

Национальный исследовательский университет
Высшая Школа Экономики

курс-майнор 2017-2018 уч.года
«Квантовая физика 'для чайников'»

В.Н.Глазков

Лекция 14

Ядерная физика 3:
Некоторые красивые эксперименты физики частиц

Оглавление

Экспериментальное наблюдение виртуальных частиц.....	4
Сдвиг Лэмба.....	5
Аномальный магнитный момент электрона.....	8
Эффект Казимира.....	8
Излучение Хокинга.....	9
Бозон Хиггса.....	9
Осцилляции нейтрино.....	13
Проблема солнечных нейтрино.....	13
Термоядерные реакции в ядре Солнца.....	13
Проблема солнечных нейтрино.....	14
Нейтринные обсерватории.....	15
Нейтринный эксперимент T2K (Япония). Исследование осцилляций нейтрино.....	18
Решение модельной задачи о нейтринных осцилляциях.....	21

Список литературы

- 1: HyperPhysics, Lamb shift, , <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/lamb.html>
- 2: wikipedia.org, Lamb shift, 2017, https://en.wikipedia.org/wiki/Lamb_shift
- 3: Willis E. Lamb, Nobel Lecture: Fine Structure of the Hydrogen Atom, 1955, https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1955/lamb-lecture.html
- 4: wikipedia.org, Anomalous magnetic dipole moment, , https://en.wikipedia.org/wiki/Anomalous_magnetic_dipole_moment
- 5: A. Hoecker, W.J. Marciano, The muon anomalous magnetic moment, 2013, <http://pdg.lbl.gov/2013/reviews/rpp2013-rev-g-2-muon-anom-mag-moment.pdf>
- 6: В.М. Мостепаненко, Н.Н. Трунов, Эффект Казимира и его приложения, УФН, 156, 385 (1988)
- 7: G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio, G. Ruoso, Measurement of the Casimir force between parallel metallic surfaces, Physical Review Letters, 88, 041804 (2002)
- 8: wikipedia.org, Hawking radiation, 2017, https://en.wikipedia.org/wiki/Hawking_radiation
- 9: Д. И. Казаков, Хиггсовский бозон открыт: что дальше?, УФН, 184, 1004 (2014)
- 10: В.А.Рубаков, К открытию на большом адронном коллайдере новой частицы со свойствами бозона Хиггса, УФН, 182, 1017 (2012)
- 11: Particle Data Group, К.А.Olive et al., Status of Higgs boson physics, Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014)
- 12: CMS Collaboration, Evidence for the Higgs boson decay to a bottom quark-antiquark pair, 2017, <https://arxiv.org/abs/1709.07497>
- 13: wikipedia.org, Neutrino, 2017, <http://en.wikipedia.org/wiki/Neutrino>
- 14: wikipedia.org, Neutrino oscillation, 2016, http://en.wikipedia.org/wiki/Neutrino_oscillations
- 15: T2K, T2K (Tokai to Kamioka) neutrino experiment, 2016, <http://t2k-experiment.org/t2k/>
- 15: С.С.Герштейн, Загадки солнечных нейтрино, Соросовский образовательный журнал, 8, 79 (1997)
- 16: С.И. Сергеева , Эксперимент MINOS, 2016, <http://nuclphys.sinp.msu.ru/students/MINOS/index.html>
- 17: wikipedia.org, OPERA (эксперимент), 2016, [https://ru.wikipedia.org/wiki/OPERA_\(эксперимент\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/OPERA_(эксперимент))
- 19: Super Kamiokande, Photo Gallery, 2016, <http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/gallery/index-e.html>
- 20: T2K collaboration, First muon-neutrino disappearance study with an off-axis beam, Physical Review D, 85, 031103 (2012)

Экспериментальное наблюдение виртуальных частиц

Мы в ходе нашего курса уже неоднократно использовали концепцию виртуальных частиц: переносчиков взаимодействия, которые постоянно рождаются и уничтожаются. Эта модель заменяет пустоту вакуума классической физики некоторым «кипящим бульоном» виртуальных частиц. Необходимо отметить, что в области атомной физики есть несколько ярких экспериментальных фактов, подтверждающих правильность такой модели — эта модель не является «выдумкой на кончике пера», она допускает экспериментальную проверку..

Во-первых, вспомним, что в квантовой теории есть несколько соотношений неопределённости. Собственно, соотношения неопределённости в квантовой физике возникают всегда, когда речь идёт о сравнении точности измерения нескольких величин, которые принципиально не измеримы одновременно. Наиболее известно соотношение неопределённости Гейзенберга для координаты и импульса $\Delta p_x \cdot \Delta x \sim \hbar$. Есть ещё соотношение неопределённости для энергии $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$, где ΔE - точность измерения энергии, а Δt - время проведения измерения. Качественно это соотношение может быть обосновано тем, что для проведения абсолютно точного измерения надо обеспечить полную передачу энергии от исследуемого объекта к измеряющему прибору, что требует бесконечно большого времени, а при очень быстром измерении большую точность обеспечить невозможно.

С другой стороны, это означает, что при наблюдении за системой в течение короткого времени τ мы принципиально не в состоянии определить энергию этой системы точнее, чем $\Delta E \simeq \frac{\hbar}{\tau}$. Вспоминая связь между массой и энергией из теории относительности, это означает, что мы не можем точно определить массу и количество частиц в системе за время наблюдения. Из этого следует неожиданная с точки зрения классической физики возможность — кратковременного возникновения частиц (точнее, пар частиц, чтобы обеспечить другие законы сохранения) в вакууме. Оценим о каком масштабе времени идёт речь: для самых лёгких частиц электрона и позитрона минимальная энергия определяется их массой покоя и $\Delta t \sim \frac{\hbar}{2mc^2} \sim 6 \cdot 10^{-22} \text{ сек}$. Для более тяжёлых частиц это время ещё меньше.

Таким образом, квантовая теория приводит нас к отходу от понятия вакуума, как «абсолютной пустоты», и приводит к представлению о вакууме, как о своеобразном «кипящем супе» постоянно рождающихся и уничтожающихся пар элементарных частиц. Эти частицы называют виртуальными.

Виртуальные частицы некоторых типов рассматриваются как переносчики взаимодействий между частицами: частица «А» может испустить такую виртуальную частицу «В» которая потом будет поглощена частицей «С». В итоге с точки зрения внешнего наблюдателя произошёл акт взаимодействия частиц «А» и «С», а частица «В» существовала только в момент взаимодействия (и могла бы рассматриваться как математический метод описания взаимодействия, если бы не некоторые экспериментальные факты, подтверждающие их существование). Простой моделью такого взаимодействия через частицу-переносчик является взаимодействие двух человек на коньках, перебрасывающих мячик — между ними возникает отталкивание (для полной аналогии надо добавить чтобы мячик возникал в момент броска и пропадал, когда пойман, что уже не вообразимо в классическом мире). Из этой модели следует сразу связь между массой частицы-переносчика взаимодействия m и

расстояния на котором осуществляется взаимодействие r . Так как максимальная скорость частицы равна скорости света, то $r \sim c \Delta t \sim \frac{c \hbar}{mc^2} = \frac{\hbar}{mc}$. То есть, всякое взаимодействие через посредство массивных частиц окажется короткодействующим, например для массы электрона (самой лёгкой частицы) для оценки получаем $r \sim 4 \cdot 10^{-13} \text{ м} = 0.004 \text{ \AA}$. Для дальнедействующего электромагнитного взаимодействия частицей-переносчиком являются виртуальные фотоны с нулевой массой покоя. К сожалению, подробное обсуждение этой модели требует уже строгого изложения теории, что выходит за рамки курса. За разработку этого подхода была присуждена Нобелевская премия по физике 1965 года (Томонага, Швингер, Фейнман).

Сдвиг Лэмба.

Одно из доказательств существования виртуальных частиц — это так называемый сдвиг Лэмба [1][2]. Этот эффект был экспериментально обнаружен при изучении «краеугольного камня» квантовой механики — атома водорода.

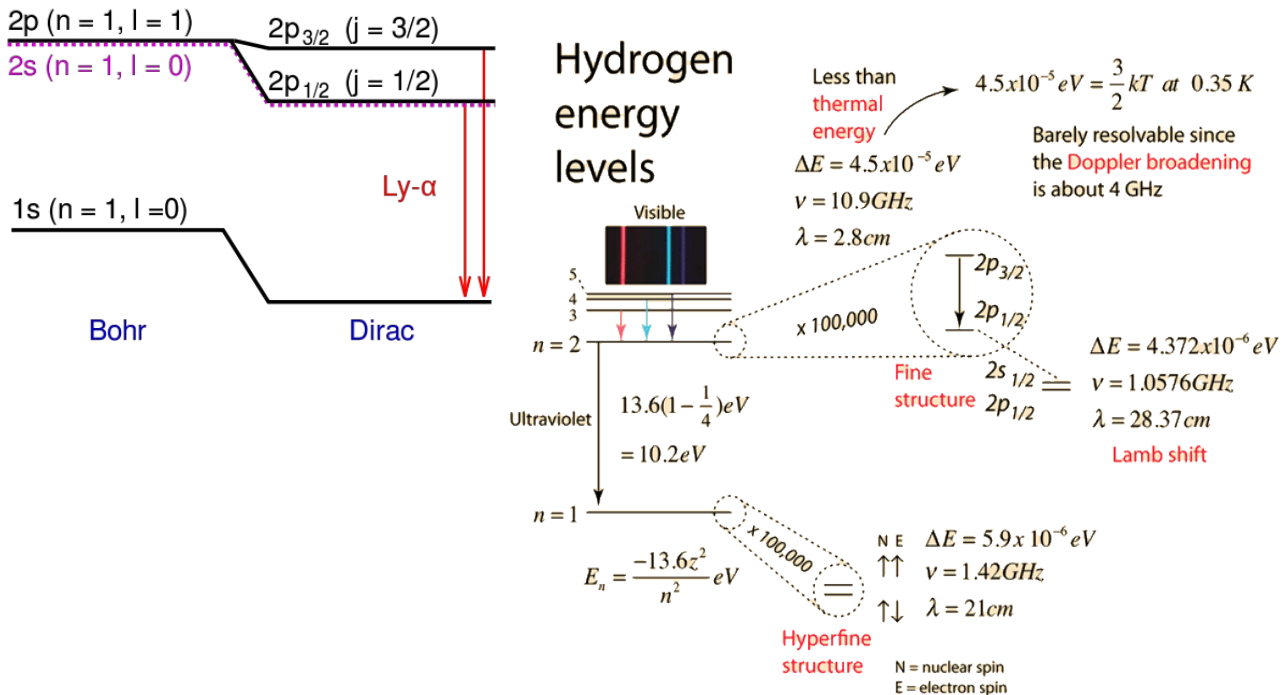


Рисунок 1: Слева: Схема уровней атома водорода в модели Бора (слева) и в релятивистской теории Дирака. Релятивистская теория Дирака сохраняет вырождение (совпадение энергий) 2s и 2p_{1/2} уровней. С сайта [2]. Справа: структура уровней атома водорода с учётом различных эффектов. С сайта [1].

Как мы знаем, теория Бора (как и более строгое решение задачи об атоме водорода в нерелятивистской квантовой механике) предсказывает, что в атоме водорода уровни энергии определяются только главным квантовым числом. В частности, энергии 2s и 2p уровней в этой модели совпадают. Релятивистская теория Дирака предсказала, что из шести 2p состояний четыре должны иметь чуть большую энергию, чем два оставшихся, а эти два оставшихся 2p-состояния должны совпадать по энергии с 2s-состояниями. Это разделение 6 состояний на «4+2» связано со сложением орбитального и спинового моментов вращения электронов: p-состоянию соответствует орбитальный момент $l=1$ (в единицах \hbar), а

собственный момент электрона $s=1/2$. Их сложение может дать полный момент $1/2$ (антипараллельная ориентация) либо $3/2$ (параллельная). По общим правилам квантовой механики проекция момента вращения может меняться на 1, так что состояний первого типа всего 2, а состояний второго типа 4. Величина предсказанного расщепления составляет около 50 мкэВ (энергия основного состояния в атоме водорода -13.6 эВ, а энергия состояния с $n=2$ равна -3.4эВ). Это отличие, называемое тонкой структурой, приводило к небольшой разнице частот переходов из состояния $2p$ в состояние $1s$ из разных групп $2p$ состояний и наблюдалось в спектроскопических экспериментах как небольшое раздвоение соответствующих линий спектра. Ещё более точные эксперименты Лэмба (за которые ему была присуждена 1/2 нобелевской премии 1955 года [3]) показали, что предсказываемого теорией Дирака совпадения энергии $2p$ состояния с антипараллельной ориентацией спина электрона и орбитального момента и $2s$ состояния не происходит: $2s$ состояния атома водорода оказываются чуть выше по энергии. Это расщепление составляет около 1ГГц в частотных единицах или 4 мкэВ, но оно надёжно наблюдается методом магнитного резонанса (рисунок 2).

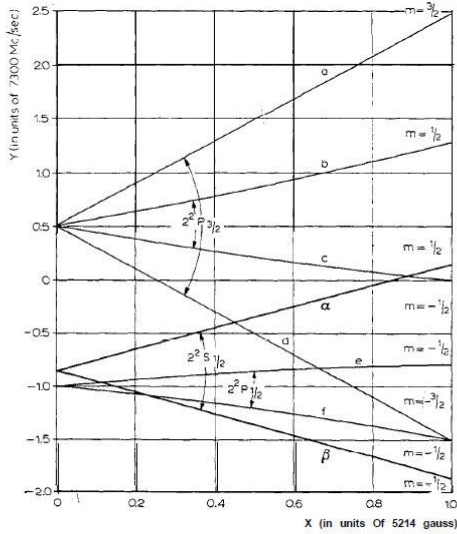


Fig. 4. Zeeman energy levels with the $2^2S_{1/2}$ pattern raised by 1000 Mc/sec.

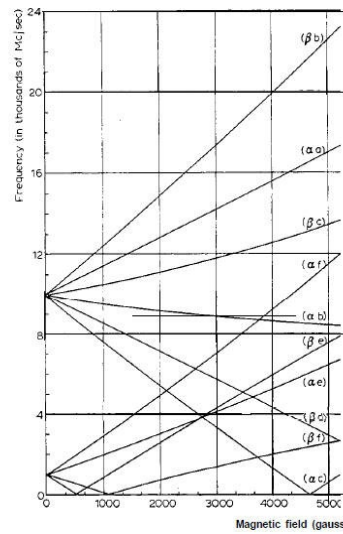


Fig. 6. Observed resonance curves for deuterium.

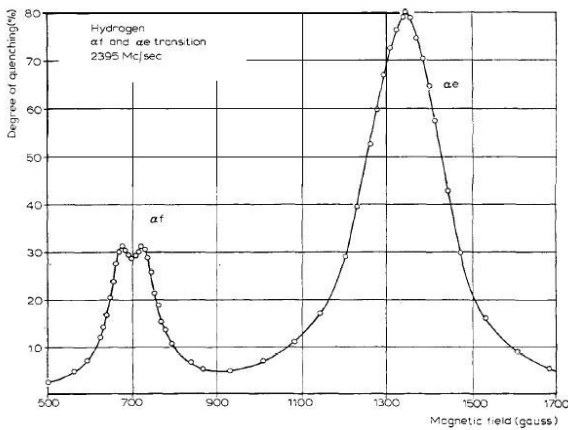


Fig. 7. Observed resonance curves for hydrogen.

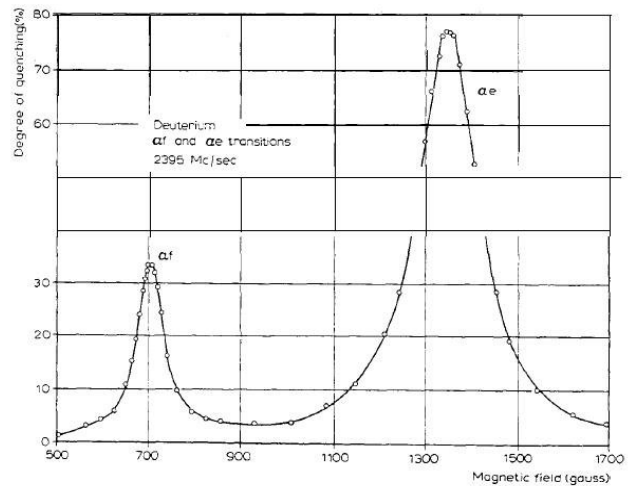


Рисунок 2 Верхний ряд: расщепление уровней энергии атома водорода в магнитном поле и ожидаемые частоты резонансных переходов между спиновыми подуровнями. Нижний ряд: поглощение СВЧ излучения в дейтерии и водороде как функция магнитного поля. Из нобелевской лекции Лэмба [3].

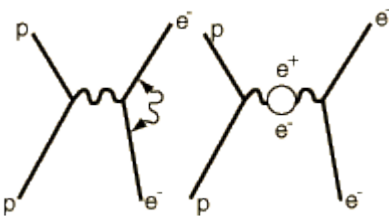


Рисунок 3: Процессы, приводящие к сдвигу Лэмба. С сайта [1]

Идея этого измерения заключается в том, что зависимость уровня энергии от магнитного поля известна (может быть восстановлена в том же резонансном эксперименте на различных частотах). Поэтому положение резонансного поглощения для перехода между $2s$ и $2p_{1/2}$ уровнями однозначно зависит от того, совпадают ли эти уровни в нулевом поле или

Этот эффект объясняется испусканием и поглощением электроном виртуальных фотонов и (более тонкие поправки) взаимодействием с электрон-позитронными парами. В результате этого на электрон действует не только центрально-симметричное кулоновское поле ядра (в котором имело бы место предсказанное Дираком вырождение), но и случайное флуктуирующее электрическое

поле виртуальных фотонов, изменяющееся с расстоянием и поэтому по разному воздействующее на состояния $2s$ и $2p$ с разным пространственным распределением волновой функции электрона. Вычисление предсказывает расщепление в точном согласии с экспериментом.

Аномальный магнитный момент электрона.

При орбитальном движении заряженной частицы возникает магнитный момент, который можно объяснить током, протекающим по «витку» совпадающему с орбитой движения частицы. Частице с орбитальным моментом вращения равным 1 (в единицах \hbar) соответствует магнитный момент равный магнетону Бора $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 927 \cdot 10^{-26} \text{ Джс/Тл}$ (в системе СИ). С собственным спиновым моментом вращения также оказывается связан магнитный момент, не имеющий классической аналогии. Релятивистская теория Дирака предсказывает, что связанный со спиновым моментом вращения магнитный момент ровно вдвое больше, чем вклад от такого же орбитального момента. То есть, для электрона ($s=1/2$) спиновый магнитный момент равен μ_B .

Однако по мере увеличения точности измерения стали обнаруживаться небольшие, но надёжно фиксируемые отклонения от этого предсказания теории Дирака. Одно из таких измерений связано со сверхтонким расщеплением основного состояния атома водорода (см. схему на рисунке 1): знаменитой в астрофизике линии 21 сантиметр. Это небольшое расщепление первого уровня связано с взаимодействием магнитного момента протона и электрона и может быть достаточно легко вычислено в рамках квантовой механики. Но оказалось, что измеряемое расщепление на долю процента отличается от расчётного.

Более точные измерения были произведены П.Кушем на различных атомах (за что была присуждена 1/2 нобелевской премии 1955 года). Они показали, что на самом деле он примерно на 0.1% больше предсказанного значения (отличие, измеренное Кушем составило 0.119% магнетона Бора) [4]. Это отличие, называемое аномальным магнитным моментом электрона, является одной из самых точно измеряемых величин в физике, достижение 2010 года составляет 1.001 159 652 180 73 (28). При этом с такой же точностью этот эффект вычисляется с учётом взаимодействия электрона с виртуальными фотонами.

Для объяснения этого отличия также используется учёт взаимодействия электрона с виртуальными фотонами, дающий основной вклад, а также более тонкие эффекты связанные с присутствием виртуальных электрон-позитронных пар. Теоретический расчёт даёт ответ согласующийся с экспериментом. Аналогичный эффект наблюдается и с более тяжёлым «родственником» электрона — мюоном [5].

Эффект Казимира.

Необычное проявление существования виртуальных частиц связано с так называемым эффектом Казимира [6]: предсказанием голландским физиком Хендриком Казимиром возникновения силы притяжения между двумя параллельными двусторонними зеркальными пластинами при малом расстоянии между пластинами. Эффект связан с тем, что два параллельных зеркала образуют оптический резонатор — между ними могут существовать только стоячие электромагнитные волны с длиной волны, удовлетворяющей условию резонанса $d = n\lambda/2$, где d - расстояние между пластинами.

Таким образом, в узком зазоре окажется подавлена часть виртуальных фотонов с нерезонансными длинами волн, в то время как во внешнем пространстве они сохранятся невозмущёнными. Так как при отражении электромагнитные волны оказывают давление на зеркало, окажутся нескомпенсированными давления из зазора и из внешнего пространства и возникнет сила притяжения между пластинами.

Величина этой силы на единицу площади, вычисленная Казимиром для плоских зеркал $F = -\left(\frac{\pi^2}{240}\right)\frac{\hbar c}{d^4}$. Для двух пластин площадью 1 см^2 на расстоянии 1 мкм эта сила составляет порядка 10^{-8} Н . Этот эффект также проявляется и при решении задач взаимодействия атомов и молекул.

Кроме того, были проведены и наглядные эксперименты с макроскопическими пластинами размером 19 мм на 1.2 мм , сближаемыми на расстояние $0.5\text{-}3.0\text{ мкм}$ [7], подтвердившие возникновение такой силы с точностью около 15% по сравнению с предсказанием теории.

Излучение Хокинга

Отметим без подробного анализа, что постоянное рождение и уничтожение пар частица-античастица в физическом вакууме приводит к одному предсказанному (но не наблюдаемому пока) астрофизическому эффекту. Это так называемое излучение Хокинга или Хокинга-Зельдовича [8].

Идея состоит в том, что если вблизи *горизонта событий* черной дыры родится виртуальная пара частица-античастица, то может оказаться, что одна из частиц пары протуннелирует за горизонт событий и пропадёт таким образом для наблюдаемой Вселенной. А вторая частица тогда может вылететь «в наш реальный мир». В результате такого процесса чёрная дыра должна терять энергию, этот процесс называют также испарением чёрных дыр.

В результате чёрная дыра, которая не поглощает массу должна будет «растаять» за некоторое время. Грубые оценки этого времени [8] $t_{ex} \sim \frac{5120\pi G^2 M^3}{\hbar c^4}$ показывают, что, хотя

астрономические чёрные дыры должны жить астрономические времена (для массы равной массе Солнца получается ответ на много порядков больший времени жизни Вселенной), «лёгкие» черные дыры оказываются короткоживущи: гипотетическая чёрная дыра с массой 200 тонн проживёт всего одну секунду. Это закрывает популярные когда-то страхи, что в Большом адронном коллайдере может возникнуть черная дыра, которая поглотит Землю¹: при ядерной массе время жизни гипотетической микро-черной дыры будет ничтожным.

Бозон Хиггса.

Экспериментальное подтверждение существования бозона Хиггса в 2012 году широко обсуждалось в средствах массовой информации (с громкими названиями об «открытии частицы бога») и в научных кругах. Это открытие является одним из важнейших фундаментальных открытий последних лет. Само это наблюдение показывает, что большие открытия в фундаментальной физике продолжают случаться и пока прочитана ещё далеко не

¹ Страшилка возникающая видимо из некорректно интерпретированных слов одного из учёных, что в момент столкновения образуется сверхплотное вещество.

последняя страница книги изучения Вселенной. Обзоры по этой теме могут быть найдены в литературе [9], [10], [11]. Мы ограничимся самыми простыми вопросами.

Во-первых, отметим, что предсказание о существовании поля Энглера-Брауна-Хиггса и бозона-переносчика этого поля (бозона Хиггса) было сделано в 60-х годах 20 века. Хотя это предсказание теоретически является вполне естественным для Стандартной модели (так что в существовании этого механизма взаимодействия большинство физиков-ядерщиков было уверено), для его экспериментального подтверждения понадобилось 50 лет прогресса в инструментальных методах ядерной физики. Наблюдение бозона Хиггса стало возможным только с запуском Большого адронного коллайдера² — одного из самых дорогих научных инструментов в истории со стоимостью строительства около 10 миллиардов долларов. Важно отметить, и это характерно подчёркивает логику развития науки, что Нобелевская премия теоретикам Хиггсу и Энглеру была присуждена только после экспериментального подтверждения существования предсказанного ими механизма.

Про бозон Хиггса часто говорят, что это та частица, из-за которой возникает масса. Это несколько условные слова, которые могут запутать неспециалиста. Напомним известный из теории относительности факт, что для безмассовых частиц (фотонов, например) энергия связана с импульсом как $E = pc$, а для частиц с ненулевой массой покоя

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + p^2c^2}. \text{ В Стандартной модели без бозона Хиггса нет внутренних причин}$$

считать различными переносчики электромагнитного и слабого взаимодействия, более того теория объединения электрослабого взаимодействия показывает, что на первых этапах жизни Вселенной эти два взаимодействия были одним целым. Это означает, что и переносчики слабого взаимодействия могли бы быть безмассовыми с точки зрения теории — это не так в реальном мире, но с точки зрения чистой теории у элементарных частиц стандартной модели не должно бы быть массы. Физики говорят об этом, как о некоторой симметрии в Стандартной модели [10]. Предсказание Хиггса и Энглера заключалось в предложении механизма нарушения такой симметрии: предложена некоторая формально допустимая возможность взаимодействия изначально безмассовых частиц с дополнительным полем, в результате которого связь энергии с импульсом у частицы меняется от безмассового закона

$$E = pc \text{ к закону } E = \sqrt{(mc^2)^2 + p^2c^2}. \text{ Энергия массивной частицы не может быть меньше}$$

mc^2 , то есть масса в некотором смысле определяет «цену создания» частицы. Безмассовая частица может быть создана «даром», и роль взаимодействия Хиггса сводится к тому, что за счёт взаимодействия с полем Энглера-Брауна-Хиггса изначально безмассовая частица как-то искажает его и энергия этого взаимодействия создаёт конечную «цену» создания частицы. Грубой аналогией является отличие между движением стального шарика по жёсткой и эластичной поверхности: в первом случае при приложении минимального усилия шарик сразу начнёт движение, во втором случае он деформирует под собой основу и для его движения необходимо всё время «вылезать» из созданной ямки - «цена» перевода шарика в движущееся состояние становится конечной.

В результате бозон Хиггса определяет массы элементарных частиц и вводит пятое фундаментальное взаимодействие помимо гравитационного, электромагнитного, слабого и

2 Эксперименты по поиску бозона Хиггса велись и на других больших ускорителях. Постепенно накапливающиеся данные по косвенным наблюдениям сужали диапазон возможных масс новой частицы. Эксперименты на протон-антипротонных столкновениях в ускорителе Теватрон (США) позволили исключить существование частицы с массой меньше 110 МэВ и более 145 МэВ [11]. Эксперименты на Большом адронном коллайдере завершили эту гонку, позволив непосредственно статистически достоверно зафиксировать процессы, связанные с распадами именно бозона Хиггса.

сильного.

Как же «увидели» бозон Хиггса? Как всегда в ядерной физике речь идёт о некотором процессе взаимопревращения частиц в результате которого на детекторе обнаружили некоторое количество обычных частиц (электронов, фотонов). Бозон Хиггса является истинно нейтральной частицей, он может распадаться на разные комбинации частиц и античастиц. Для экспериментального обнаружения основными (наиболее удобными) оказались [11] каналы распада на два фотона $H \rightarrow \gamma\gamma$ и на 4 лептона (2 лептона и два антилептона) через промежуточную пару истинно нейтральных Z-бозонов $H \rightarrow ZZ \rightarrow llll$. Другие возможные каналы менее удобны для экспериментального обнаружения таких распадов³ по разным причинам (более высокий фон, появление трудноуловимых нейтрино, малая вероятность, см. рисунок 4), но они в основном тоже уже обнаружены [12].

Decay channel	Branching ratio	Rel. uncertainty	Decay channel	Mass resolution
$H \rightarrow \gamma\gamma$	2.28×10^{-3}	+5.0% -4.9%	$H \rightarrow \gamma\gamma$	1-2%
$H \rightarrow ZZ$	2.64×10^{-2}	+4.3% -4.1%	$H \rightarrow ZZ \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell'^+ \ell'^-$	1-2%
$H \rightarrow W^+W^-$	2.15×10^{-1}	+4.3% -4.2%	$H \rightarrow W^+W^- \rightarrow \ell^+ \nu_\ell \ell'^- \bar{\nu}_{\ell'}$	20%
$H \rightarrow \tau^+\tau^-$	6.32×10^{-2}	+5.7% -5.7%	$H \rightarrow b\bar{b}$	10%
$H \rightarrow b\bar{b}$	5.77×10^{-1}	+3.2% -3.3%	$H \rightarrow \tau^+\tau^-$	15%
$H \rightarrow Z\gamma$	1.54×10^{-3}	+9.0% -8.9%		
$H \rightarrow \mu^+\mu^-$	2.19×10^{-4}	+6.0% -5.9%		

Рисунок 4 Слева: вычисленные в рамках Стандартной модели вероятности различных процессов распада бозона Хиггса для массы бозона 125 МэВ. Справа: точность определения массы бозона Хиггса для разных процессов распада. Из [11].

Возникновение бозона Хиггса является процессом обратным распаду. С некоторой вероятностью бозон Хиггса может образовываться при столкновении достаточно энергичных частиц, на Большом адронном коллайдере сталкивались два пучка протонов.

В эксперименте детектировалось возникновение после столкновения пары гамма-квантов или четвёрки лептонов, по их суммарной энергии и импульсу можно было определить массу покоя распадающейся частицы. При этом необходимо было исключить все возможные процессы образования других частиц при столкновениях. В результате анализа статистики, накапливаемой более года в двухфотонных и четырёхлептонных процессах распада (рисунки 5, 6) был зафиксирован статистически достоверный избыток событий, соответствующий образованию при протон-протонных столкновениях нейтральной частицы массой $M c^2 = 125.8 \text{ МэВ}$, по всем характеристикам совпадающей с предсказываемым теорией хиггсовским бозоном.

3 Обратите внимание (рисунок 4), что двухфотонный канал распада имеет вероятность 0.2%, а четырёхлептонный (ZZ) — 2.6%. Основным каналом (60%) является распад в два b-кварка (кварк и антикварк), однако такие события трудно выделить среди других похожих, но он был достоверно зафиксирован только в 2017.

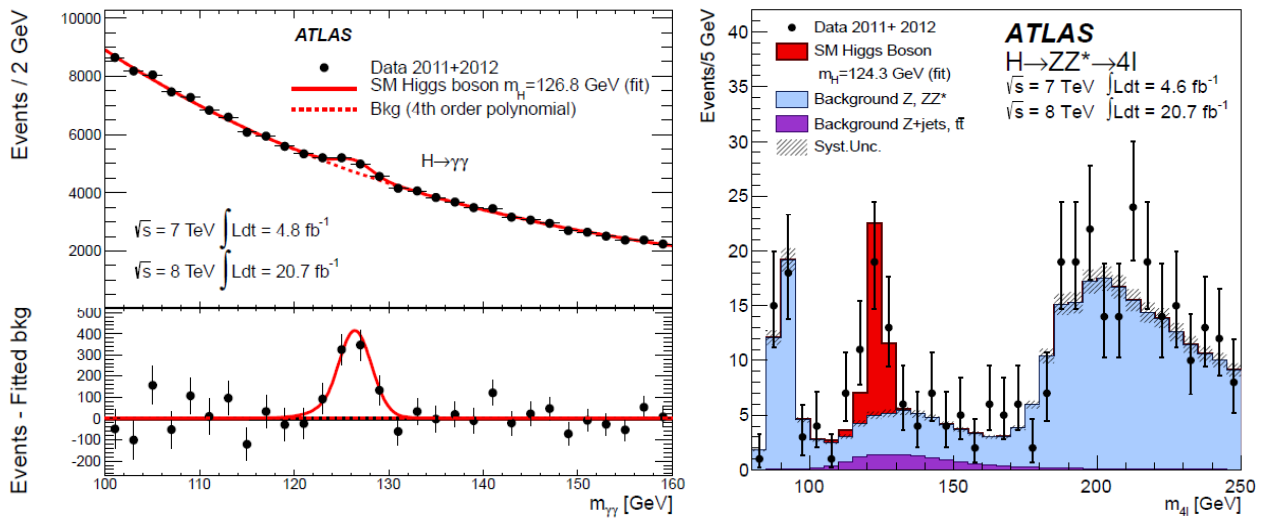


Рисунок 5 Слева: статистика двухфотонных распадов бозона Хиггса. Справа: статистика четырёхлептонных распадов бозона Хиггса. Из [11].

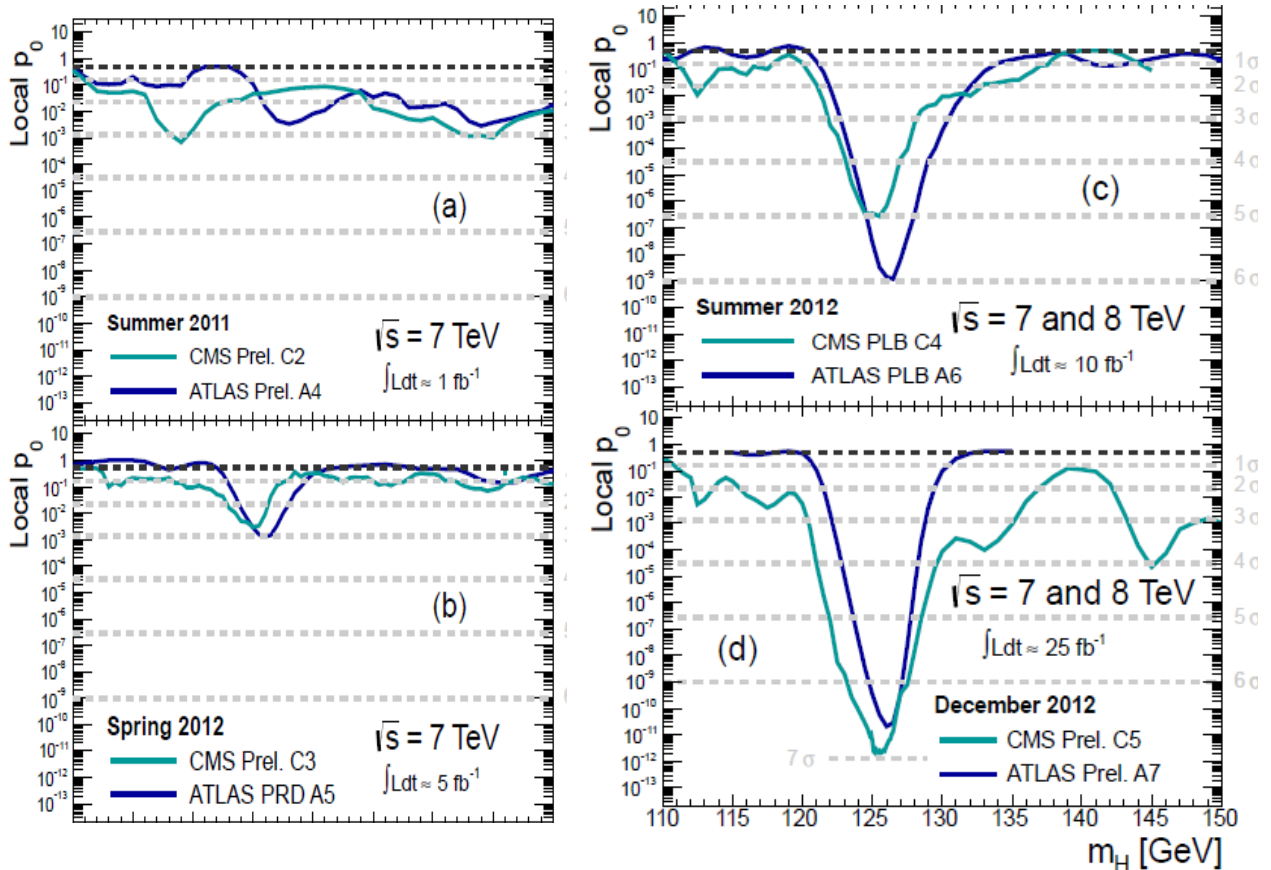


Рисунок 6 Накопление статистики распадов бозона Хиггса по мере развития экспериментов на Большом адронном коллайдере в лета 2011 по декабрь 2012 года. Из [11].

Осцилляции нейтрино

Проблема солнечных нейтрино

Термоядерные реакции в ядре Солнца

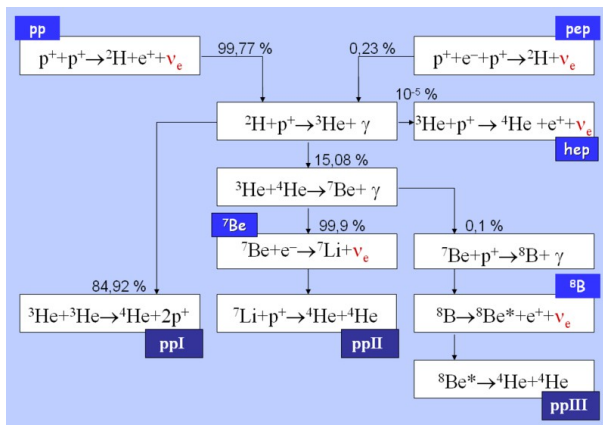
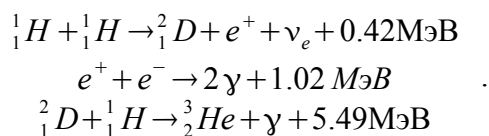


Рисунок 7: Схема ветвей протон-протонной цепочки термоядерных реакций. Рисунок с сайта [13].

Внутри ядра выделяется 99% всей излучаемой Солнцем энергии и в ядре создаются достаточные условия (плотность вещества и его температура) для начала реакции синтеза. Цепочка термоядерных реакций на Солнце достаточно хорошо известна (например, [13]) Основная реакция в ядре Солнца — это протон-протонная цепочка реакций:



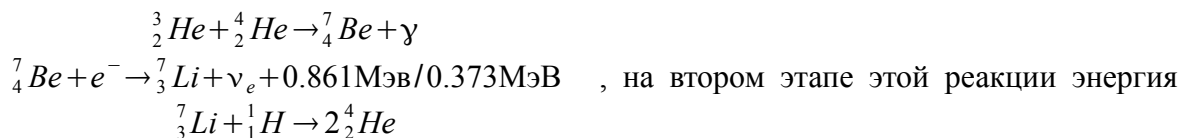
Отметим, что эта реакция синтеза идёт по каналу слабого взаимодействия: при образовании ядра дейтерия один из протонов превращается в нейтрон. Возможность такой реакции на Солнце связана с астрономическим масштабом «реактора», поэтому малая вероятность компенсируется большой массой топлива. В реакциях синтеза, используемых в программах контролируемого термоядерного синтеза используются реакции по каналу сильного взаимодействия, например дейтерий-тритиевая реакция ${}^2_1\text{D} + {}^3_1\text{T} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n} + 17.6\text{МэВ}$.

После реакции синтеза гелия-3 реакции в ядре звезды ветвятся, вероятности ветвей зависят от условий (массы, температуры):

- **ppI ветвь** (на Солнце эта ветвь основная, она происходит с вероятностью 85-86% и является доминирующей при температурах 10-14 миллионов градусов):
 ${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2{}^1_1\text{H} + 12.86\text{МэВ}$
- **ppII ветвь** (на Солнце происходит с вероятностью 14-15%, является доминирующей реакцией при температурах ядра звезды 14-23 миллиона градусов):

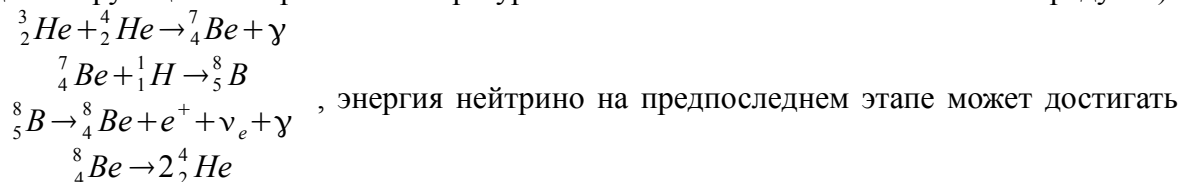
Слои под фотосферой (внешними слоями Солнца) непосредственному наблюдению не доступны. Источником наших знаний о них являются модельные расчеты и измерения потока солнечных нейтрино, подтверждающих, что в глубине Солнца идут термоядерные реакции. Именно эти реакции — точнее выделяющаяся в них энергия — создает давление, противодействующее гравитационному сжатию Солнца.

Радиус ядра составляет примерно 20-25% от солнечного радиуса, плотность ядра оценивается в примерно 150000 кг/м³, а температура в 13.5-15 миллионов градусов.



нейтрино зависит от получившегося состояния ядра лития-7, в 90% случаев энергия нейтрино равна 0.861МэВ.

- ppIII ветвь (на Солнце происходит с вероятностью 0.11%, но эта ветвь важна для наблюдений как источник высокоэнергичных нейтрино, она становится доминирующей при температуре выше 23 миллионов градусов):



14.06МэВ.

В основной ppI ветви из 4 протонов получается одно ядро атома гелия, дефицит массы составляет 0.7%, полный выход этой реакции 26.73МэВ. Нейтрино уносит 2% этой энергии, остальная энергия выделяется в виде гамма-квантов, давление которых противодействует гравитационному сжатию. В ветвях ppII и ppIII нейтрино уносит 4% и 28% энергии.

Интенсивность излучения Солнца соответствует тому, что каждую секунду в энергию превращается $4.26 \cdot 10^9$ кг вещества. Цифра огромная сама по себе, но сравнение с массой Солнца ($1.9891 \cdot 10^{30}$ кг) показывает, что Солнца хватит надолго.

Проблема солнечных нейтрино.

Нейтрино, образующиеся в результате термоядерных реакций в ядре Солнца, являются непосредственным «отпечатком пальцев» этих реакций. Энергичные гамма-кванты, образующиеся при реакциях, активно взаимодействуют с веществом, поглощаются и переизлучаются — по оценкам, «потомок» гамма-кванта, образовавшегося в ядре, достигает поверхности Солнца через 10000-200000 лет. Нейтрино же по большей части выходят из Солнца без взаимодействия с веществом. Поэтому довольно рано возникла задача детектирования потока солнечных нейтрино, так как интенсивность потока нейтрино однозначно связана с интенсивностью излучения Солнца. Для этого были построены «нейтринные обсерватории», о которых мы уже упоминали в нашем курсе.

Первые измерения, проведенные будущим нобелевским лауреатом Рэймондом Дэвисом в конце 1960-х обнаружили, что интенсивность потока солнечных нейтрино составляет 1/3 от ожидаемого. Этот же результат был получен и в других измерениях, использующих радиохимические (на принципе превращения элементов при поглощении нейтрино) или водные (по черенковскому излучению выбитого электрона) детекторы. Этот дефицит нейтрино получил название «проблемы солнечных нейтрино» и оставался одной из нерешённых проблем до начала 2000-х годов.

Решением этой проблемы явилось открытие массы нейтрино. В природе существуют три вида нейтрино: электронное нейтрино, мюонное нейтрино и тау-нейтрино. В реакциях протон-протонной цепочки образуются электронные нейтрино, к ним же чувствительны радиохимические и водный детекторы. Если бы нейтрино были безмассовыми частицами, они бы могли двигаться только со скоростью света, и эти три вида нейтрино оказались бы независимыми. Из-за наличия массы оказались возможны превращения одного вида

нейтрино в другой. Такие превращения были наблюдаемы непосредственно. Кроме того, запаздывание нейтринной вспышки от сверхновой 1987А в 1987 году, отмеченное между детекторами в Японии (детектор Камиоканде) и в США (детектор Ирвин-Мичиган-Брукхэвен) указывало на то, что скорость нейтрино чуть меньше скорости света, что также указывает на конечность массы.

В 2001 году была запущена нейтринная обсерватория в Сэдбери (Канада), детектор которой был способен обнаруживать все типы нейтрино и различать их. Результаты этого детектора показали, что в потоке солнечных нейтрино 35% являются электронными нейтрино, а 65% составляют нейтрино двух других сортов, что полностью объяснило «пропадавшие» 2/3 потока нейтрино. Таким образом, современные измерения подтверждают, что вся излучаемая Солнцем энергия образуется в результате термоядерной реакции.

Более того, как мы отмечали, энергия нейтрино, образующихся в разных ветвях протон-протонной цепочки отличается. Интенсивность потока высокоэнергичных нейтрино ветви ppIII очень сильно зависит от температуры (теория предсказывает, что вероятность этой ветви пропорциональна T^{25} !), выделение высокоэнергичных нейтрино, связанных с этой ветвью реакции, и определение интенсивности их потока позволяет непосредственно «измерить» температуру ядра: по результатам этих измерений она равна 15.7 миллионов градусов.

Нейтринные обсерватории.

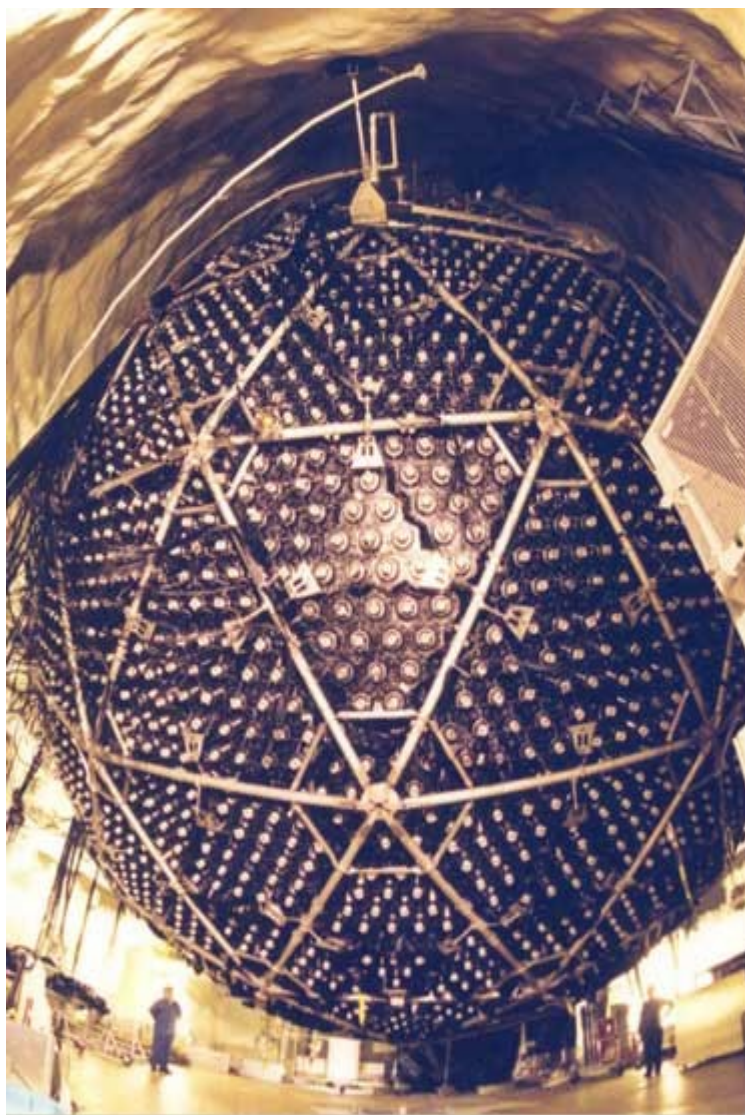


Рисунок 8: Нейтринный детектор Судбури (Канада). Фотография с сайта http://en.wikipedia.org/wiki/Sudbury_Neutrino_Observatory

Мы уже не раз обсуждали детекторы нейтрино — самые необычные из «телескопов», предназначенные для обнаружения потоков нейтрино.⁴ Нейтрино образуются в результате некоторых термоядерных реакций в звездах (уже первый шаг протонной цепочки реакций образует электронное нейтрино: ${}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^2_1\text{D} + e^+ + \nu_e + 0.42 \text{ МэВ}$), предполагается что часть нейтрино должна была возникнуть в первые моменты образования Вселенной. Нейтрино могут составлять часть загадочной «тёмной материи», так как они не взаимодействуют с веществом электромагнитным образом, а проявляют себя только через так называемое «слабое взаимодействие» или гравитационное взаимодействие. Огромная

⁴ За создание этих нейтринных телескопов в 2002 году была присуждена Нобелевская премия (Дэвис (Брукхэвенская национальная лаборатория) и Кошиба (Супер-Камиоканде)). За открытие при помощи обсерваторий Судбури и Супер-Камиоканде явление нейтринных осцилляций была присуждена Нобелевская премия 2015 года.

проникающая способность нейтрино и чрезвычайная слабость взаимодействия с веществом вынуждают прятать нейтринные обсерватории под землю, чтобы надежно экранироваться от других энергичных частиц космического излучения. Существует три вида нейтрино: электронное, мюонное и тау-нейтрино, причем нейтрино могут превращаться из одного вида в другой (эффект известный как «нейтринные осцилляции»).

Существует несколько основных способа детектирования нейтрино:

1. Первый метод заключается в том, что если нейтрино непосредственно столкнется с электроном, то выбитый электрон получает большую энергию и может начать двигаться быстрее скорости света в среде. Такой электрон излучает характерное черенковское излучение⁵, которое может быть зафиксировано фотоумножителями. Направление движения электрона примерно совпадает с направлением движения нейтрино, что позволяет определить направление на источник нейтрино. Данный метод (упругое рассеяние нейтрино) работает для нейтрино всех типов, но эффективность обнаружения электронных нейтрино оказывается в 6 раз больше из-за особенностей слабого взаимодействия. Такой детектор нейтрино установлен в лаборатории Супер-Камиоканде в Японии (см. рисунок 11). Он содержит 50000 тонн сверхчистой воды, характерный размер детектора составляет около 40 метров. Детектор окружен примерно 11000 фотоумножителей, детектирующих вспышки черенковского излучения. В качестве оценки заметим, что для этого канала детектирования есть порог по энергии нейтрино: энергия нейтрино должна быть достаточной, чтобы в результате комптоновского рассеяния на электроне разогнать электрон до релятивистской скорости. Для рассеяния назад имеем для изменения энергии нейтрино

$$\frac{hc}{E} - \frac{hc}{E_0} = 2\Lambda_e, \quad E = \frac{hc}{2\Lambda_e + \frac{hc}{E_0}} = \frac{E_0 mc^2}{2E_0 + mc^2}$$

и для кинетической энергии электрона $T = E_0 - E = \frac{2E_0^2}{2E_0 + mc^2}$. Пороговая кинетическая энергия

$$T_{\text{пор}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-1/n^2}} - mc^2, \quad \text{где } n \text{ — показатель преломления. Для воды } n=1.33 \text{ и}$$

$T_{\text{пор}} \approx 0.51 mc^2$, откуда пороговая энергия детектируемых нейтрино $0.82 mc^2 \approx 0.4 \text{ МэВ}$. Реальный порог оказывается на порядок выше из-за необходимости исключать фон. В результате нейтрино первой протон-протонной реакции оказываются необнаружимыми: порог детектора Супер-Камиоканде составляет около 4 МэВ и он обнаруживает борные нейтрино из маловероятной ppIII ветви.

2. Второй способ обнаружения нейтрино основан на реакции, обратной бета-распаду: при взаимодействии с нейтрино меняется один из нуклонов и образуется небольшое количество другого химического элемента. Эта реакция возможна только для электронных нейтрино: $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$. Использовались две таких схемы реакции:

⁵ Черенковское излучение (излучение Вавилова-Черенкова, эффект Вавилова-Черенкова) — это характерное свечение, возникающее при прохождении через среду частицы, скорость которой превышает фазовую скорость света в среде. Обнаружено в 1934 молодым советским физиком Павлом Алексеевичем Черенковым (1904-1990, на момент открытия ему было 30 лет), объяснено советскими физиками Таммом и Франком в 1937 году. Черенков, Тамм и Франк были удостоены за это открытие нобелевской премии по физике 1958 года.

хлор-аргоновая (порог 0.814 МэВ) и галлий-германиевая (порог 0.233 МэВ). По этому принципу работал первый детектор солнечных нейтрино, собранный в конце 60-х годов в Брукхэвенской национальной лаборатории США. Детектор состоял из примерно 450 м³ тетрахлорэтилена C₂Cl₄, жидкого реагента обычно применяемого в химчистке, погруженных в шахту на глубину примерно 1400 метров. При превращении одного нейтрона в протон из ядра ³⁷Cl образуется ядро радиоактивного изотопа аргона ³⁷Ar. Танк с реагентом продувался несколько раз в неделю гелием, после чего полученный после продувки газ анализировался на наличие изотопа аргона.

3. Нейтральный канал в тяжеловодном детекторе. Нейтрино может разбить ядро дейтерия, которое распадается на протон и нейтрон. Нейтрон может быть захвачен ядром дейтерия (с образованием ядра трития), при этом испускается гамма-квант с энергией около 6 МэВ, детектируемый датчиками. Направление излучения гамма-кванта не связано с направлением движения нейтрино. Этот метод одинаково чувствителен ко всем трем типам нейтрино. Детектор такого типа установлен в нейтринной обсерватории Судбери в Канаде (запущен в 1999, рисунок 8). Детектор состоит из 1000 тонн тяжелой воды, находящихся внутри 6-метровой акриловой сферы, и окружен 9600 фотоумножителями. Весь детектор находится в искусственной пещере в конце полуторакилометровой шахты. Эта пещера считается крупнейшей искусственной пещерой, в ней поддерживается уровень чистоты воздуха на уровне стандартов используемых в «чистых комнатах» микроэлектронных производств: в самой шахте на уровне не более 3000 частиц размером более 1мкм на 1м³, в пещере детектора на уровне не более 1000 частиц размером более 1мкм на 1м³ (обычный комнатный воздух содержит около 8000000 частиц размером более 1мкм на 1м³).
4. Наконец, имеется заряженный канал в тяжеловодном детекторе. Это обратная первая реакция протон-протонной цепочки: $\nu_e + {}^2_1D \rightarrow {}^1_1H + {}^1_1H + e^-$. Реакция также чувствительна только к электронным нейтрино, детектируется черенковское излучение от получившего почти всю энергию нейтрино электрона. Порог детектирования позволяет обнаруживать только борные нейтрино.
5. Отметим дополнительно уникальный канал детектирования мюонных антинейтрино в черенковском детекторе. При взаимодействии мюонного антинейтрино с ядром возможна реакция $\bar{\nu}_\mu + {}^1_1H \rightarrow \mu^+ + {}^1_0n$. При этом черенковское излучение релятивистского мюона оказывается отличным от электронного, что позволяет выделять такие события.

Нейтринный эксперимент T2K (Япония). Исследование осцилляций нейтрино.

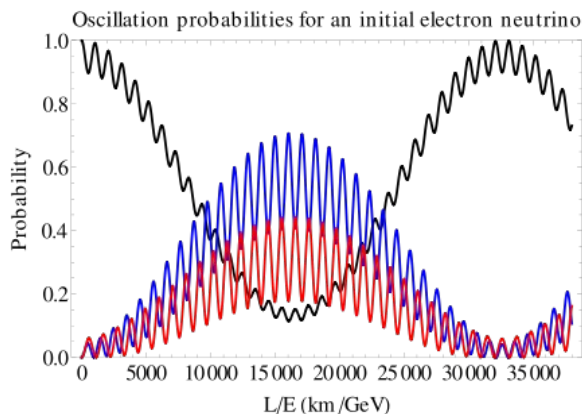


Рисунок 9: Модельный расчёт вероятности обнаружения мюонного (голубая кривая) и тау-нейтрино (красная) в потоке изначально чисто электронных нейтрино как функции параметра L/E . С сайта [14].



Рисунок 10: Положение исходной и конечной точек эксперимента T2K (Tokai to Kamioka). С сайта [15].

Эффект осцилляции нейтрино [14] был предложен теоретически Б.Пантекорво в 1957 году. Этот эффект связан с необычным квантовым свойством частиц: если частица находится в состоянии, являющемся квантовомеханической «смесью» двух состояний с разным значениями какого-то параметра, то при измерении этого параметра будут наблюдаться периодические колебания измеряемой величины. Мы сталкивались с таким явлением при рассмотрении задачи об осцилляции частицы между двумя близко расположенными квантовыми ямами. В случае нейтрино такой осциллирующей величиной является аромат (электронное, мюонное или тау-нейтрино). Теория предсказывает, что для существования осцилляций необходимо, чтобы у нейтрино были массы, причём различные для всех трёх типов нейтрино. Первые экспериментальные доказательства пришли из наблюдений за солнечными нейтрино (проблема солнечных нейтрино [16]), показавших что часть электронных нейтрино, образующихся в протон-протонной реакции, по пути от Солнца до Земли превращается в нейтрино других типов. После этого естественно встал вопрос в измерении эффекта осцилляций в контролируемом «лабораторном» эксперименте.

Такой эксперимент ставился в нескольких лабораториях (MINOS [17] с источником нейтрино в Фермилаб и детектором в 735 км в Миннесоте; OPERA [18] с источником нейтрино в ЦЕРН и детектором в 730 км в Гран-Сассо (Италия); T2K [15] с источником нейтрино в Токай и детектором Супер-Камиоканде [19] в 295 км от источника) и все эксперименты пришли к выводу о подтверждении эффекта нейтринных осцилляций.

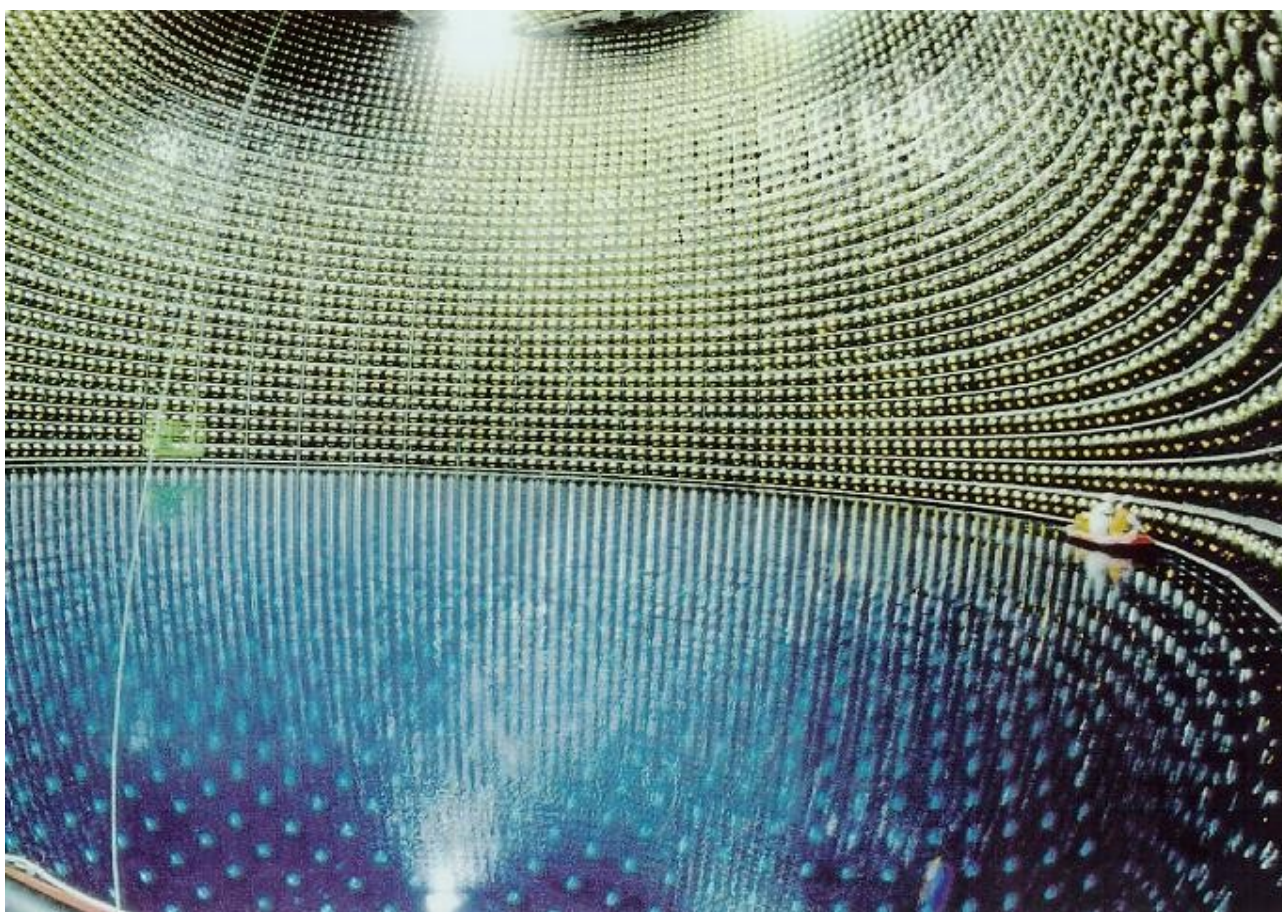


Рисунок 11: Частично заполненный водой детектор Супер-Камиоканде. С сайта [19].

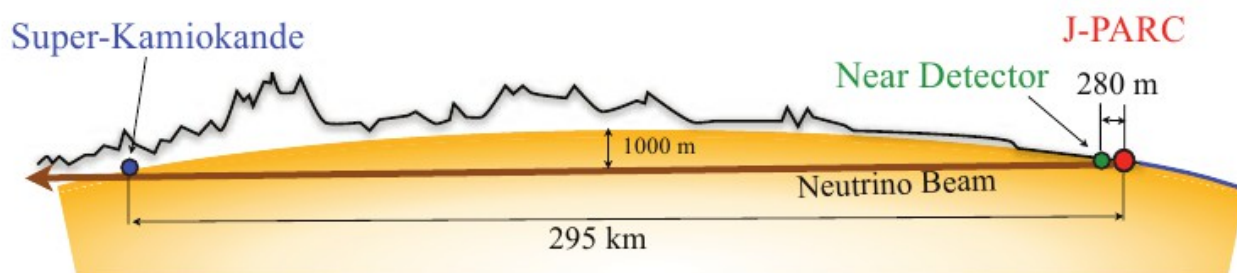


Рисунок 12: Направление пучка нейтрино в эксперименте T2K (с сайта [15]).

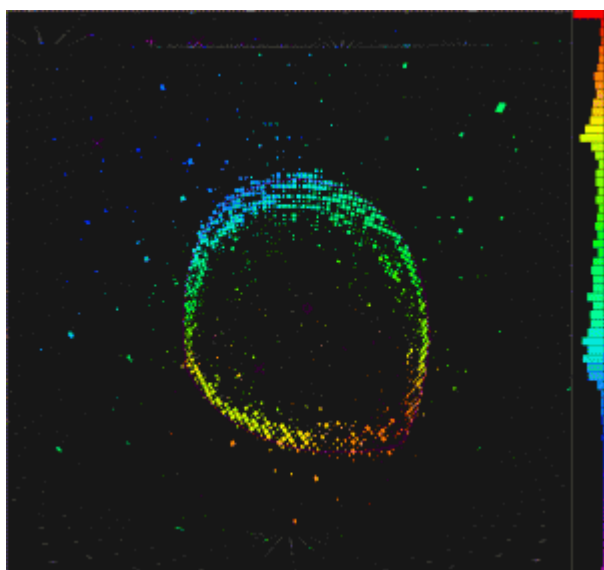


Рисунок 14: Характерное кольцо черенковского излучения от мюона. С сайта [15].

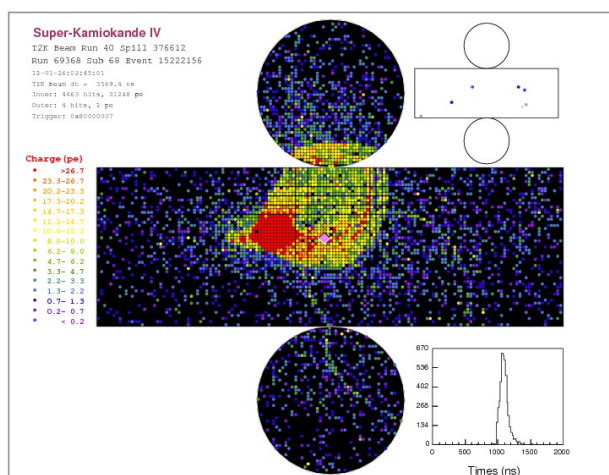


Рисунок 13: Обнаружение мюонного нейтрино в детекторе Супер-Камиоканде. Первое мюонное нейтрино эксперимента T2K обнаруженное после приостановке эксперимента из-за землетрясения и цунами 2011 года. С сайта [15]

Эксперимент T2K проводится в Японии международной группой, в составе которой есть и Россия. Детектор и источник нейтрино были разнесены на 295 километров (рисунок 12).

В качестве детектора используется знаменитый детектор Супер-Камиоканде (рисунок 11). В детекторе Супер-Камиоканде находится 50000 тонн чистой воды, заключённых в цилиндрический сосуд высотой 41.4 метра и диаметром 39.3 метра, окружённый 11200 фотоэлектронными умножителями для детектирования вспышек черенковского излучения. Детектор находится на глубине 1000 метров под землёй. Взаимодействие нейтрино с электроном может привести к образованию частицы, движущейся быстрее скорости света в среде, которая теряет энергию характерным черенковским излучением. Этой частицей может быть либо электрон, выбитый из молекулы, либо мюон, образующийся при взаимодействии мюонного нейтрино с протоном или нейтроном. По анализу этого излучения можно восстановить направление движения, энергию и тип нейтрино.

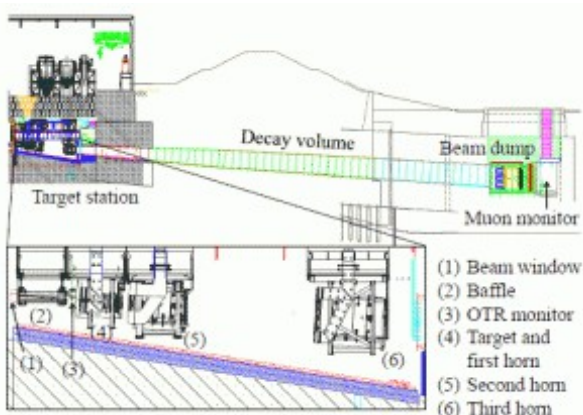


Рисунок 15: Схема источника нейтрино в эксперименте T2K. С сайта [15].

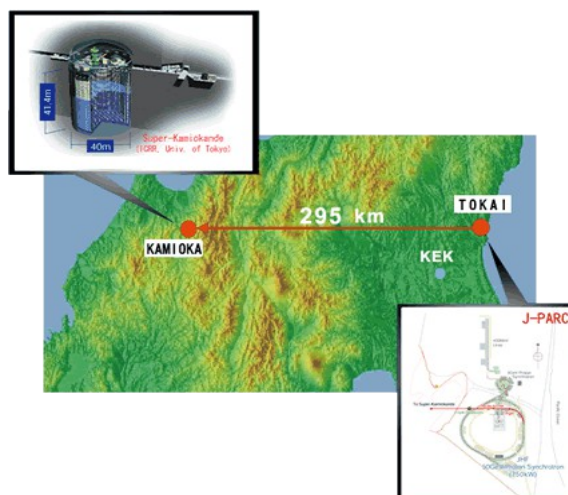


Рисунок 16: Карта расположения детектора и нейтринного источника в эксперименте T2K. С сайта [15].

В эксперименте T2K источником мюонных нейтрино являлся распад производимых на протонном ускорительном комплексе J-PARC (Japan Proton Accelerator Complex) пионов (рисунок 15). Максимальная энергия пучка протонов в главном кольце синхротрона J-PARC составляет 50 ГэВ.

Пучок протонов бомбардирует мишень, в которой образуются положительные и отрицательные пионы. При помощи магнитной фокусирующей системы отбираются пионы нужного знака (положительные для получения нейтрино, отрицательные для получения антинейтрино) и направляются в распадный тоннель (decay volume). Пионы распадаются с вероятностью 0.999877 на мюон соответствующего знака и мюонное нейтрино или антинейтрино ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$) за время 0.026 мксек. Мюоны в свою очередь распадаются на электрон (позитрон) и электронное и мюонное нейтрино ($\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$) за 2.2 мксек. Для обеспечения «моноароматности» пучка нейтрино длина распадного тоннеля подбирается так, что все почти все пионы распадаются в нём, а мюоны долетают до конца и тормозятся в стенке. При распаде быстрых пионов в силу законов сохранения поток нейтрино оказывается направлен в основном в направлении пучка, а при распаде остановившихся мюонов получается равномерное распределение их нейтрино по направлениям. Длина распадного тоннеля в эксперименте T2K составляет 96 метров (свет проходит за время распада пиона всего 7.8 метра, в 10 раз большая длина связана с релятивистским замедлением времени в движущейся системе отсчёта). В результате, J-PARC является источником почти чистого потока мюонных нейтрино, направленных на детектор Супер-Камиоканде.

Из-за эффекта нейтринных осцилляций часть мюонных нейтрино «превратится» в нейтрино других ароматов по достижении детектора. Таким образом, измеряемой величиной для проверки эффекта осцилляций является ослабление потока нейтрино по сравнению с ожидаемым. И эксперимент действительно показал исчезновение нейтрино [20]: за период с января 2010 по март 2011 ожидалось обнаружение 104 мюонных нейтрино, а было обнаружено всего 31. Эксперимент был прерван из-за землетрясения и цунами 2011 года, но в 2012 году он вновь начал работу и изучение свойств нейтрино продолжилось.

Одним из параметров, определяемых из измерения нейтринных осцилляций является разность масс нейтрино. Например, для мюонного и тау-нейтрино разность масс составляет $|\Delta m_{23}| \sim 0.05 \text{ эВ}$. Для сравнения отметим, что даже для электронного нейтрино экспериментально полученная верхняя оценка массы составляет $\sim 2 \text{ эВ}$ (для мюонного 0.2 МэВ, для тау-нейтрино 15 МэВ), то есть вопрос о точном определении массы нейтрино остаётся открытым (и видимо останется ещё надолго).

Решение модельной задачи о нейтринных осцилляциях

Рассмотрим упрощенную задачу, учитывающую всего два аромата нейтрино: электронный и мюонный. Гипотеза смешивания ароматов заключается в том, что нейтрино рождаются и участвуют во всех взаимодействиях как частицы с определённым ароматом, но на самом деле они являются суперпозицией некоторых квантовых состояний, которые мы назовём истинными нейтрино. Итак, подразумевая далее под символом нейтрино обозначение волновой функции соответствующего состояния мы можем записать в момент времени $t=0$ для электронного и мюонного состояний:

$$\begin{cases} \nu_e = \cos \Theta \nu_1 + \sin \Theta \nu_2 \\ \nu_\mu = -\sin \Theta \nu_1 + \cos \Theta \nu_2 \end{cases}$$

где *угол смешивания* Θ параметризует перемешивание волновых функций истинных нейтрино. Пусть \hat{H} - гамильтониан истинного нейтрино, такой что $\hat{H} \nu_1 = E_1 \nu_1$, $\hat{H} \nu_2 = E_2 \nu_2$. Так как электронное и мюонное состояния не являются собственными, то волновая функция изначально соответствующая (для эксперимента T2K) мюонному нейтрино будет зависеть от времени. Можно непосредственно проверить, что нестационарному уравнению Шредингера $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$ удовлетворяет функция вида:

$$\Psi = -\sin \Theta e^{iE_1 t/\hbar} \nu_1 + \cos \Theta e^{iE_2 t/\hbar} \nu_2 .$$

Это выражение может быть выражено через наблюдаемые функции ν_e и ν_μ :

$$\Psi(t) = \frac{1}{2} \sin 2\Theta (e^{iE_2 t/\hbar} - e^{iE_1 t/\hbar}) \nu_e + (\sin^2 \Theta e^{iE_1 t/\hbar} + \cos^2 \Theta e^{iE_2 t/\hbar}) \nu_\mu .$$

Видно, что при $t=0$ имеем чисто состояние типа мюонного нейтрино, потом возникает смешанное состояние, через некоторое время опять будет состояние типа чисто мюонного нейтрино и так далее. Амплитуда колебаний определяется углом смешивания, для электронного и мюонного нейтрино $\sin^2(2\Theta) \approx 0.8$.

Согласно общим правилам квантовой механики вероятность обнаружения нейтринного аромата равна квадрату модуля соответствующего коэффициента, поэтому вероятность обнаружения электронного нейтрино в потоке изначально чисто мюонных нейтрино равна

$$w_e = \frac{1}{4} \sin^2(2\Theta) \left(2 - 2 \cos \frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar} \right) = \sin^2(2\Theta) \sin^2 \frac{(E_2 - E_1)t}{2\hbar} ,$$

а вероятность обнаружения мюонного нейтрино:

$$w_\mu = \sin^4 \Theta + \cos^4 \Theta + \frac{1}{2} \sin^2 2\Theta \cos \frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar} = 1 - \sin^2(2\Theta) \sin^2 \frac{(E_2 - E_1)t}{2\hbar} .$$

Обе вероятности осциллируют с периодом $T = \frac{\hbar}{E_2 - E_1}$.

Для нахождения разности энергий заметим, что при превращениях нейтрино должен сохраняться импульс, а вот энергия несобственного состояния точно не определена. Тогда, учитывая, что масса нейтрино мала, имеем $E_{1,2} = \sqrt{(pc)^2 + m^2 c^4} \approx pc + \frac{1}{2} \frac{m^2 c^4}{pc}$. Откуда для

разности энергий $E_2 - E_1 \approx \frac{(m_2^2 - m_1^2)c^4}{2E}$. Наконец, так как наблюдение происходит не «во времени», а «в пространстве» можно пересчитать наш ответ в пространственный период нейтринных осцилляций: $L = cT = \frac{2E\hbar}{(m_2^2 - m_1^2)c^3}$, либо же можно выразить вероятности как

функцию расстояния между источником и детектором. Измерение периода осцилляция позволяет определить разность квадратов масс нейтрино.