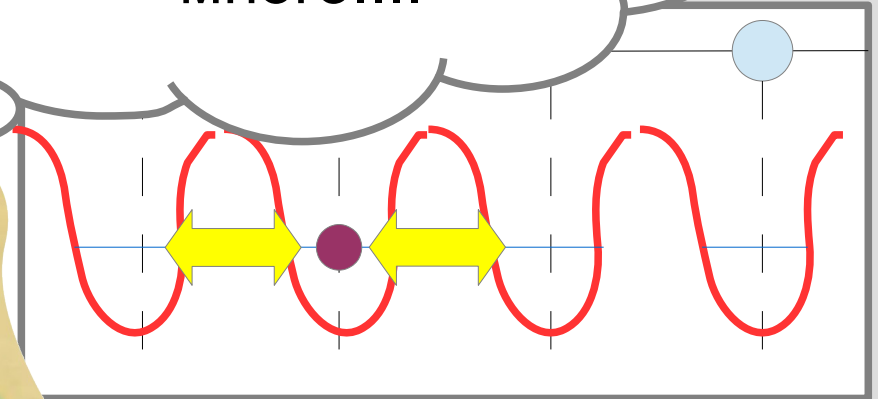
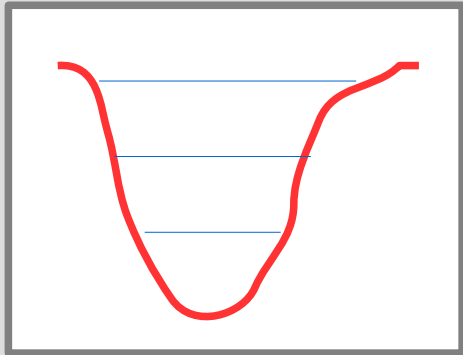
Энергетические зоны в кристалле



электрон приобретает подвижность
= становится делокализованным
энергия зависит от импульса

Энергетические кристаллы

Но ведь
электронов
МНОГО....

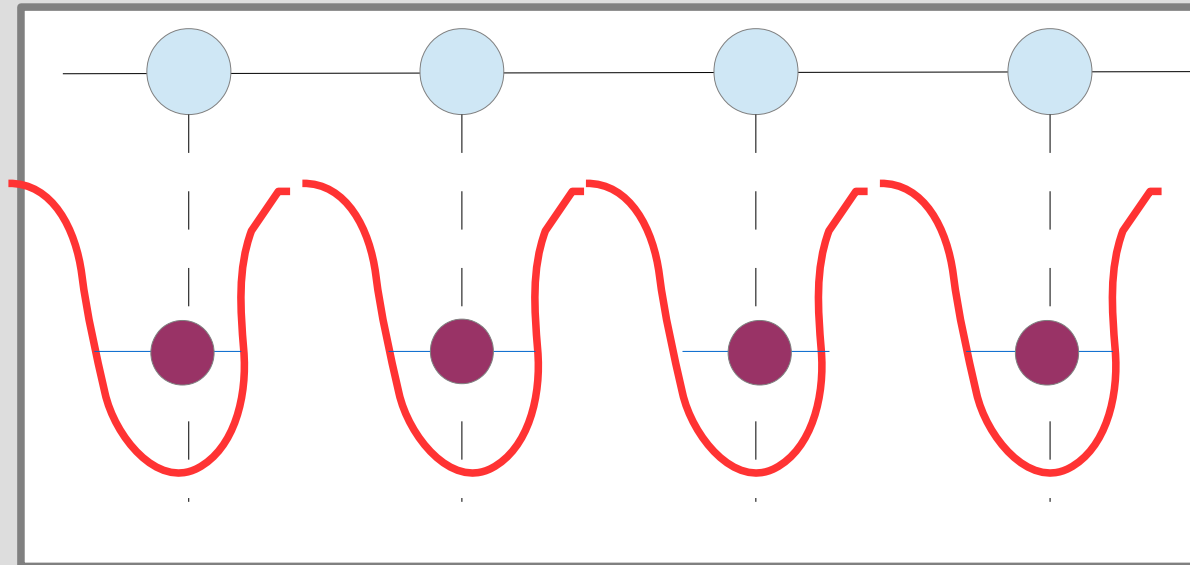
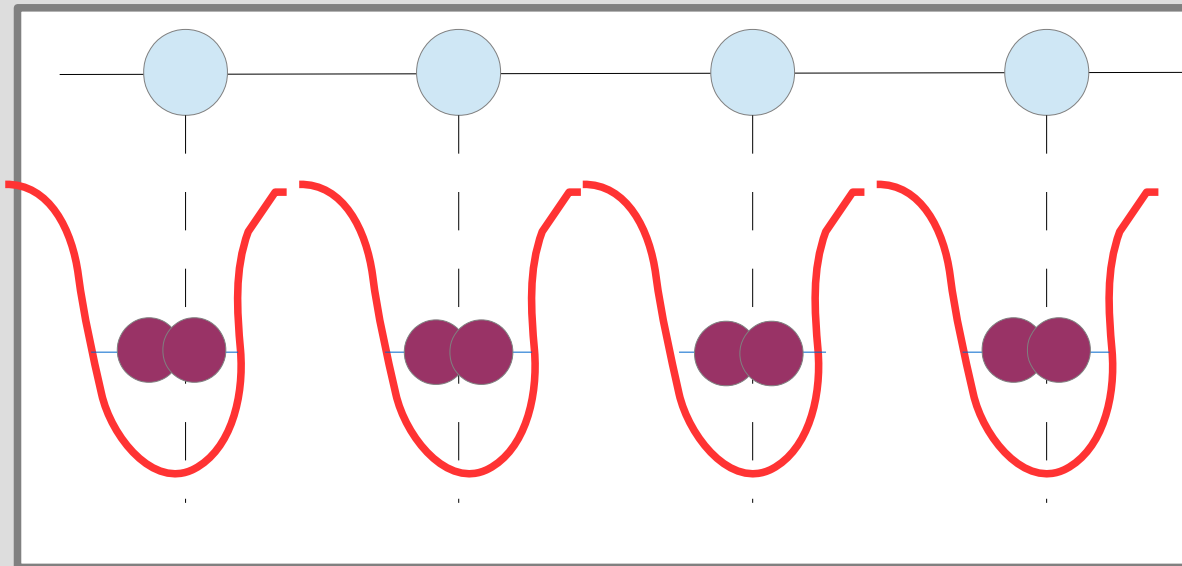


электрон
приобретает
подвижность

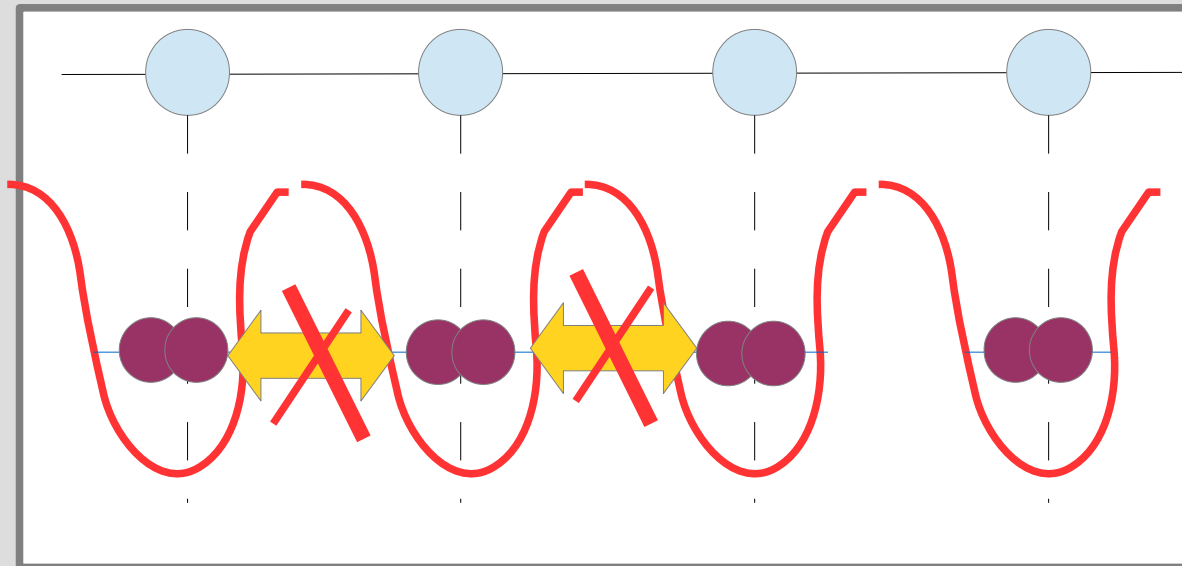
= становится
делокализованным

энергия зависит от
импульса

Энергетические зоны в кристалле



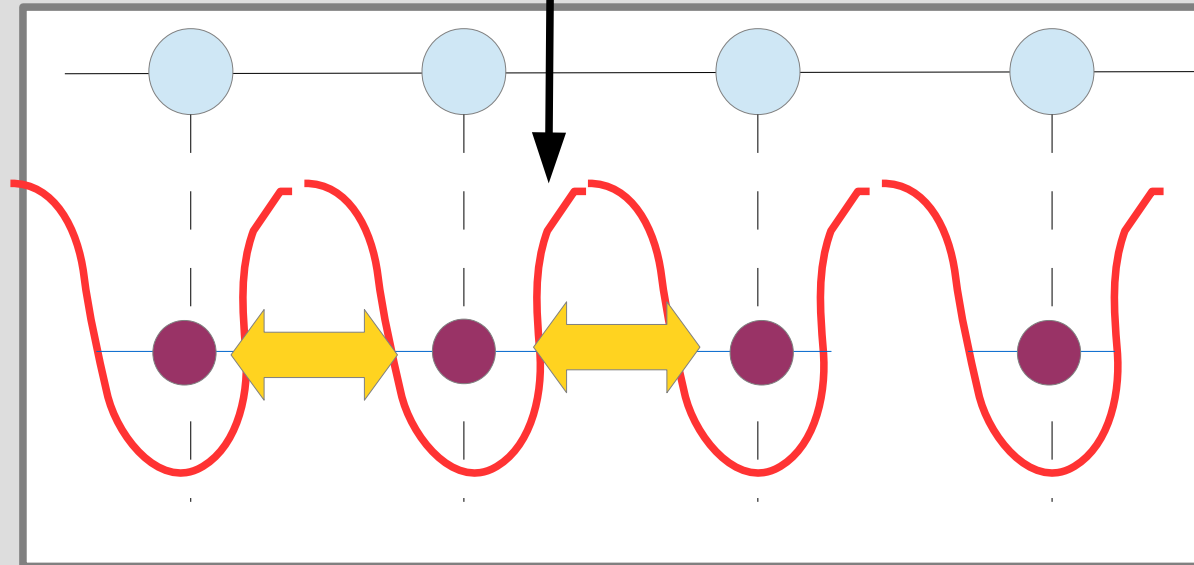
Энергетические зоны в кристалле



диэлектрик

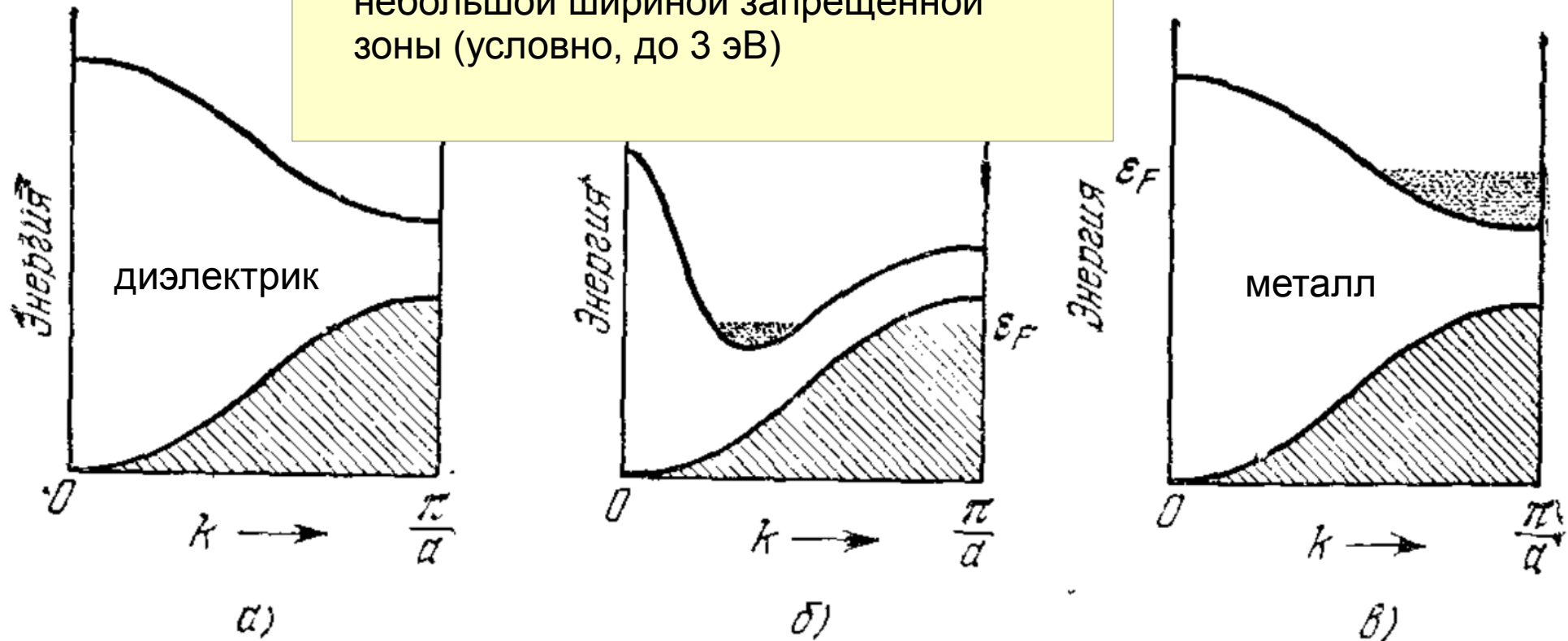


металл



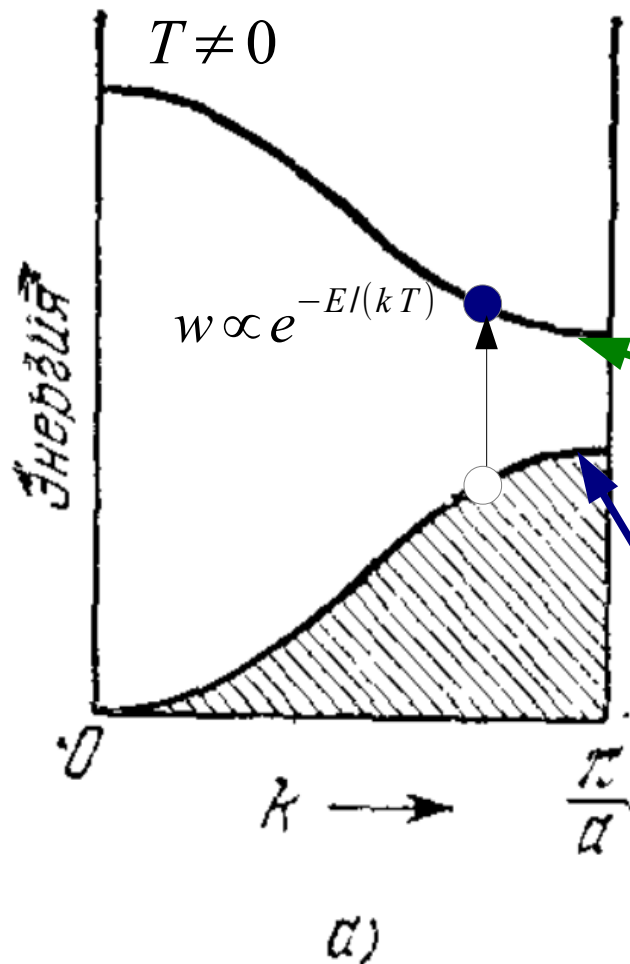
Полупроводники

Полупроводник – это диэлектрик с небольшой шириной запрещённой зоны (условно, до 3 эВ)



Варианты заполнения электронных состояний (схематически). Занятые состояния показаны штриховкой. (а) Случай полностью заполненной зоны, диэлектрик. (б) Случай перекрывающихся зон, металл или полуметалл. (в) Случай частичного заполнения последней зоны, металл. Из книги Киттеля

Электроны и дырки в полупроводнике.



$$T \sim 300\text{K} \ll \Delta \sim 0.2 \dots 1 \text{ эВ} \simeq 2000\text{K} \dots 10000\text{K}$$

- 1) Количество электронов и вакансий малы
- 2) В равновесии электроны и вакансии образуются вблизи квадратичных экстремумов

$$\varepsilon_e(\vec{q}) = E_g + \frac{\hbar^2 \vec{q}^2}{2 m_e}$$

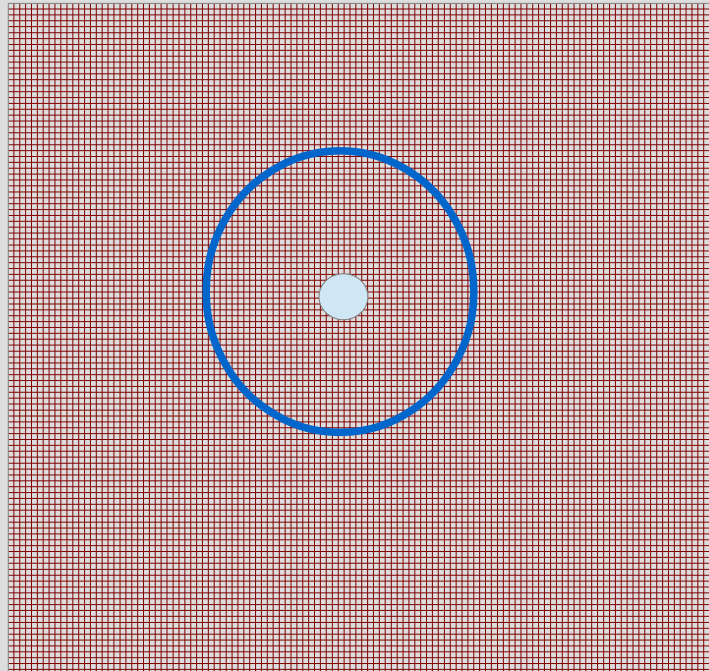
$$\varepsilon(\vec{q}) \approx \frac{\hbar^2 \vec{q}^2}{2 M}$$

$$M < 0$$

Вектор q отсчитывается от экстремума.

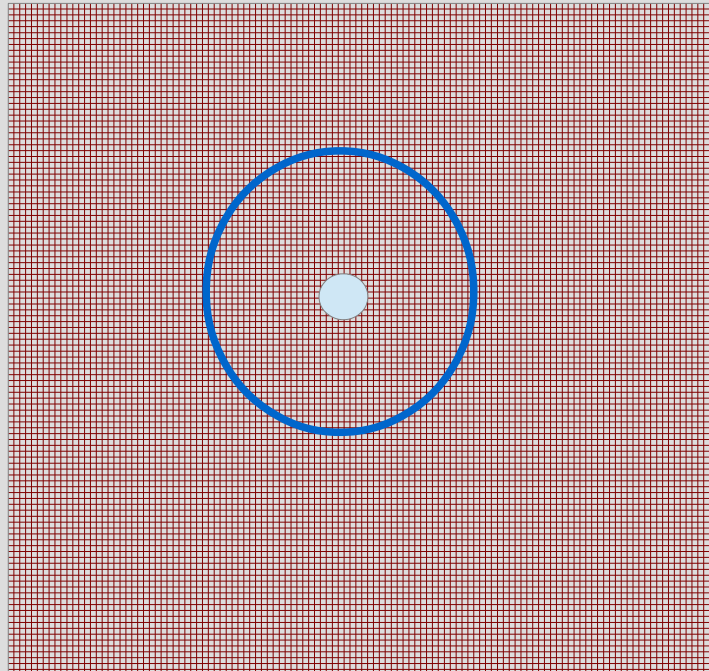
На основе рис. из книги Ч.Киттеля

Примесной атом в полупроводнике



$$\varepsilon \simeq 10$$
$$m \simeq m_0/10$$

Примесной атом в полупроводнике

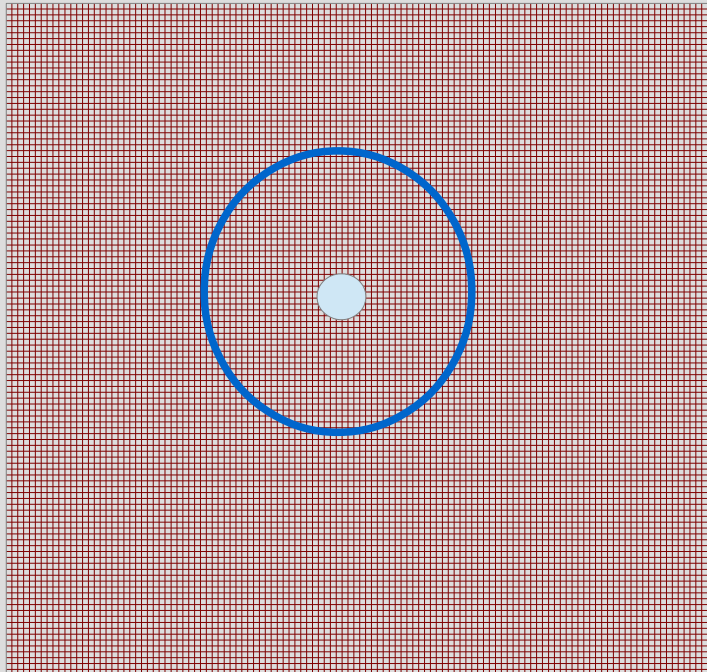


$$\varepsilon \simeq 10$$
$$m \simeq m_0/10$$

$$Ry = \frac{1}{2} \frac{k m e^4}{\hbar^2} = 13.6 \text{ эВ}$$

$$r = \frac{\hbar^2}{k m e^2} \approx 0.5 \text{ \AA}$$

Примесной атом в полупроводнике



$$Ry_{eff} = \frac{1}{2} \frac{k}{\hbar^2} \frac{e^4}{\epsilon^2} \frac{m_0}{10} \simeq \frac{Ry}{1000} \simeq 10 \text{ мэВ}$$

$$m \simeq m_0 / 10$$

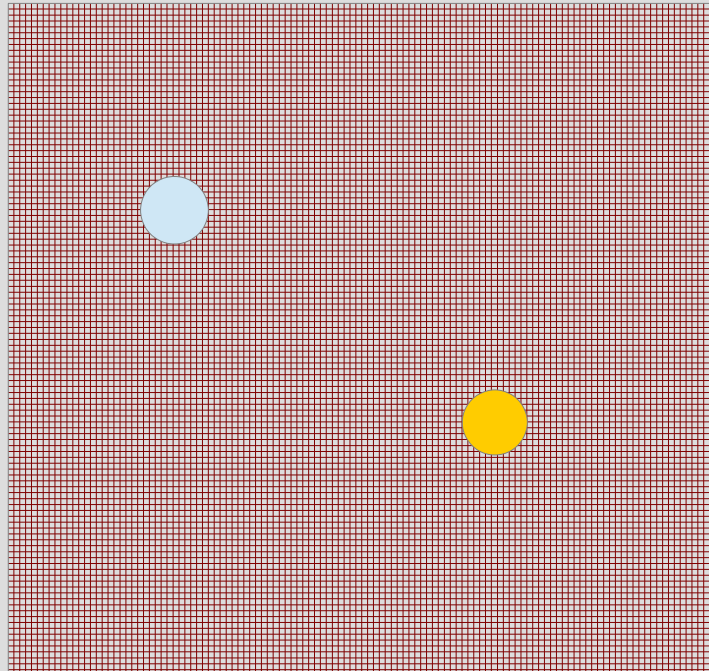
$$Ry = \frac{1}{2} \frac{k m e^4}{\hbar^2} = 13.6 \text{ эВ}$$

$$r = \frac{\hbar^2}{k m e^2} \approx 0.5 \text{ \AA}$$

$$r_{eff} = \frac{\hbar^2}{k} \frac{10}{m_0} \frac{\epsilon}{e^2} \simeq 100 r \simeq 10 \text{ нм}$$

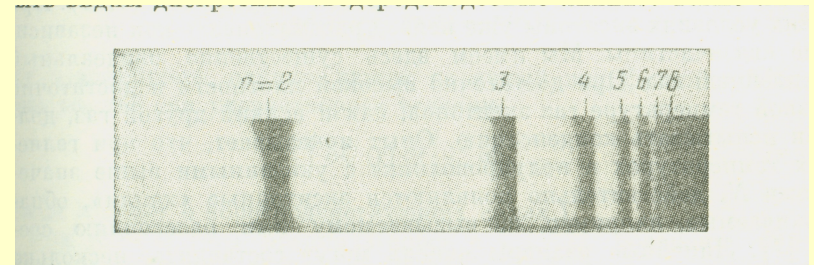
Экситон в полупроводнике

Связанное состояние электрона и дырки – аналог атома позитрония.

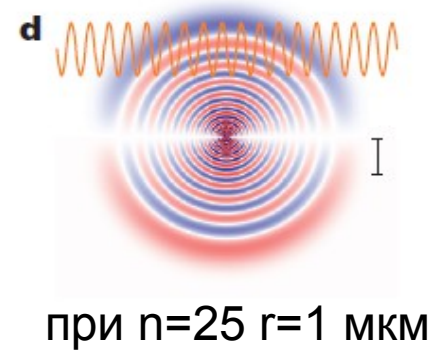
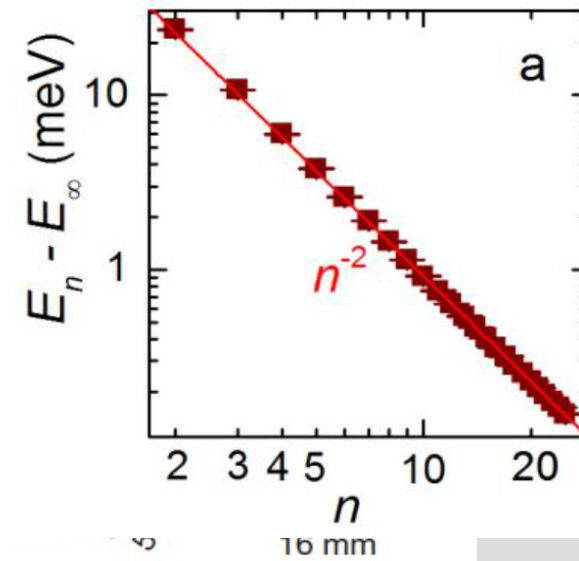
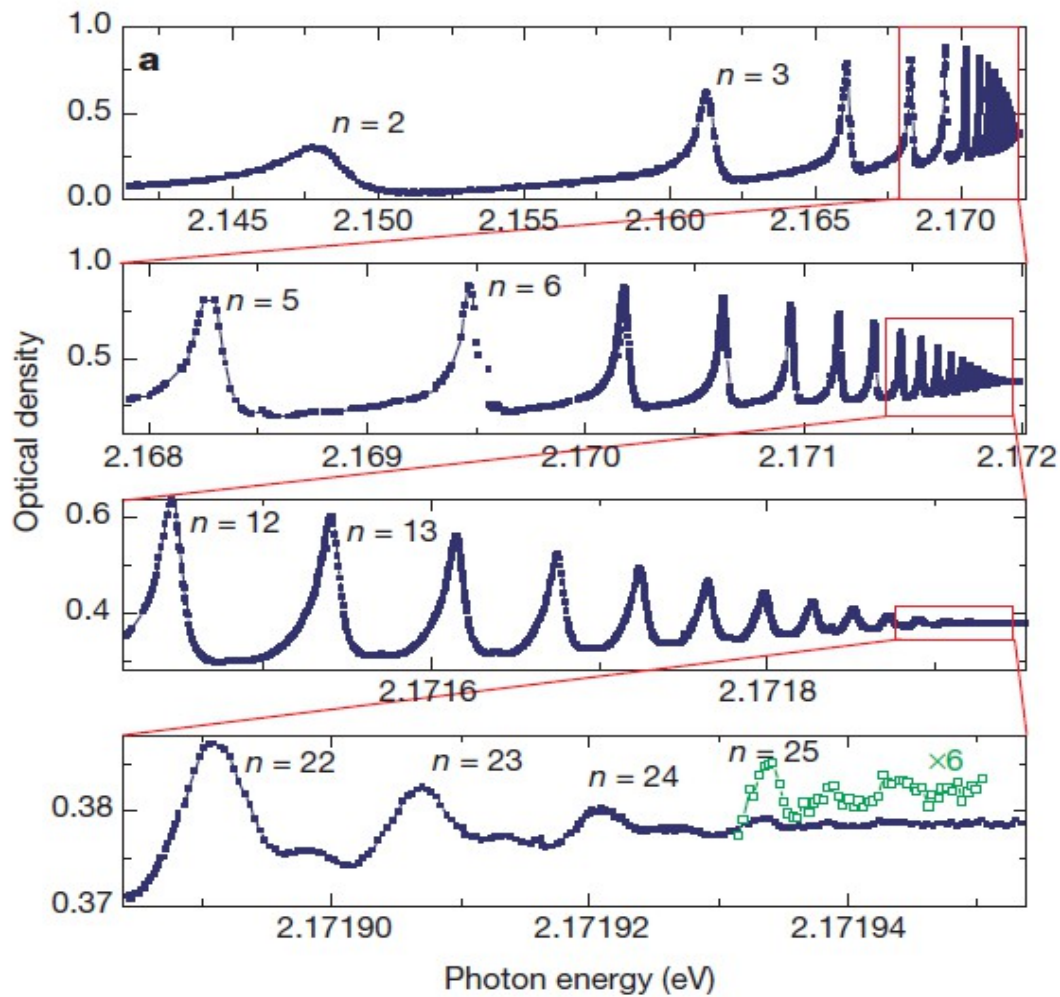


$$E_n = -\frac{1}{\epsilon^2} \frac{m_e m_h}{m_0 (m_e + m_h)} R_y \frac{1}{n^2}$$

Рождение связанной пары требует меньшей энергии

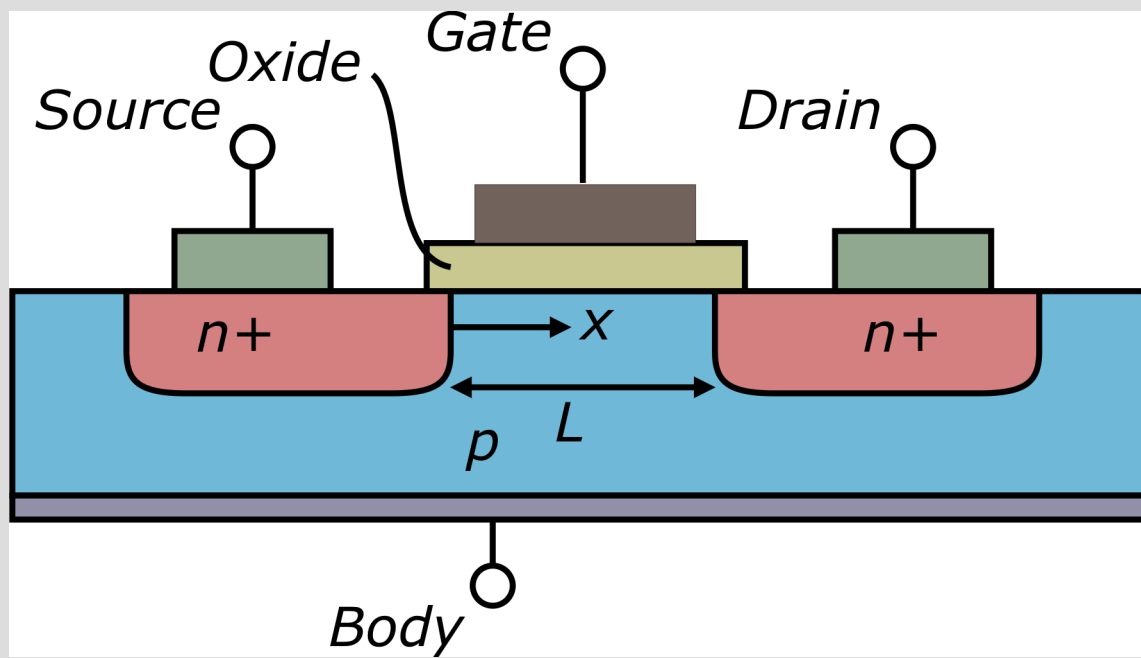


“State of the art” эксперимент

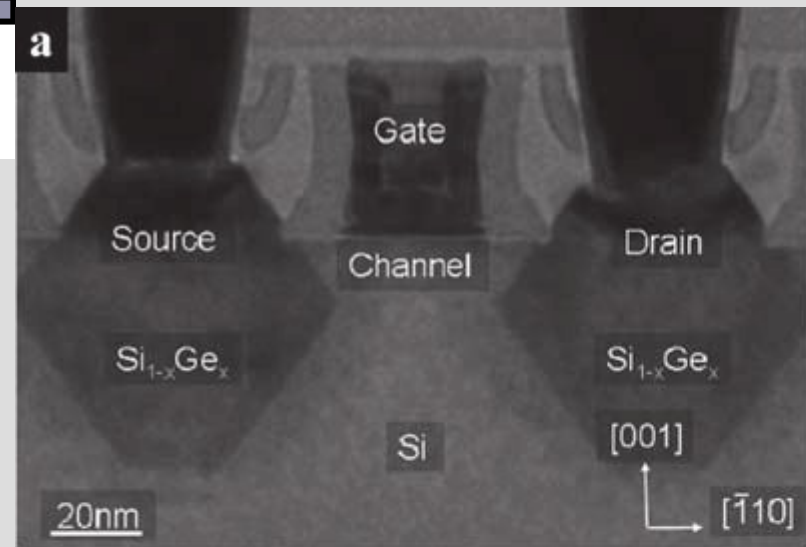


Часть 2. Низкоразмерные системы

Полевой транзистор



https://www.researchgate.net/figure/a-Bright-field-image-of-the-45-nm-technology-p-MOSFET-structure-of-a-commercial_fig10_228335103



wikipedia.org, Field-effect transistor, 2017, https://en.wikipedia.org/wiki/Field-effect_transistor

Создание потенциальной ямы в полевом транзисторе

При положительном потенциале затвора электроны притягиваются к затвору в направлении Z, но остаются свободными в плоскости XY

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + (W - U) \Psi = 0$$

$$U = \begin{cases} \infty, & z < 0 \\ eEz, & z > 0 \end{cases}$$

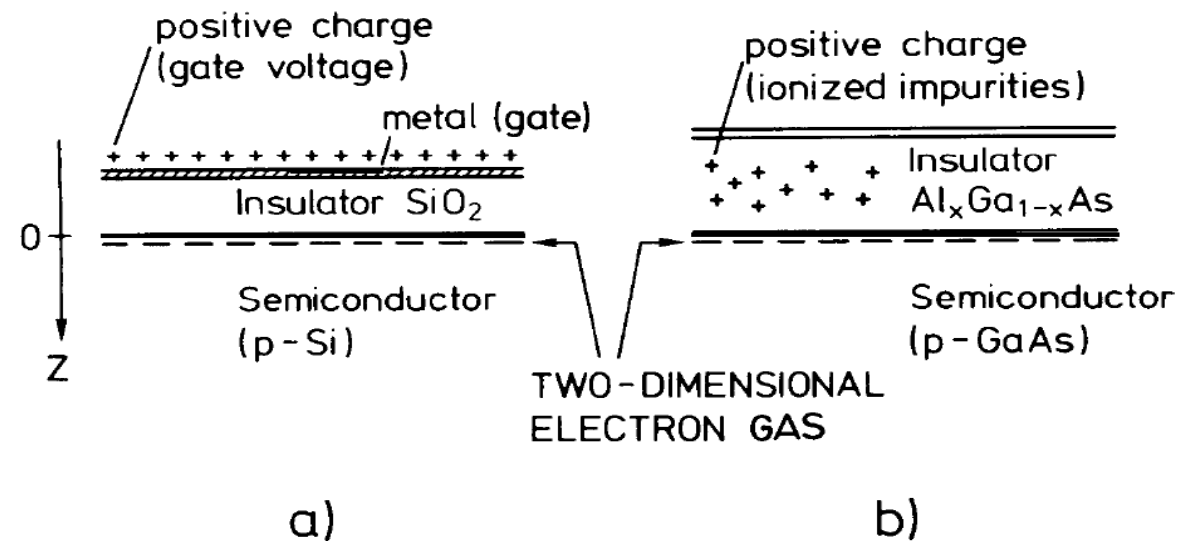


Fig. 1. A two-dimensional electron gas (2DEG) can be formed at the semiconductor surface if the electrons are fixed close to the surface by an external electric field. Silicon MOSFETs (a) and GaAs-Al_xGa_{1-x}As heterostructures (b) are typical structures used for the realization of a 2DEG.

Создание потенциальной ямы в полевом транзисторе

При положительном потенциале затвора электроны притягиваются к затвору в направлении Z, но остаются свободными в плоскости XY

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + (W - U) \Psi = 0$$

$$U = \begin{cases} \infty, & z < 0 \\ eEz, & z > 0 \end{cases}$$

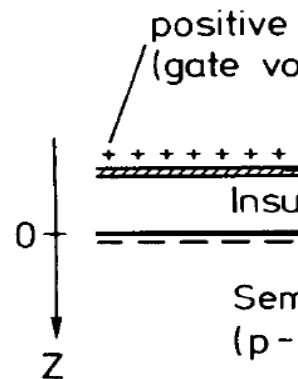


Fig. 1. A two-dimensional electron gas is formed in a GaAs-Al_xGa_{1-x}As heterostructure. The positive gate voltage attracts electrons to the interface, where they are confined in the z-direction.

Характерный квант энергии

$$E = \frac{p^2}{2m} + eEz$$

$$pz \simeq \hbar$$

$$E \simeq eEz + \frac{\hbar^2}{2mz^2}$$

$$z_0 \simeq \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{meE}}$$

$$E \simeq \sqrt[3]{\frac{(\hbar e E)^2}{m}}$$

Создание потенциальной ямы в полевом транзисторе

При положительном потенциале затвора электроны притягиваются к затвору в направлении Z, но остаются свободными в плоскости XY

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + (W - U) \Psi = 0$$

$$U = \begin{cases} \infty, & z < 0 \\ eEz, & z > 0 \end{cases}$$

Характерный квант энергии

$$E = \frac{p^2}{2m} + eEz$$

$$pz \simeq \hbar$$

positive
/(gate vo

$$1 \text{ В/мкм} = 10^6 \text{ В/м}$$

$$E \sim \sqrt[3]{\frac{10^{-68} \cdot 10^{-38} \cdot 10^{12}}{10^{-30}}} = \sqrt[3]{10^{-64}} \sim 10^{-21} \text{ (Дж)}$$

поперечное движение “вымерзает” при ~100К

$$E \simeq \sqrt[3]{\frac{(\hbar e E)^2}{m}}$$

Fig. 1. A two-dimensional electron gas is formed in a GaAs-Al_xGa_{1-x}As heterostructure.

Немного из электричества: классический эффект Холла

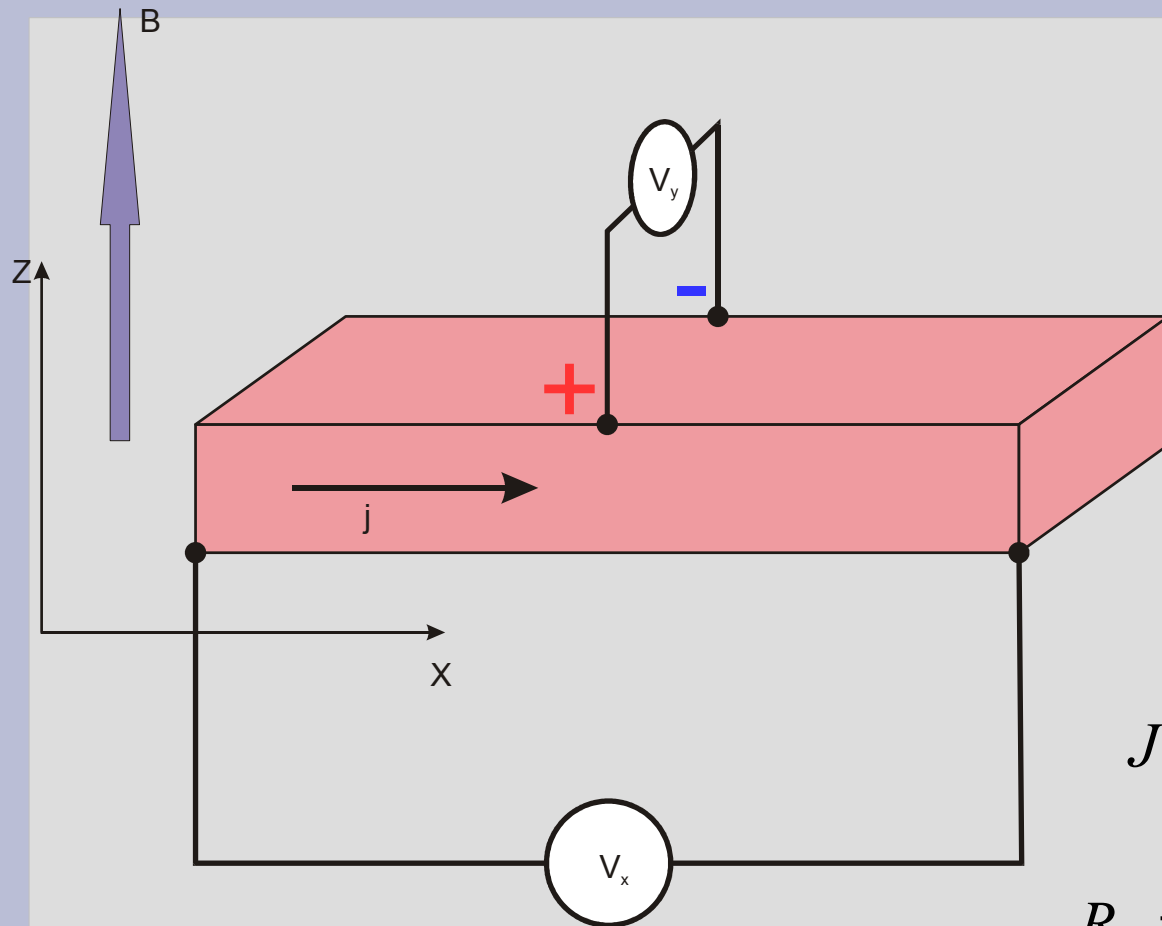


Схема опыта по измерению эффекта Холла.

для свободного электрона:

$$m \vec{a} = q \vec{E} + q \vec{V} \times \vec{B}$$

$$OY : q \frac{U_y}{L_y} = q B V_x \text{ (без знака)}$$

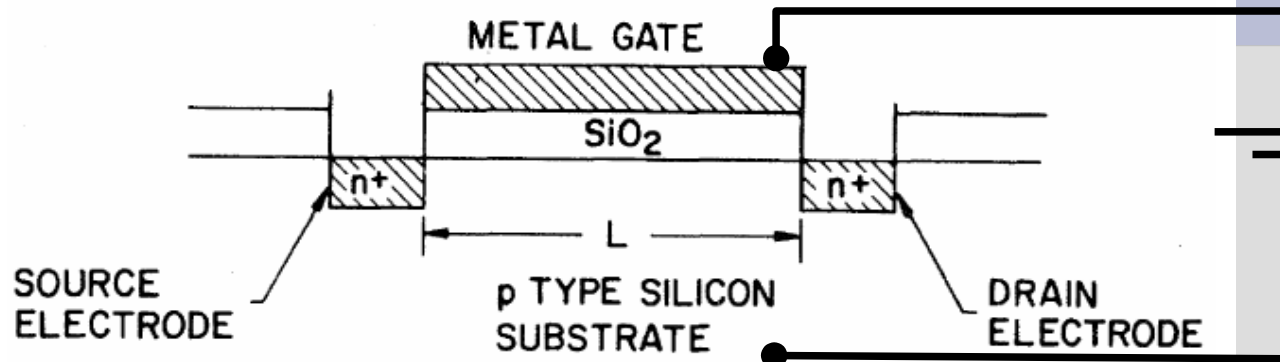
$$J_x = q \frac{V_x}{L_x} n L_x L_y L_z = q V_x \times n L_y L_z$$

$$R_H = \frac{U_y}{J_x} = \frac{B V_x L_y}{q V_x \times n L_y L_z} = B \times \frac{1}{q (n L_z)}$$

холловское
сопротивление

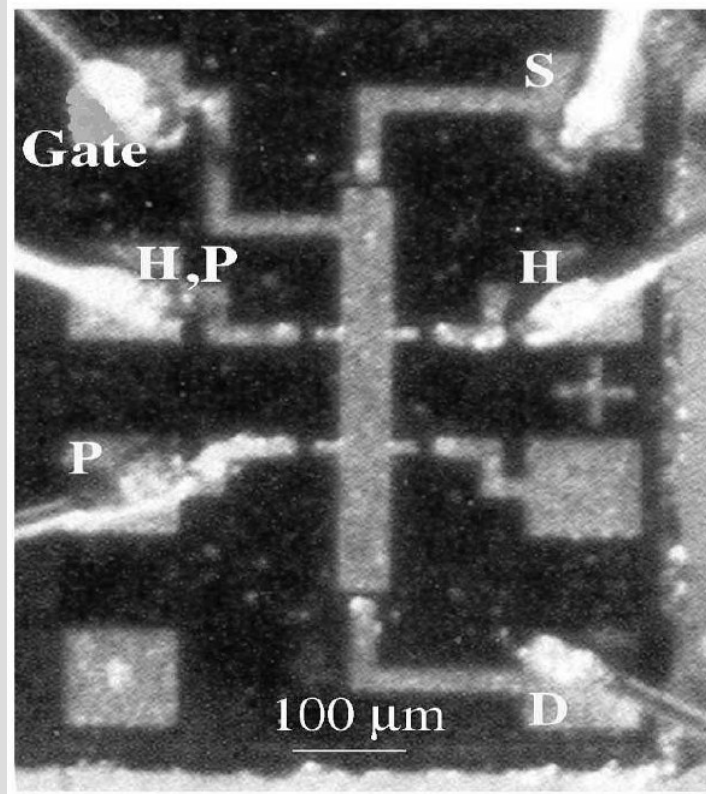
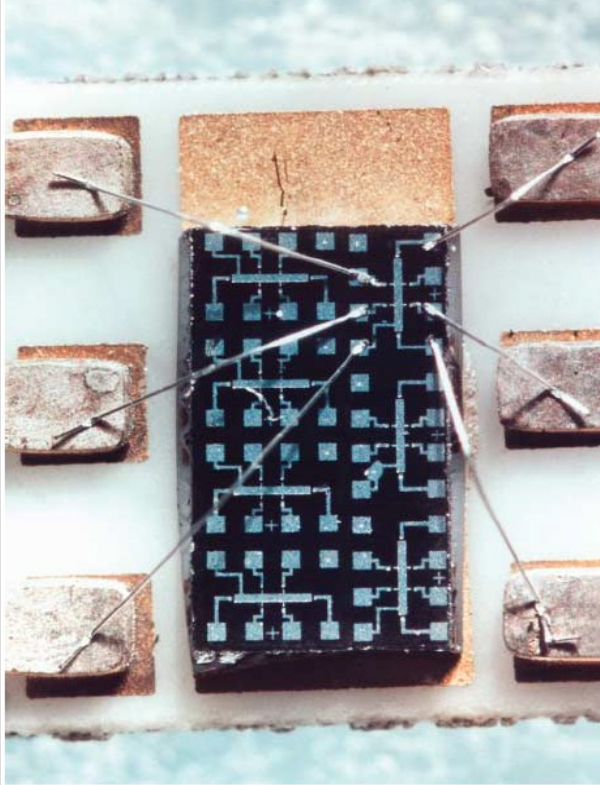
поверхностная
плотность

Немного из электроники



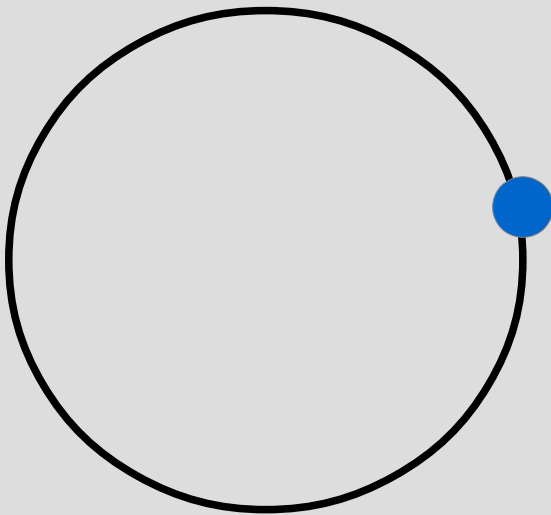
Приложением напряжения к затвору МОП-транзистора создаётся потенциальная яма для электронов и возникает двумерный газ электронов

Основы физики полупроводниковых структур пониженной размерности, http://ftn-mipt.itp.ac.ru/attachments/123_Dolgoplov.pdf



Слева: чип с кремниевыми МОП транзисторами, используемый в опытах по квантовому эффекту Холла. Справа: увеличенное изображение одного из транзисторов с обозначением используемых электродов (H — измерение холловского напряжения, P — измерение продольного напряжения, Gate — затвор, S — исток, source, D — исток, drain).

Сила Лоренца+постулат Бора



$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{V^2}{R} = q V B \\ m V R = \hbar \end{array} \right.$$

$$\frac{\hbar}{R^2} = q B$$

$$\pi R^2 = \frac{\pi \hbar}{q B}$$

Площадь «занимаемая»
одним электроном, по
порядку величины

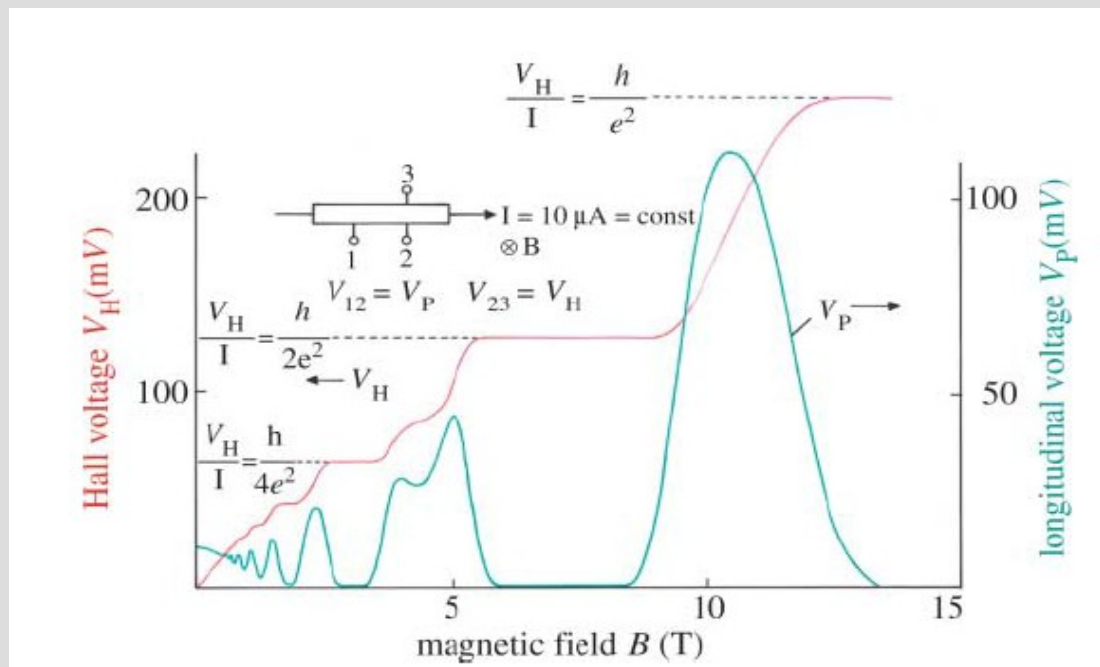
$$n_0 = \frac{e B}{h}$$

Точный ответ для поверхностной концентрации (если всё строго и правильно считать), при которой такие орбиты электронов займут всю площадь проводника

Двумерный электронный газ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Достижимые концентрации: 10^{13} 1/cm^2

В поле около 10 Тл циклотронные орбиты “замостят” весь образец и дрейфовое движение электронов станет невозможно!



$$R_H = \frac{B}{e n_s}$$

$$n_0 = \frac{e B}{h}$$

$$n = N n_0$$

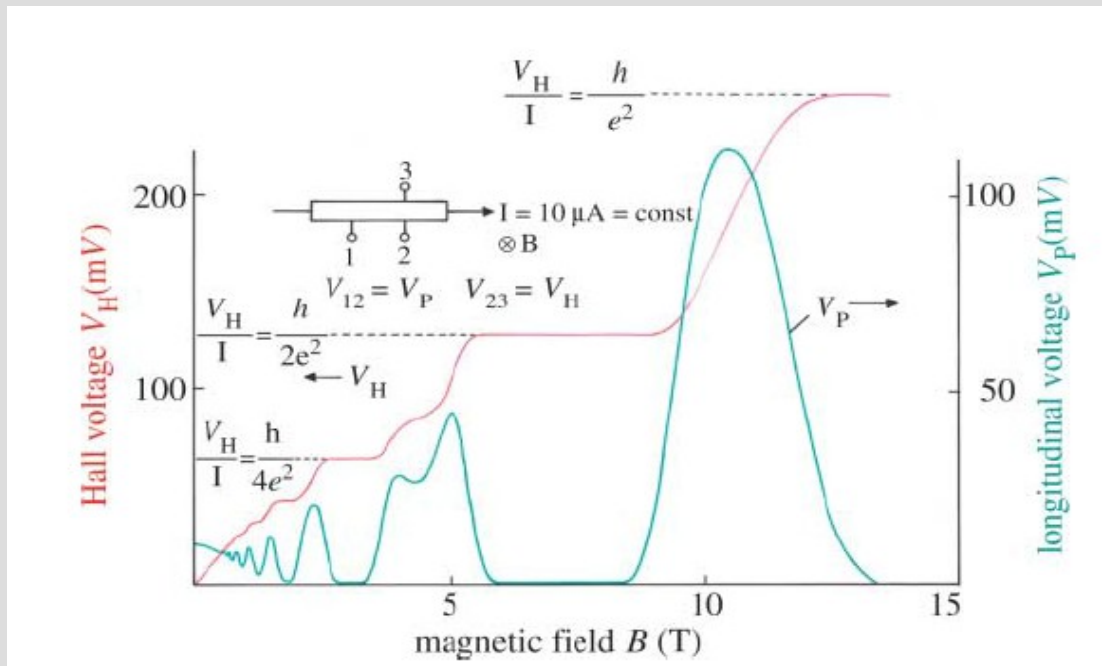
$$R_H = \frac{1}{N} \frac{h}{e^2}$$

Зависимости от магнитного поля продольного и холловского напряжений на гетероструктуре GaAs-AlGaAs при токе 10 мкА.

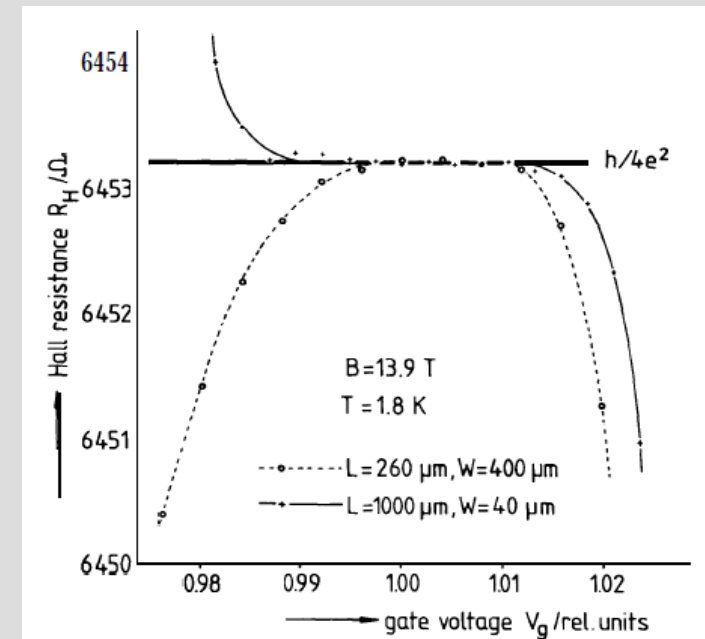
Klaus von Klitzing , Developments in the quantum Hall effect, Philosophical Transaction of the Royal Society A, 363, 2203 (2005)

Использование квантового эффекта Холла как стандарта

Холловское сопротивление на плато КЭХ не зависит от размера образца, качества образца, способа крепления проводов итд.



Klaus von Klitzing, Developments in the quantum Hall effect, Philosophical Transaction of the Royal Society A, 363, 2203 (2005)

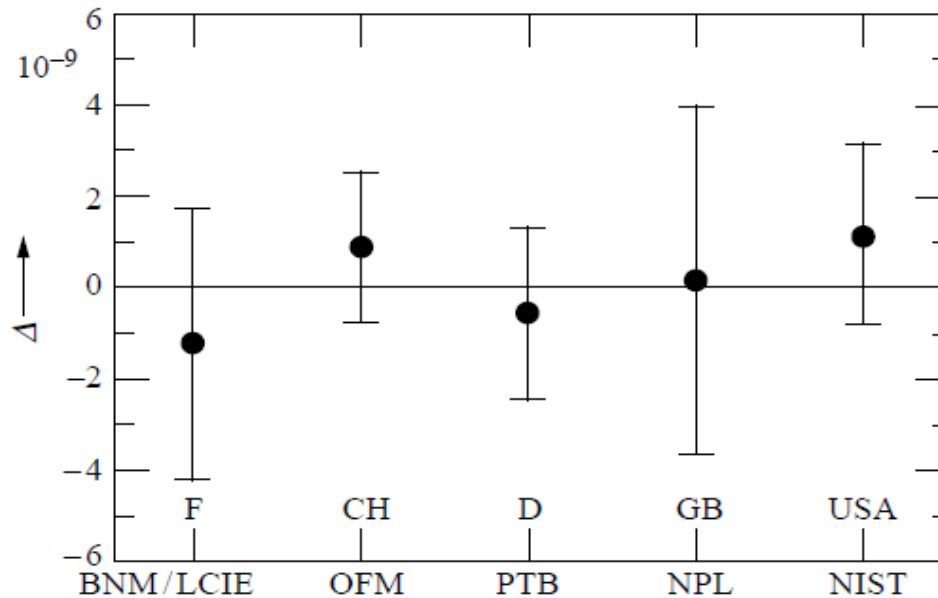
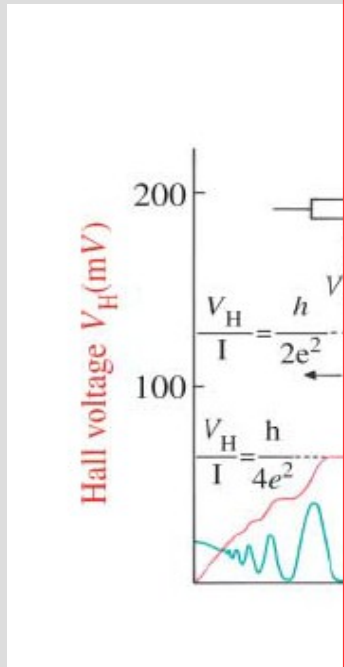


Сравнение плато Холловского сопротивления для образцов разной формы (L - длина, W - ширина). На графике изображена зависимость холловского сопротивления от напряжения на затворе МОП-структуры, контролирующего концентрацию электронов в двумерном газе.

Klaus von Klitzing, The Quantized hall effect, Nobel Prize Lecture, (1985)

Использование квантового эффекта Холла как стандарта

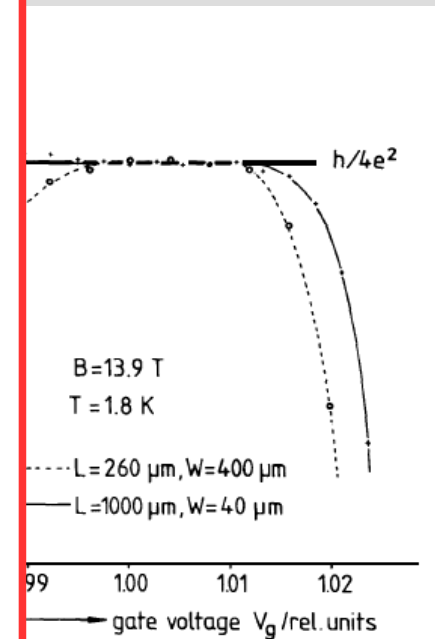
Холловское
качества об



Воспроизводимость холловского сопротивления в различных лабораториях.

$$R_H = B \times \frac{1}{q(nL_z)} = \frac{B}{en_0} = \frac{h}{e^2} = 25813.801 \text{ Ом}$$

образца,



сопротивления для образцов
(ширина). На графике изображена
сопротивления от напряжения на

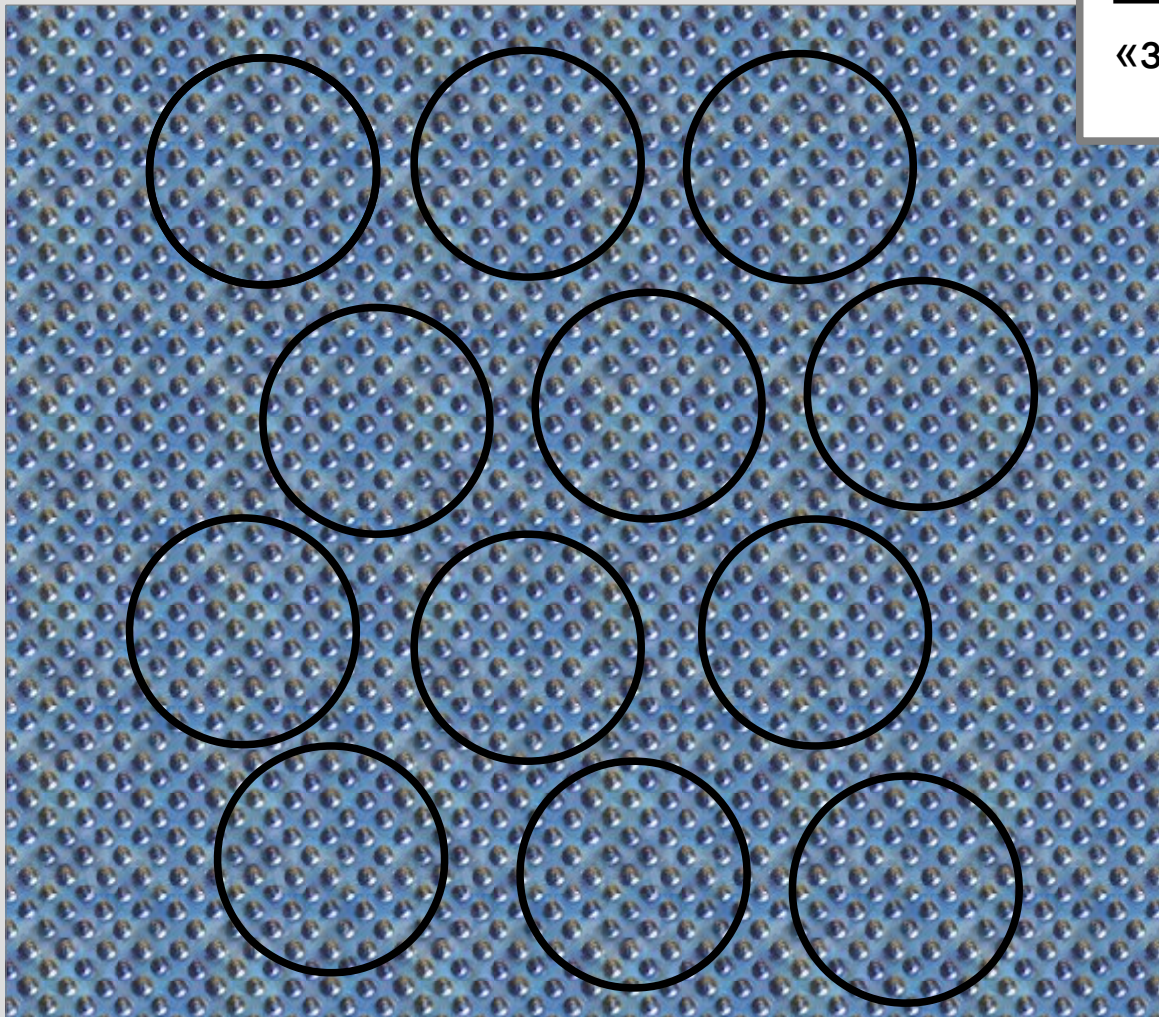
Klaus von Klitzing, Developments in the quantum Hall effect, Philosophical Transactions of the Royal Society A, 363, 2203 (2005)

затворе МОП-структуры, контролирующего концентрацию электронов в двумерном газе.

Klaus von Klitzing, The Quantized hall effect, Nobel Prize Lecture, (1985)

Если посмотреть повнимательнее

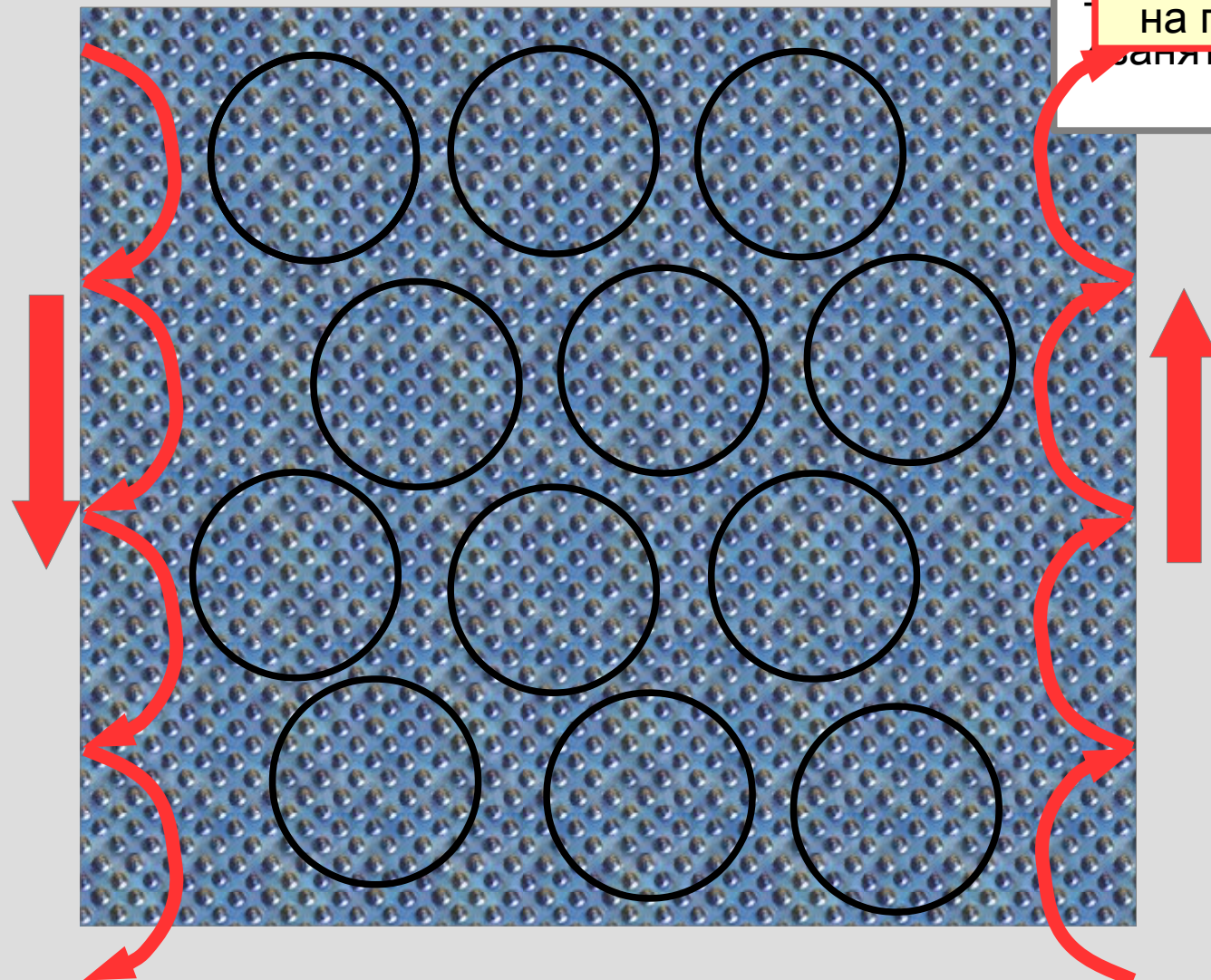
Электроны крутятся по орбитам без рассеяния — соседние места «заняты», ток не течёт!



Если посмотреть повнимательнее

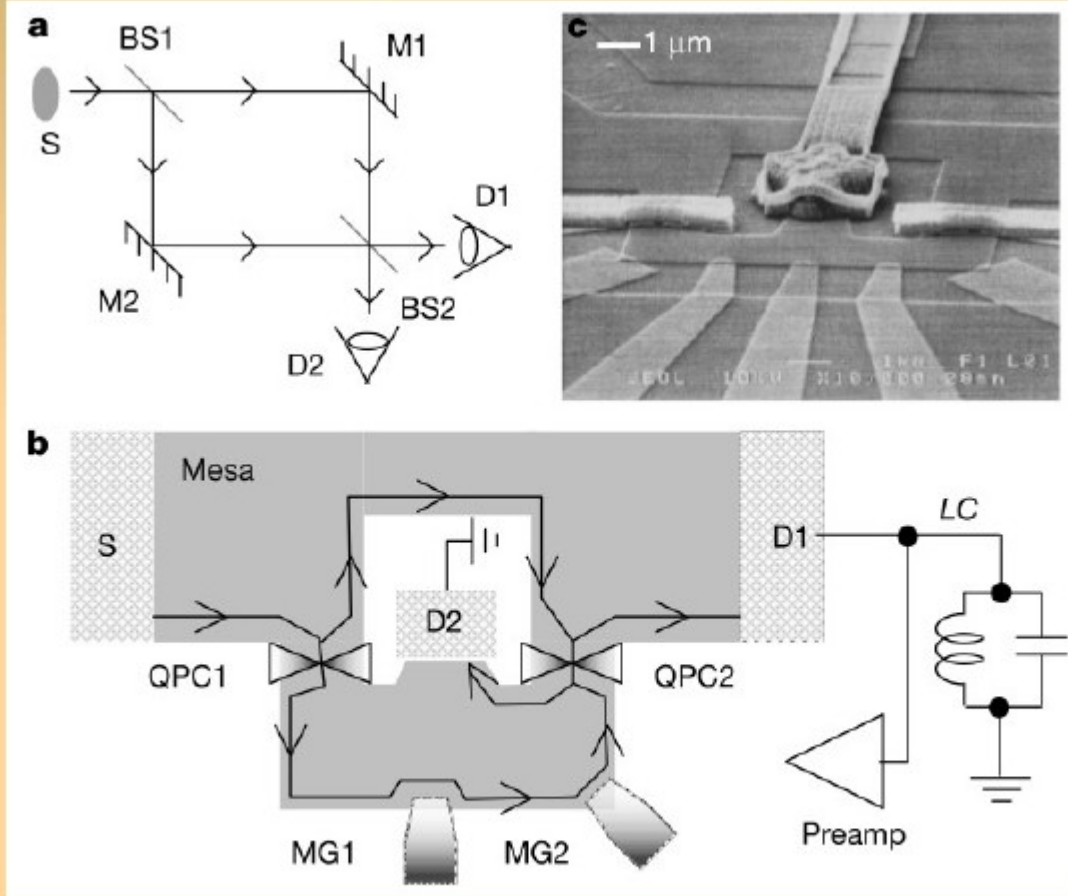
Кроме краёв
образца!!!

Холловский ток
переносят
одномерные каналы
на границах образца



«запятая», ток не течёт!

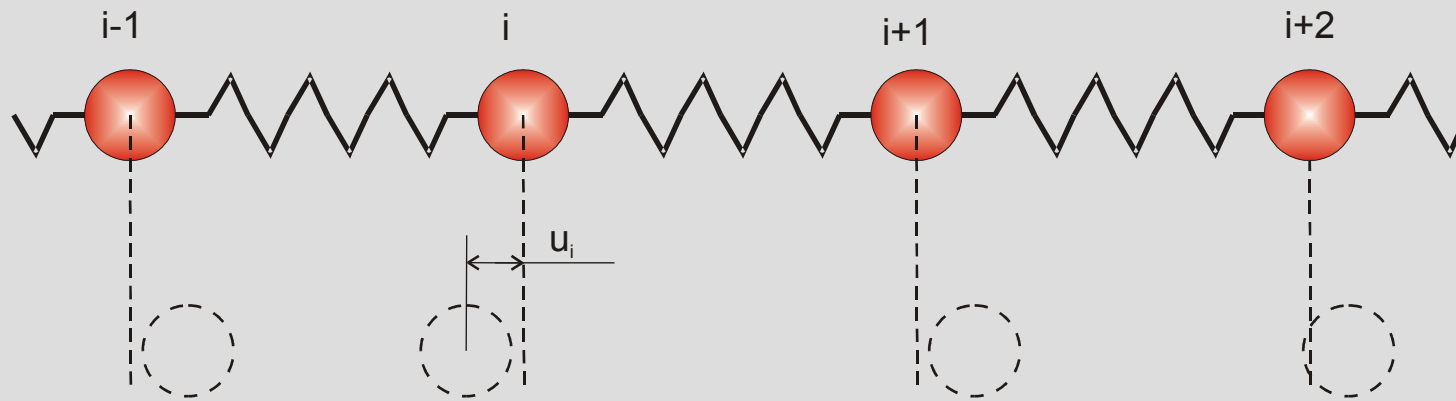
Интерферометрия краевых ТОКОВ



Adopted from: Y. Ji, Y. Chung, D. Sprinzak, M. Heiblum, D. Mahalu, and H. Shtrikman, *Nature (London)* 422, 415 (2003).

Часть 3. Квазичастицы

Колебания решётки



Модель «шариков и пружинок».

$$M \frac{d^2 u_j}{dt^2} = C (u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j)$$

Колебания цепочки атомов.

$$M \frac{d^2 u_j}{dt^2} = C (u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j)$$

$$u_j = u_0 e^{i(kx_j - \omega t)}$$

← ищем решение в форме бегущей волны с произвольной амплитудой

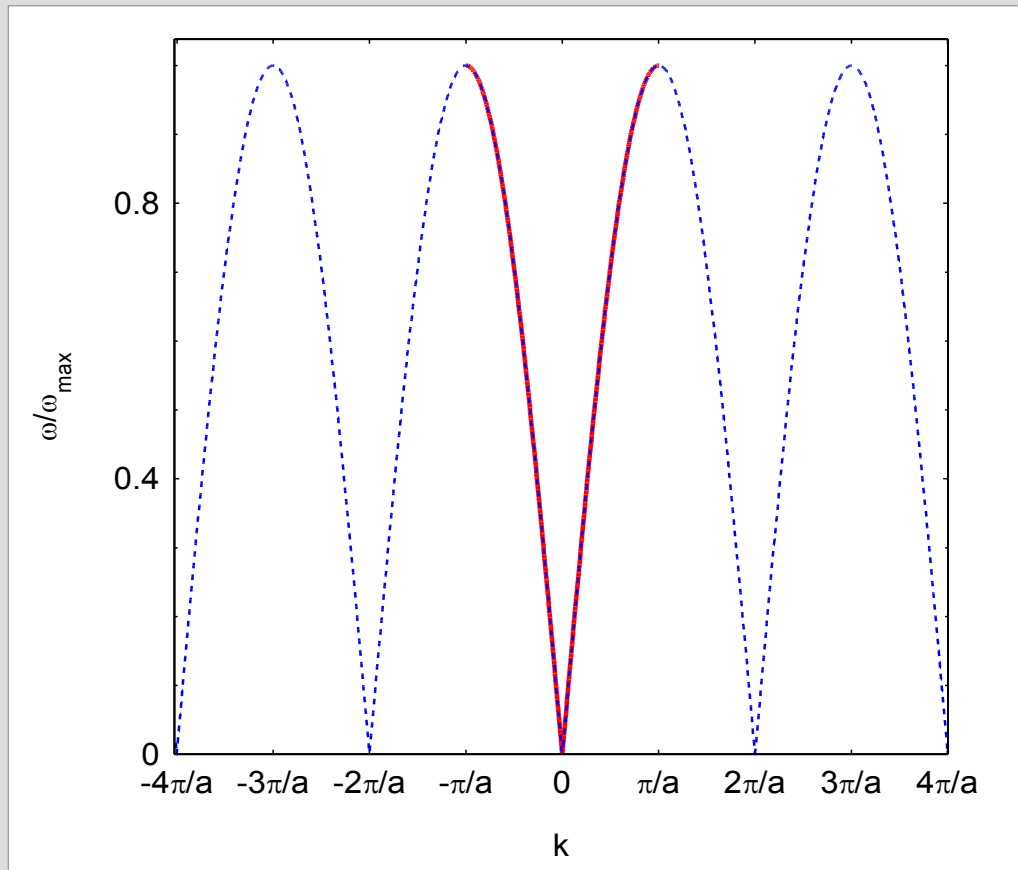
$$x_j = j \cdot a$$

$$-M \omega^2 = C (e^{ika} + e^{-ika} - 2) = -2C (1 - \cos(ka)) = -4C \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

Только при такой связи частоты и волнового вектора (при таком законе дисперсии) волна распространяется по кристаллу без затухания.

Звуковые волны, порядки величины...



$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

$$k \rightarrow 0 \quad \omega = a \sqrt{\frac{C}{M}} k = sk$$

звуковые колебания

$$\omega = \frac{2s}{a} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

$$s = 10^3 \text{ м/сек}$$

$$a = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$



$$\omega_{max} \approx 10^{13} \text{ 1/сек}$$

(ИК спектр, соответствует энергии ~7мэВ или температуре около 80К)

$$V_{гр} = \frac{d\omega}{dk} \text{ зануляется при } k = \pi/a + 2\pi n/a$$

Фонон

- Квант упругого колебания кристалла

$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

Энергия тепловых колебаний кристалла

Высокие температуры – закон Дюлонга и Пти

Низкие температуры – термоактивированные фононы.

Задача о тепловом равновесии при низких температурах эквивалентна вычислению для абсолютно черного тела

$$E = AVT^4$$

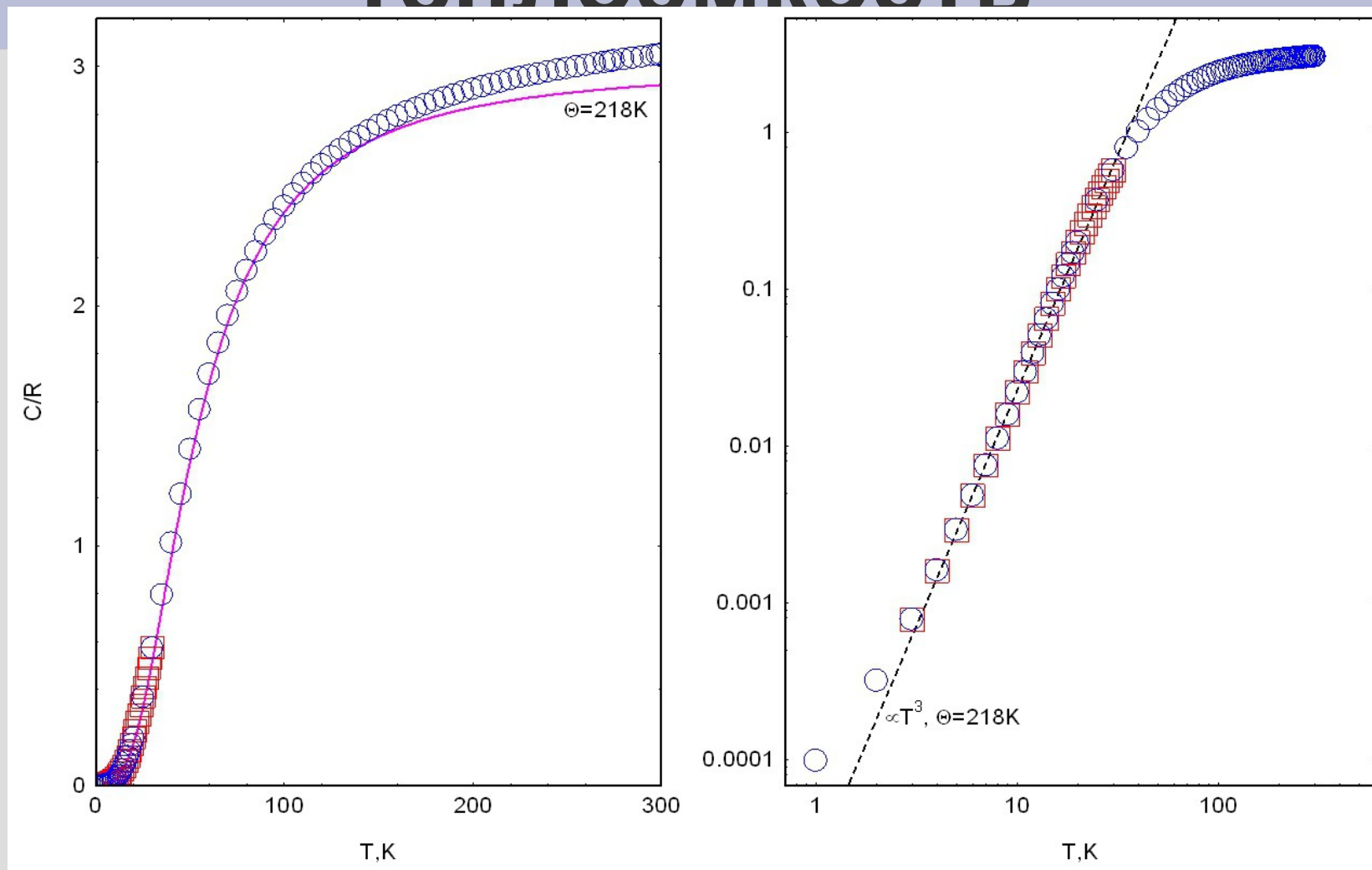
$$C = BT^3$$

$$C_{\mu} \approx 233.8R \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3$$

температура Дебая для разных веществ

алмаз	2200	Ag	227	Si	645
Mg	400	Au	162	Ge	374
Cu	344	He	26	Ar	92
Fe	470	NaCl	275	Pb	105
Al	428	Pt	239		

Низкотемпературная теплоёмкость



Теплоёмкость металлического серебра.. На правой панели показан закон Дебая с определённой по подгонке приведённых данных температурой Дебая 218K. На левой панели показана полная кривая модели Дебая, вычисленная для температуры Дебая 218K

Задачи домашнего задания

Задача 1

Электрону энергетически невыгодно находиться рядом с атомами гелия, поэтому оказавшись в толще жидкого гелия, электрон образует вокруг себя пустой пузырек (“баблон”). Оценить радиус такого пузырька исходя из соотношения неопределенности. Коэффициент поверхностного натяжения в жидком гелии равен $\sigma = 0,36 \text{ мН/м}$, энергия связанная с поверхностью равна $E = \sigma S$.

Задача 2

Найдите отношение количеств теплоты, необходимых для изменения температуры кристалла алмаза на 1К, при начальной температуре в 1К и 100К. Температура Дебая для алмаза равна 2200К.