Лекция 5.

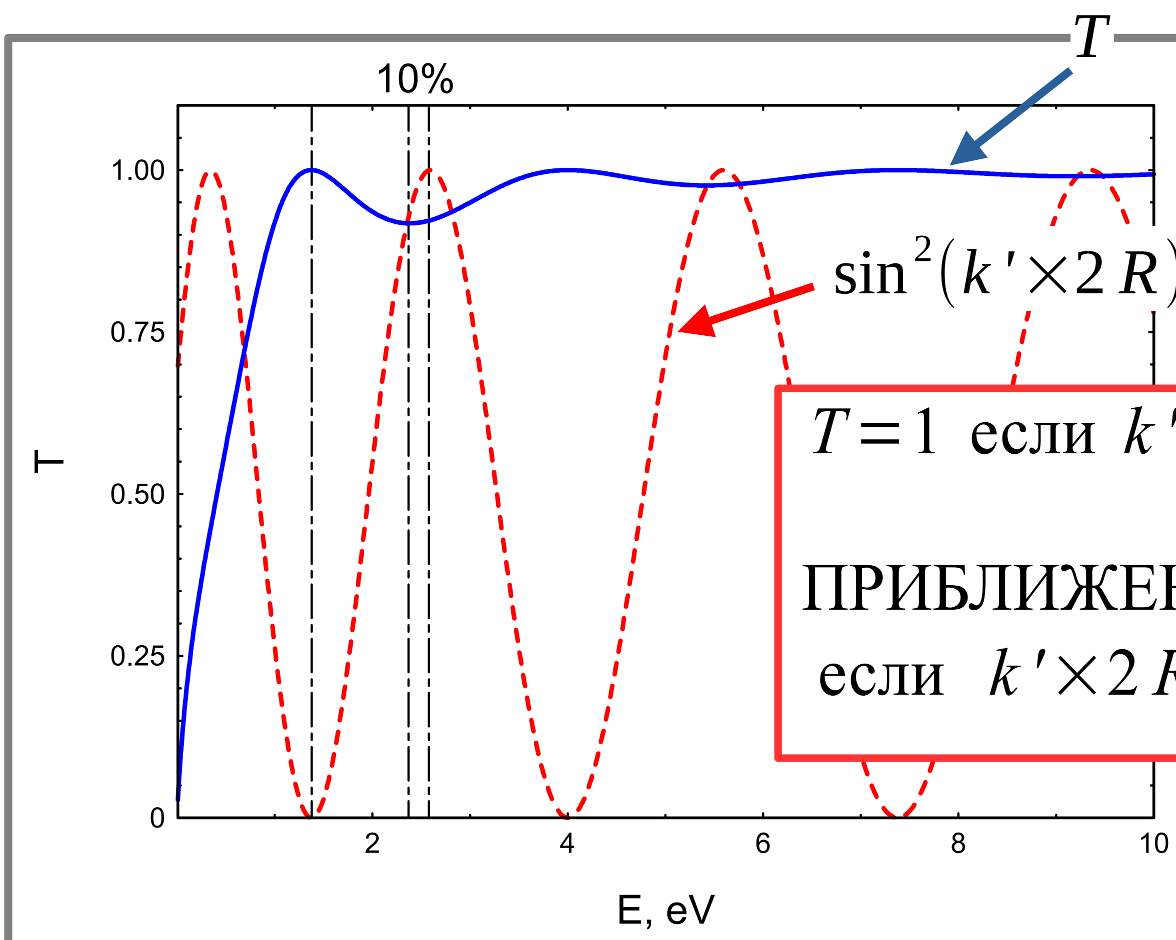
- Гармонический осциллятор. Туннельные осцилляции.
- Оценочные и приближенные решения для квантовых ям.
- Момент импульса в квантовой механике. Движение в центральном поле.

Небольшое математическое уточнение...

$$T(E)=\frac{1}{1+\frac{U_0^2}{4E\left(E+|U_0|\right)}\sin^2\left(\frac{\sqrt{2m\left(E+|U_0|\right)}}{\hbar}\times 2R\right)}$$

$2R=5\,\text{Å}$

$|U_0|=2$ эВ

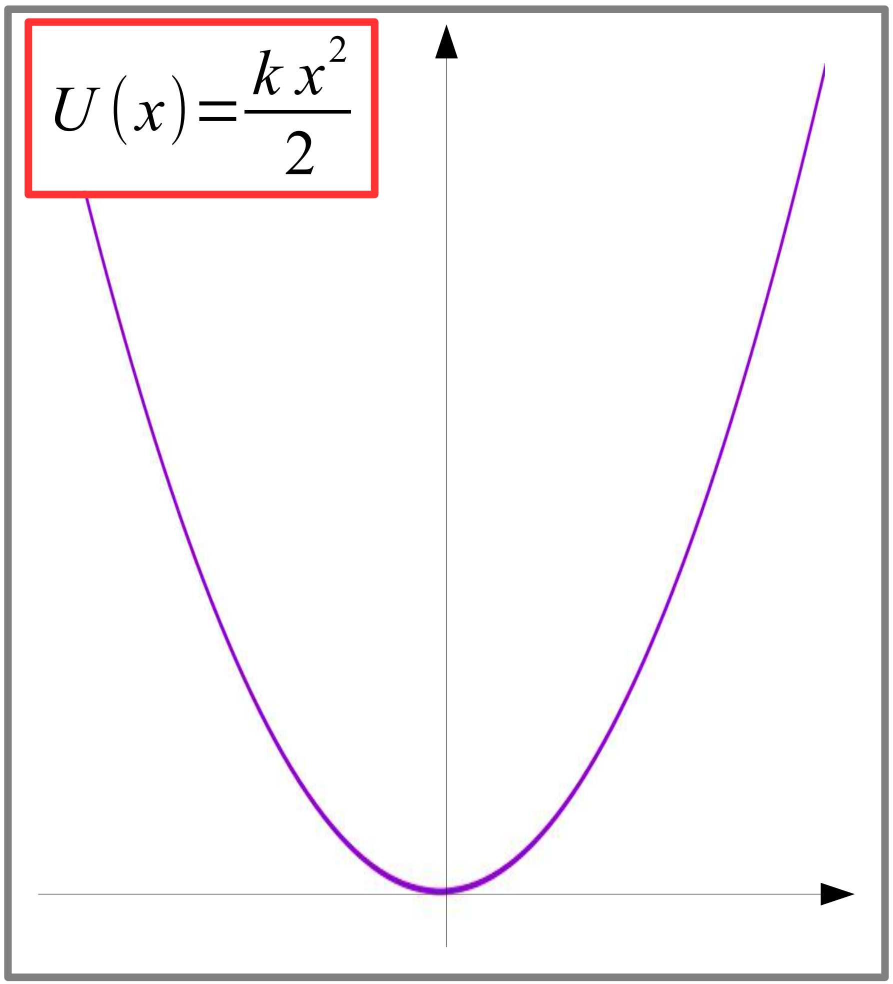


$T=1$ если $k'\times 2R=\pi n$

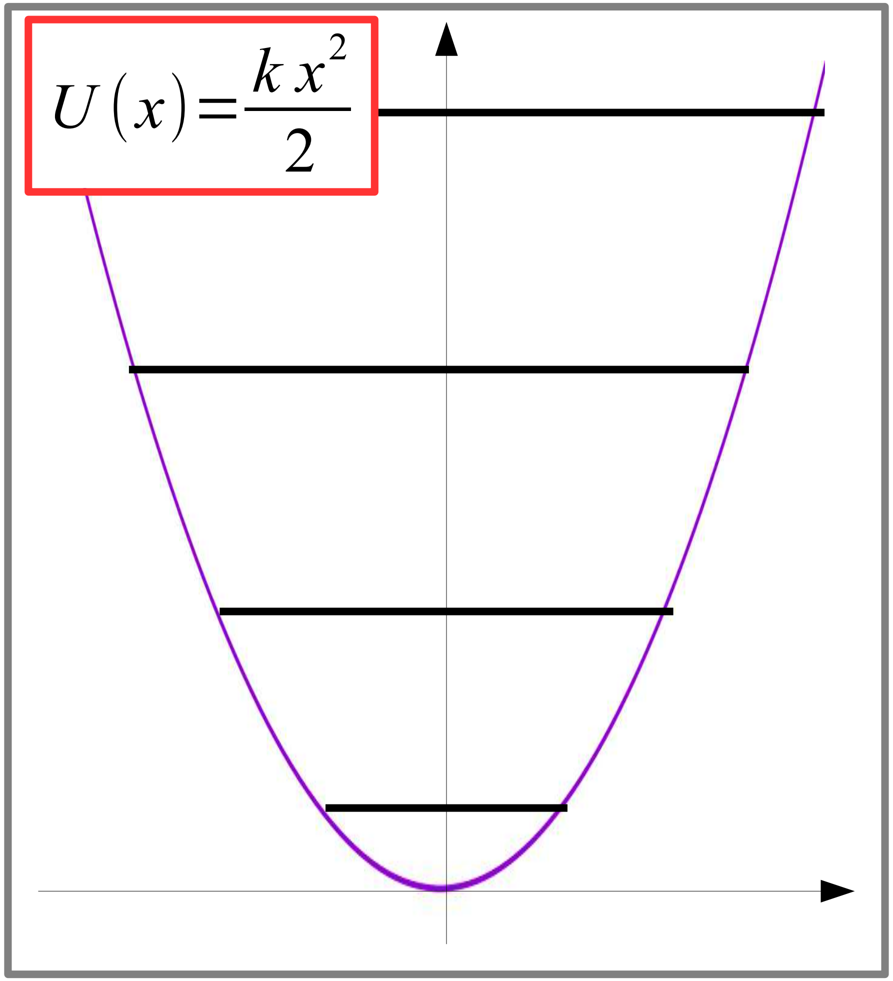
ПРИБЛИЖЕННО $min\,T$ если $k'\times 2R=\frac{\pi}{2}+\pi n$

Часть 1. Квантовый осциллятор

Гармонический осциллятор в 1D



Гармонический осциллятор в 1D



$$U(x) = \frac{k x^2}{2}$$

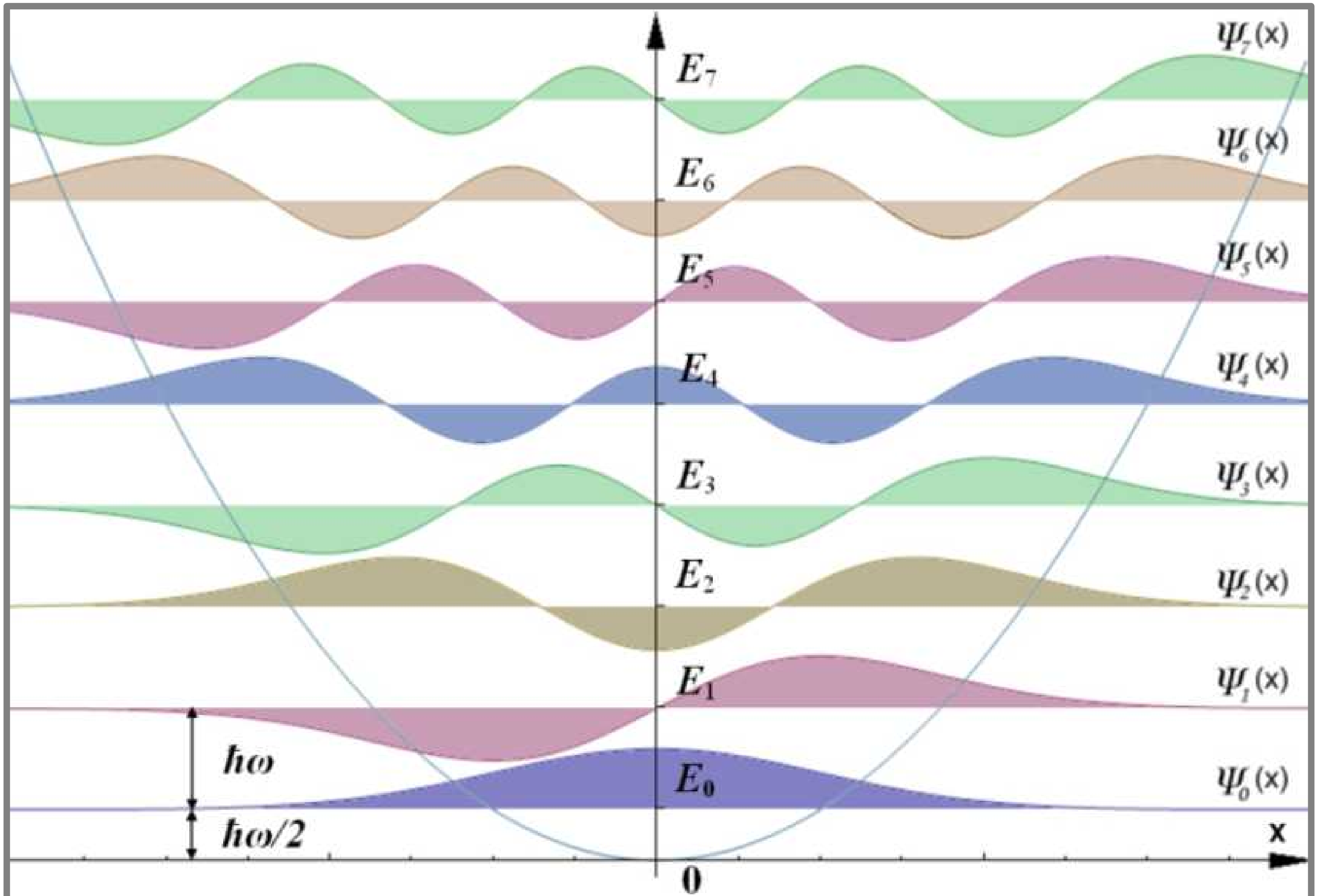
- Точно решаема в эрмитовых функциях
- Эквидистантные уровни

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Имеются «нулевые колебания»

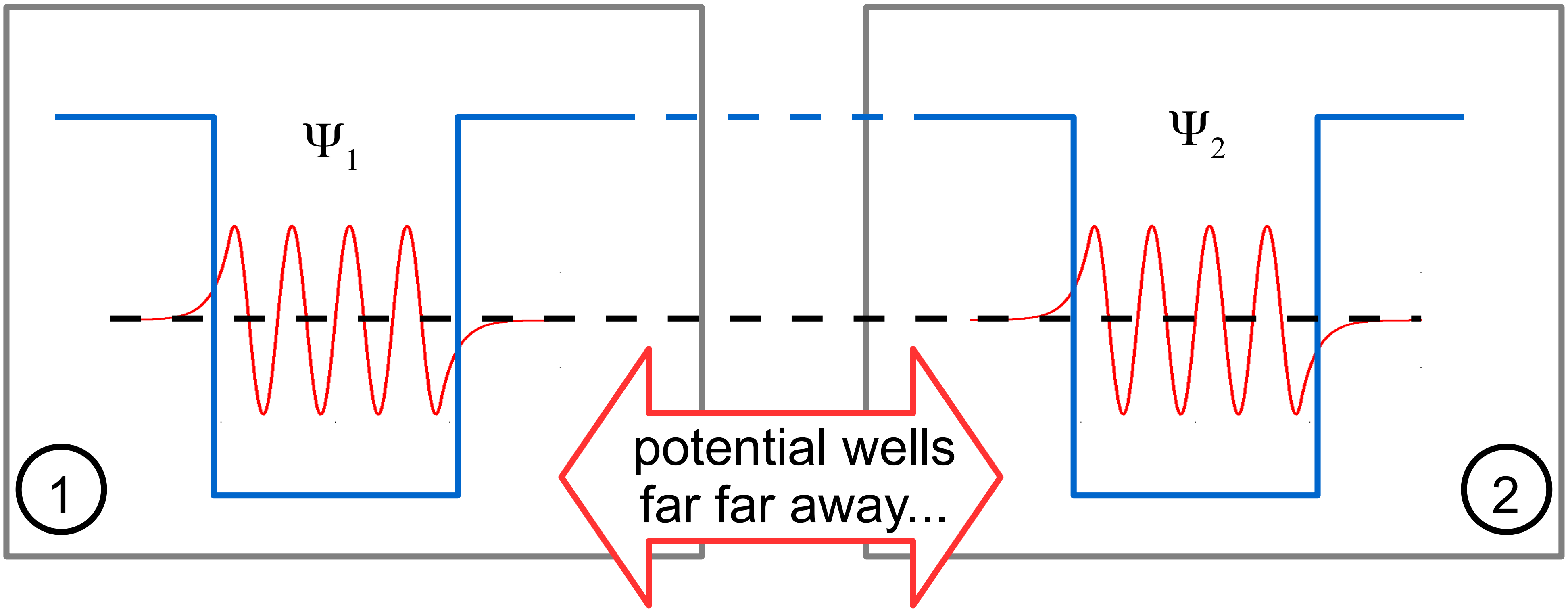
Схематический вид волновых функций одномерного осциллятора



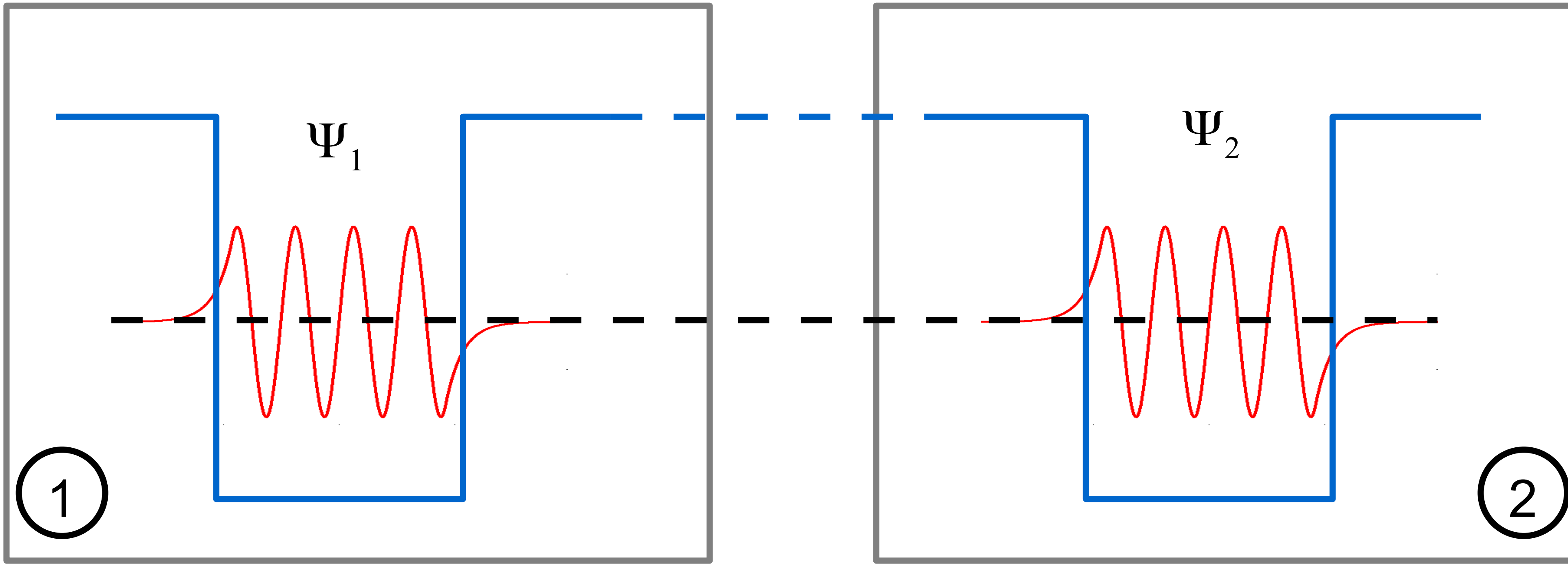
https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_harmonic_oscillator

Часть 2: Туннельные осцилляции в связанных квантовых ямах

Туннельные осцилляции в связанных ямах



Туннельные осцилляции в связанных ямах



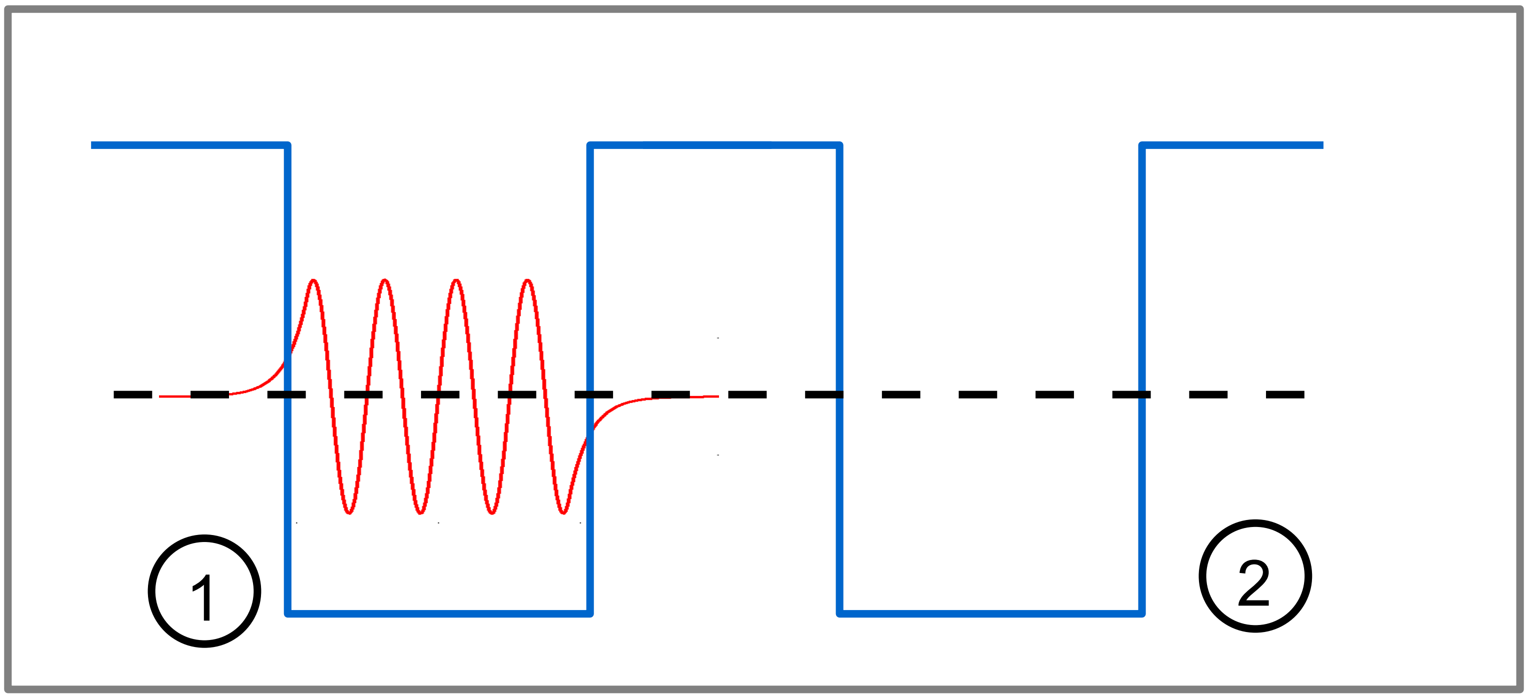
$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x)$$

$$\hat{H}_0 \Psi_1 = E_0 \Psi_1$$

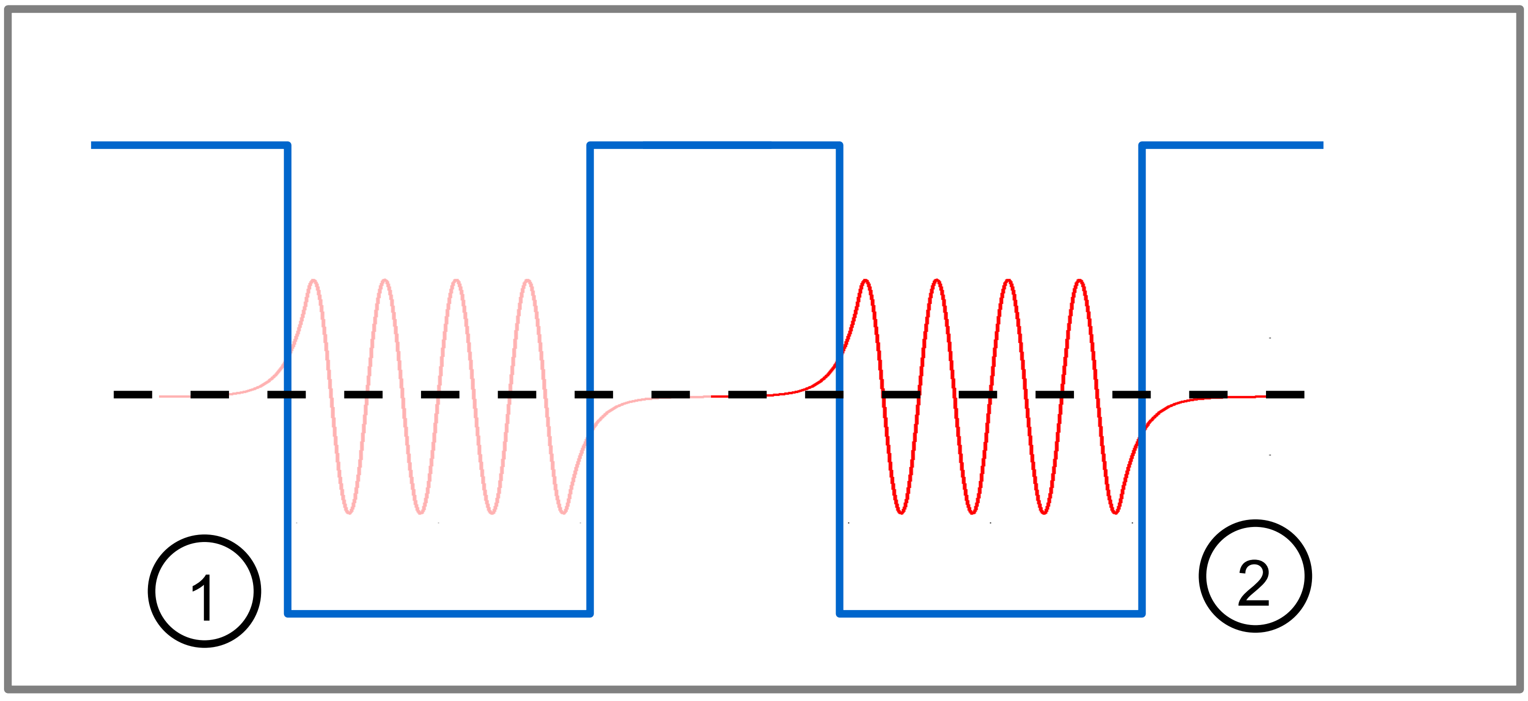
$$\hat{H}_0 \Psi_2 = E_0 \Psi_2$$

двукратно вырожденный уровень

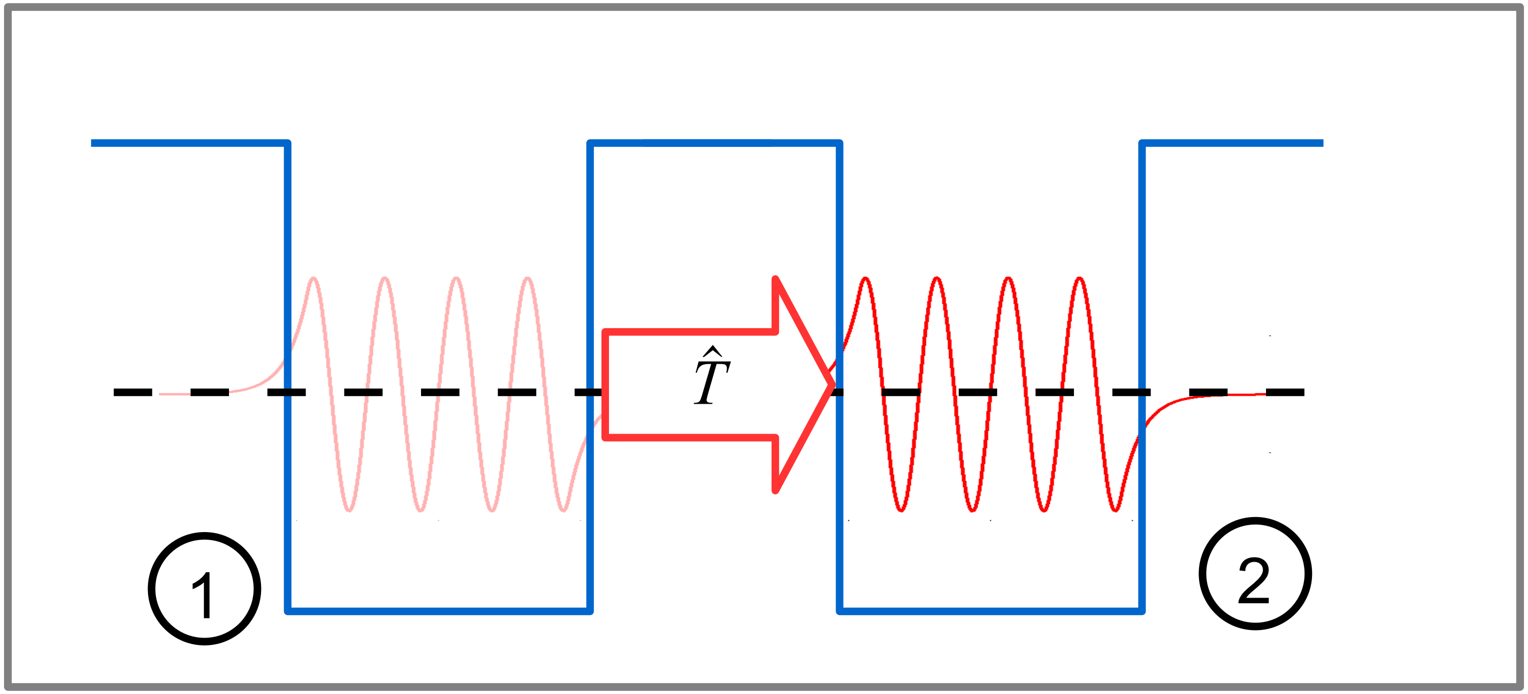
Туннельные осцилляции в связанных ямах



Туннельные осцилляции в связанных ямах

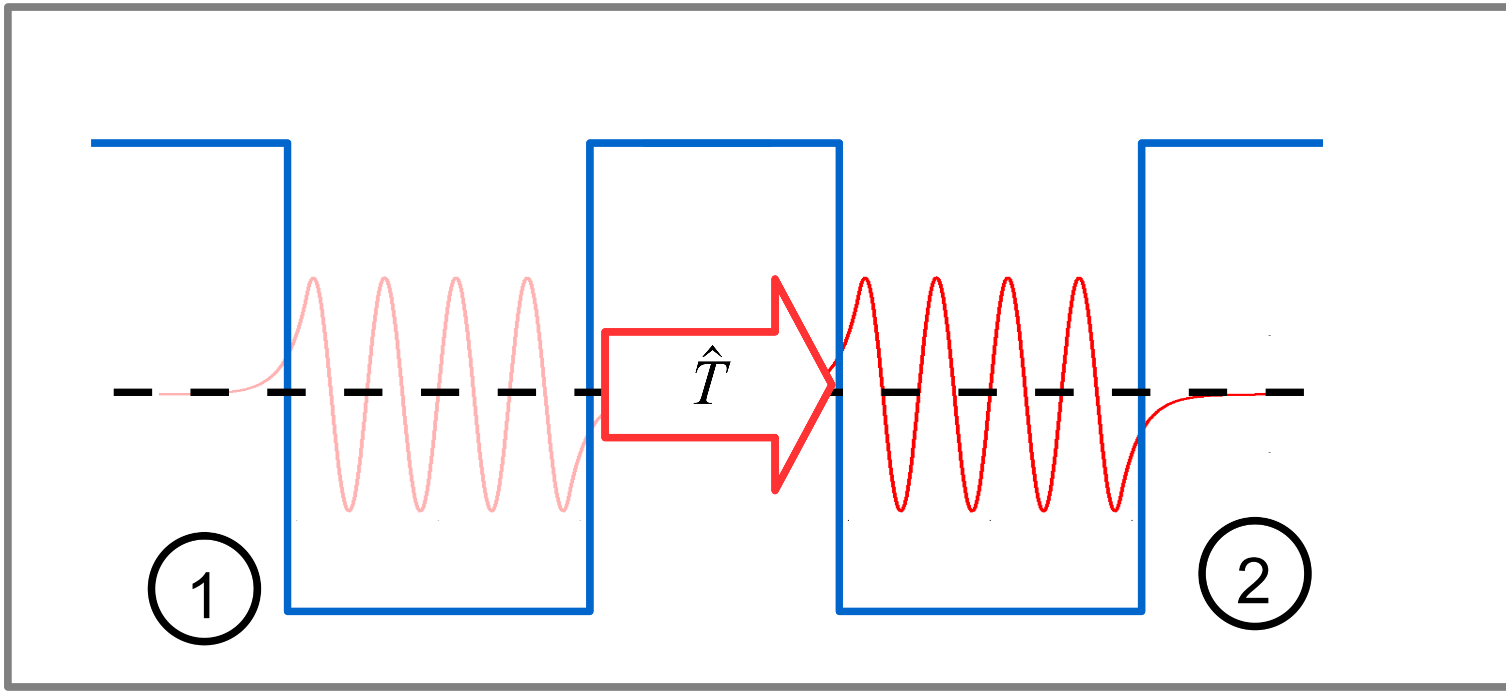


Туннельные осцилляции в связанных ямах



$$\boxed{\hat{T}\Psi_{1,2} = \hbar T \Psi_{2,1}}$$

Туннельные осцилляции в связанных ямах



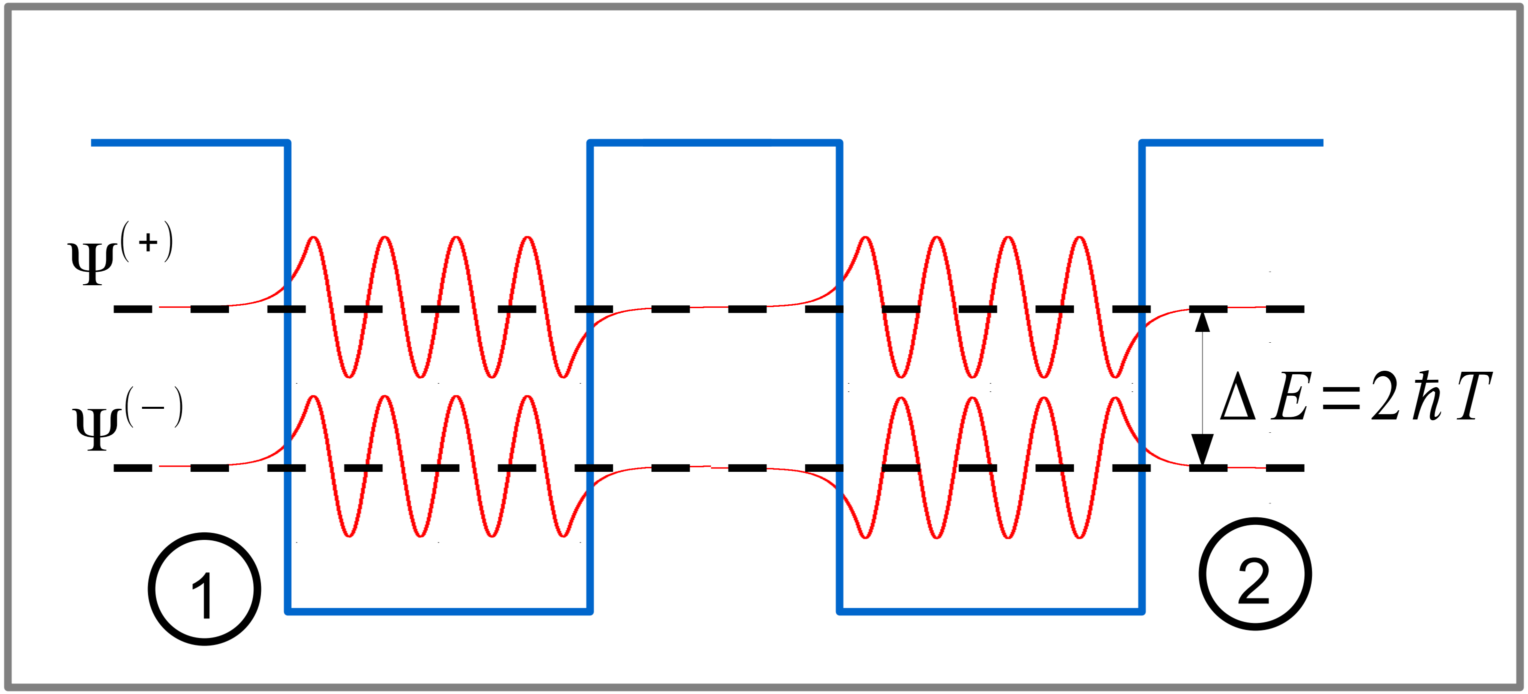
$$\boxed{\hat{T}\Psi_{1,2}=\hbar T\Psi_{2,1}}$$

$$\boxed{\left(\hat{H}_0+\hat{T}\right)\Psi_1=E_0\Psi_1+\hbar T\Psi_2}$$

$$\Psi^{(\pm)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_1\pm\Psi_2\right)$$

$$\left(\hat{H}_0+\hat{T}\right)\Psi^{(\pm)}=E^{(\pm)}\Psi^{(\pm)}$$

Туннельные осцилляции в связанных ямах



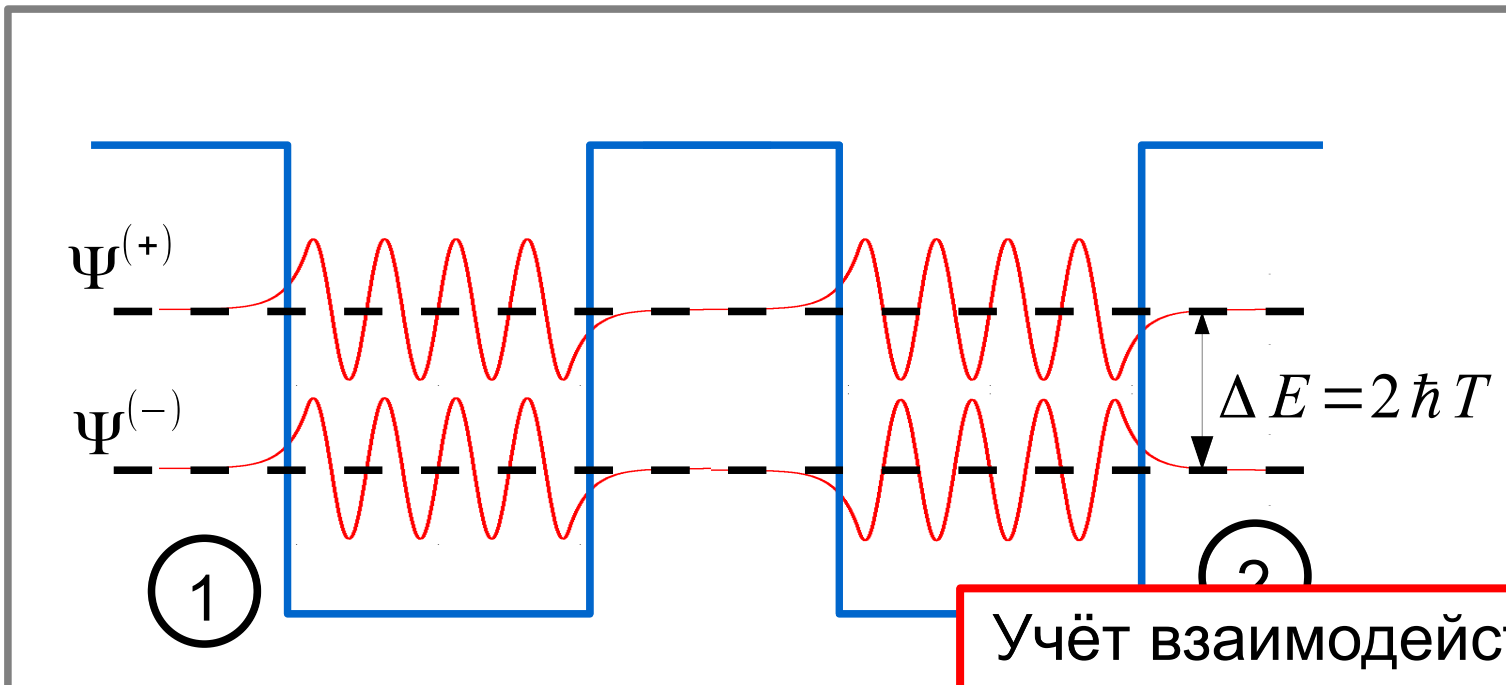
$$\Psi^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_1 \pm \Psi_2\right)$$

$$\left(\hat{H}_0 + \hat{T}\right)\Psi^{(\pm)} = E^{(\pm)}\Psi^{(\pm)}$$

$$E^{(\pm)} = E_0 \pm \hbar T$$

по осцилляторной теореме меньшую энергию имеет состояние без «дополнительных» нулей в.ф.

Туннельные осцилляции в связанных ямах



$$\Psi^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_1 \pm \Psi_2\right)$$

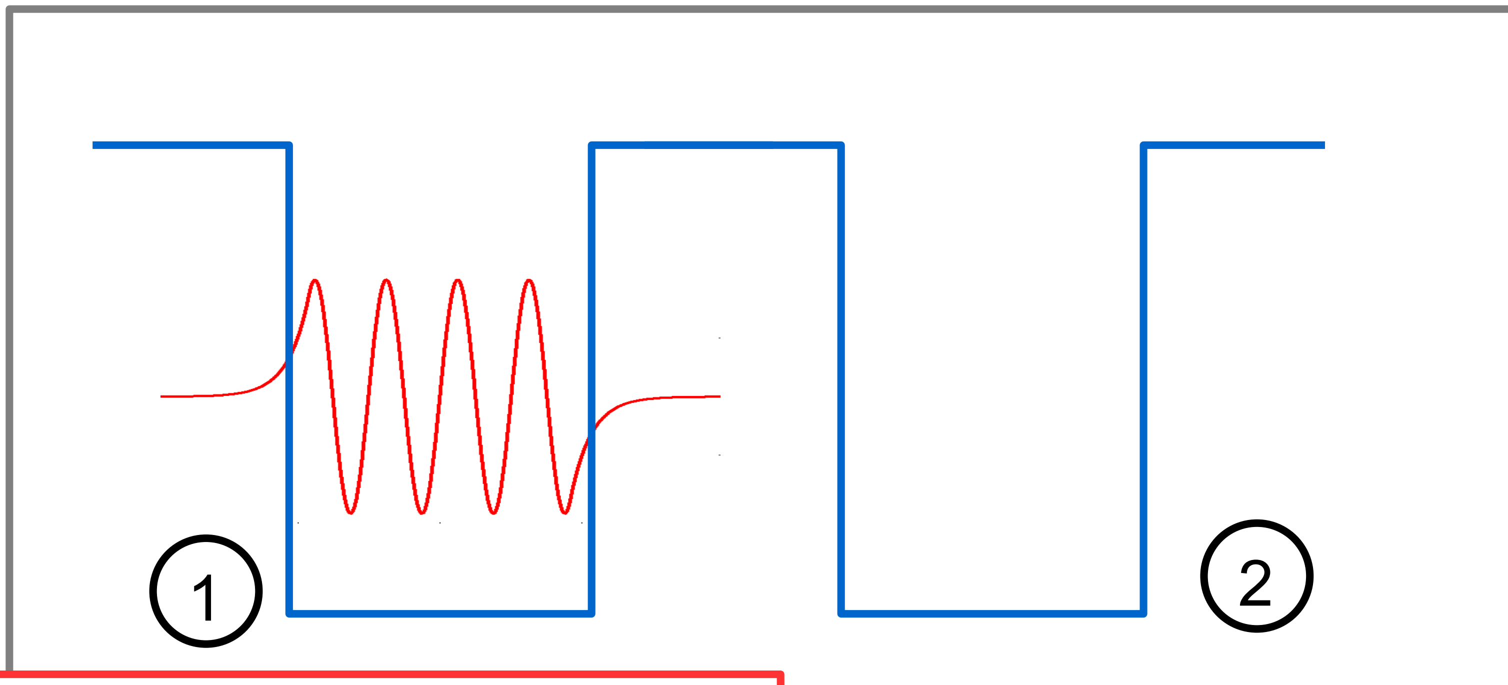
$$\left(\hat{H}_0 + \hat{T}\right)\Psi^{(\pm)} = E^{(\pm)}\Psi^{(\pm)}$$

$$E^{(\pm)} = E_0 \pm \hbar T$$

по осцилляторн
энергию име
«дополнительных» нулей в.ф.

Учёт взаимодействия, смешивающего состояния, снимает вырождение энергетического уровня

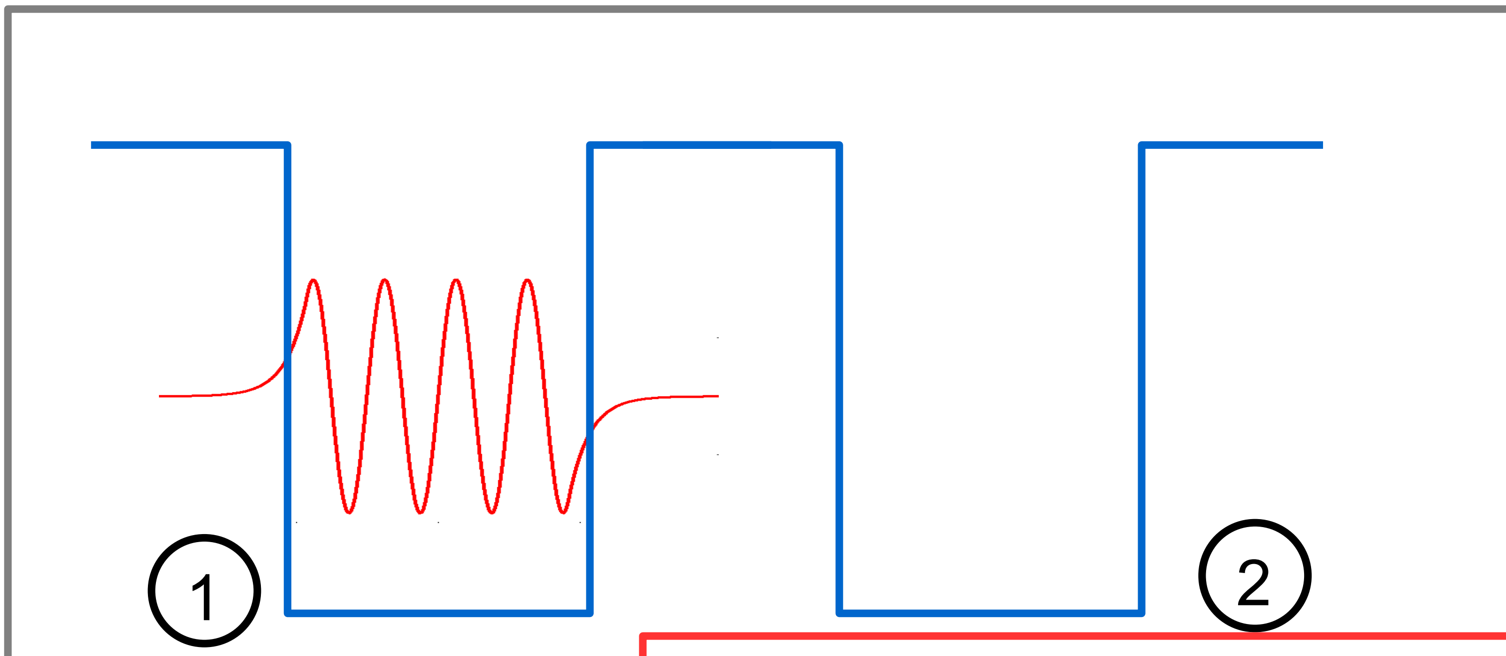
Туннельные осцилляции в связанных ямах



Экспериментатор «создает» в момент t=0 состояние

$$\Psi_1 = \frac{\Psi^{(+)} + \Psi^{(-)}}{\sqrt{2}}$$

Туннельные осцилляции в связанных ямах



Экспериментатор «создает»
момент t=0 состояние

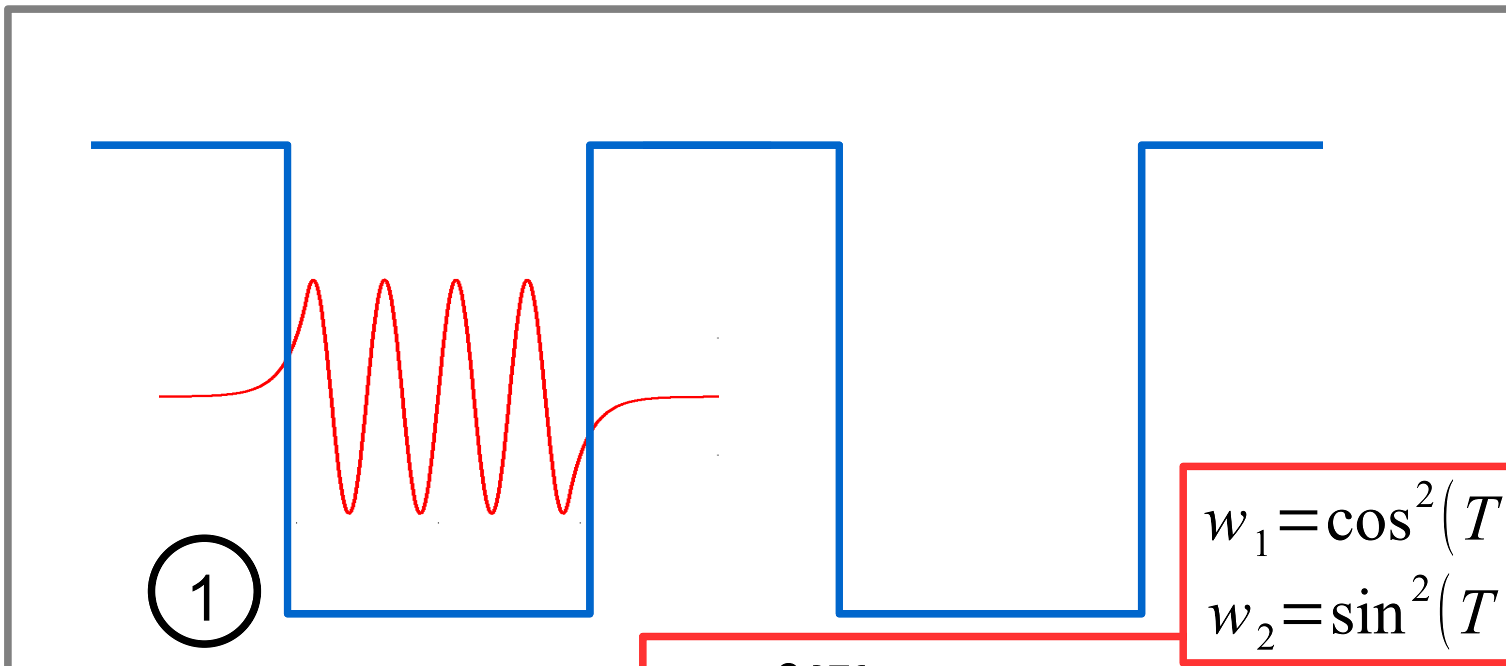
$$\Psi_1 = \frac{\Psi^{(+)} + \Psi^{(-)}}{\sqrt{2}}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\hat{H}_0 + \hat{T} \right) \Psi$$

$$\Psi(t=0) = \Psi_1$$

$$\Psi = e^{-i E_0 t/\hbar} \left[\Psi_1 \cos(T\,t) - i\,\Psi_2 \sin(T\,t) \right]$$

Туннельные осцилляции в связанных ямах



$$w_1 = \cos^2(T\,t)$$
$$w_2 = \sin^2(T\,t)$$

Экспериментатор «создает»
момент t=0 состояние

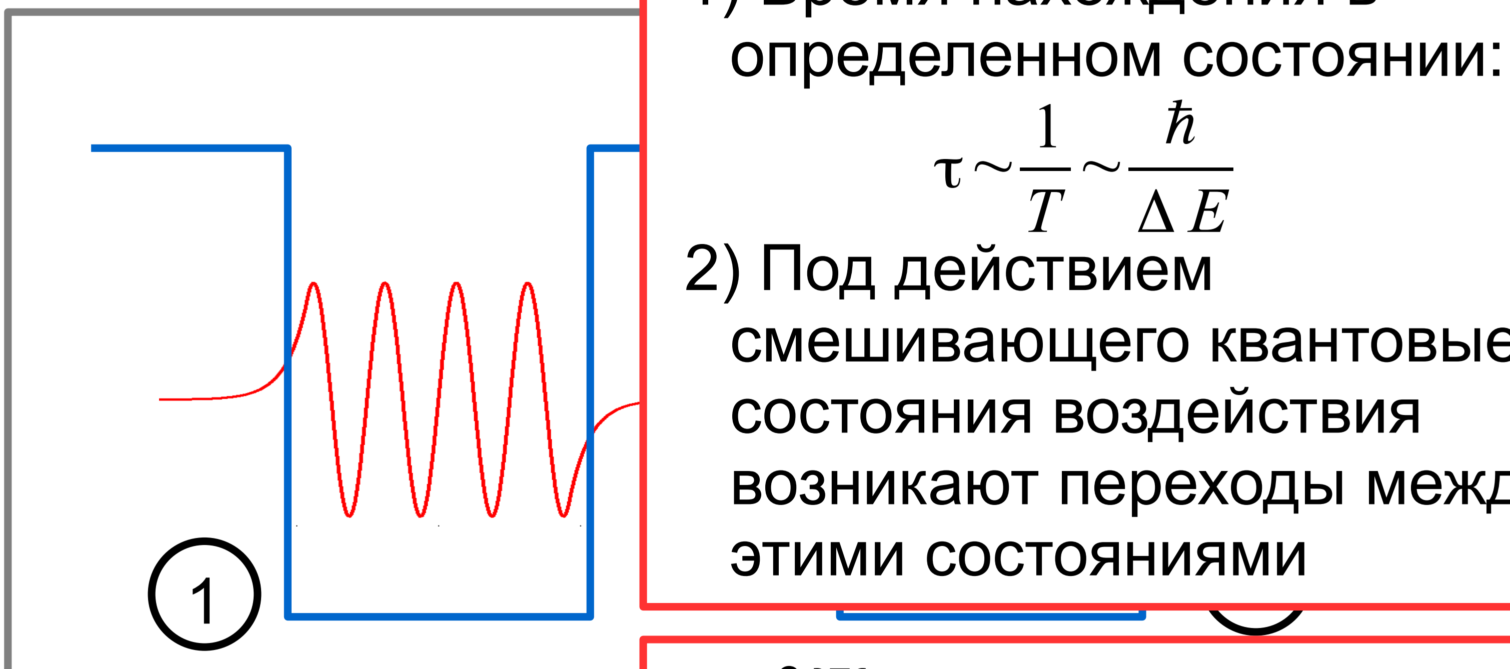
$$\Psi_1 = \frac{\Psi^{(+)} + \Psi^{(-)}}{\sqrt{2}}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\hat{H}_0 + \hat{T}\right)\Psi$$

$$\Psi(t=0) = \Psi_1$$

$$\Psi = e^{-i E_0 t/\hbar}\left[\Psi_1 \cos(T\,t) - i\,\Psi_2 \sin(T\,t)\right]$$

Туннельные осцилляции в связанных ямах



1) Время нахождения в определенном состоянии:

$$\tau \sim \frac{1}{T} \sim \frac{\hbar}{\Delta E}$$

2) Под действием смешивающего квантовые состояния воздействия возникают переходы между этими состояниями

Экспериментатор «создает» в момент t=0 состояние

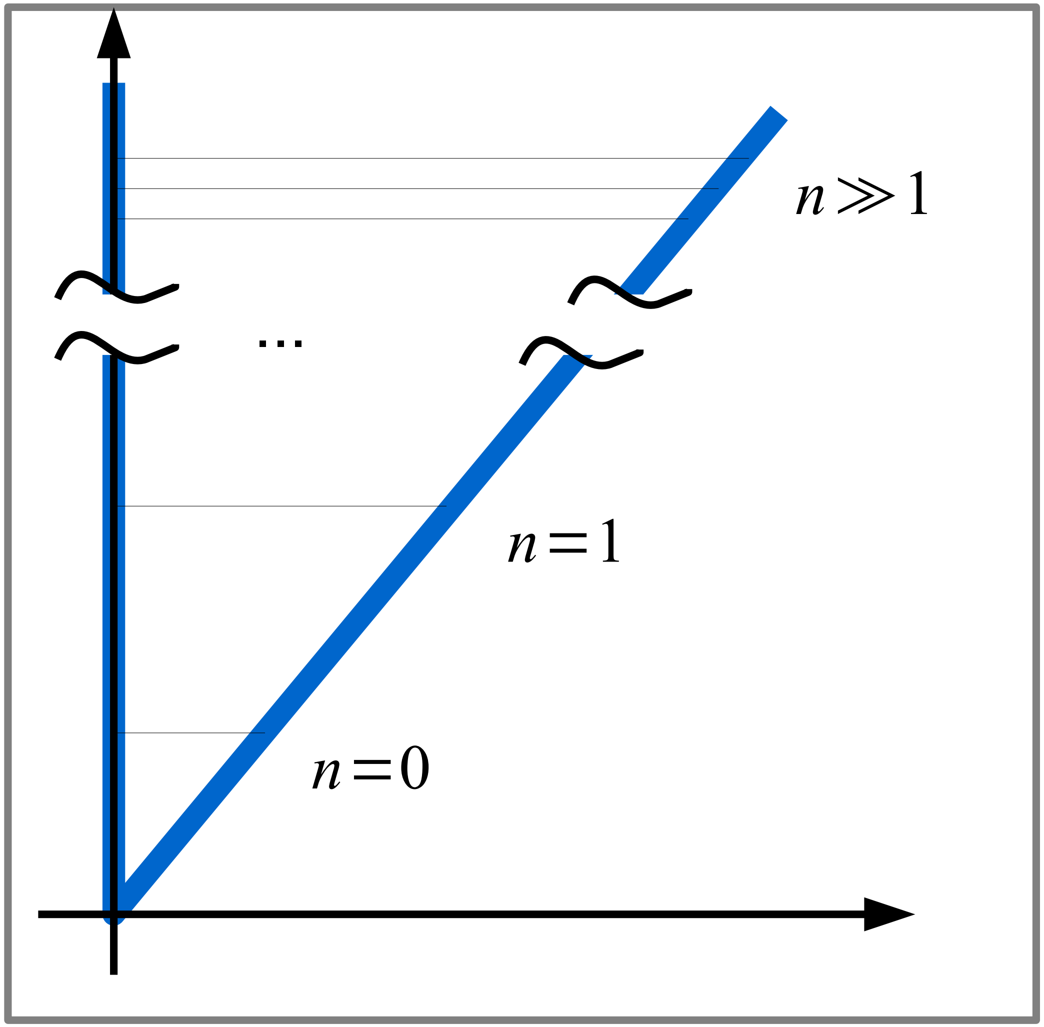
$$\Psi_1 = \frac{\Psi^{(+)} + \Psi^{(-)}}{\sqrt{2}}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\hat{H}_0 + \hat{T}\right)\Psi$$

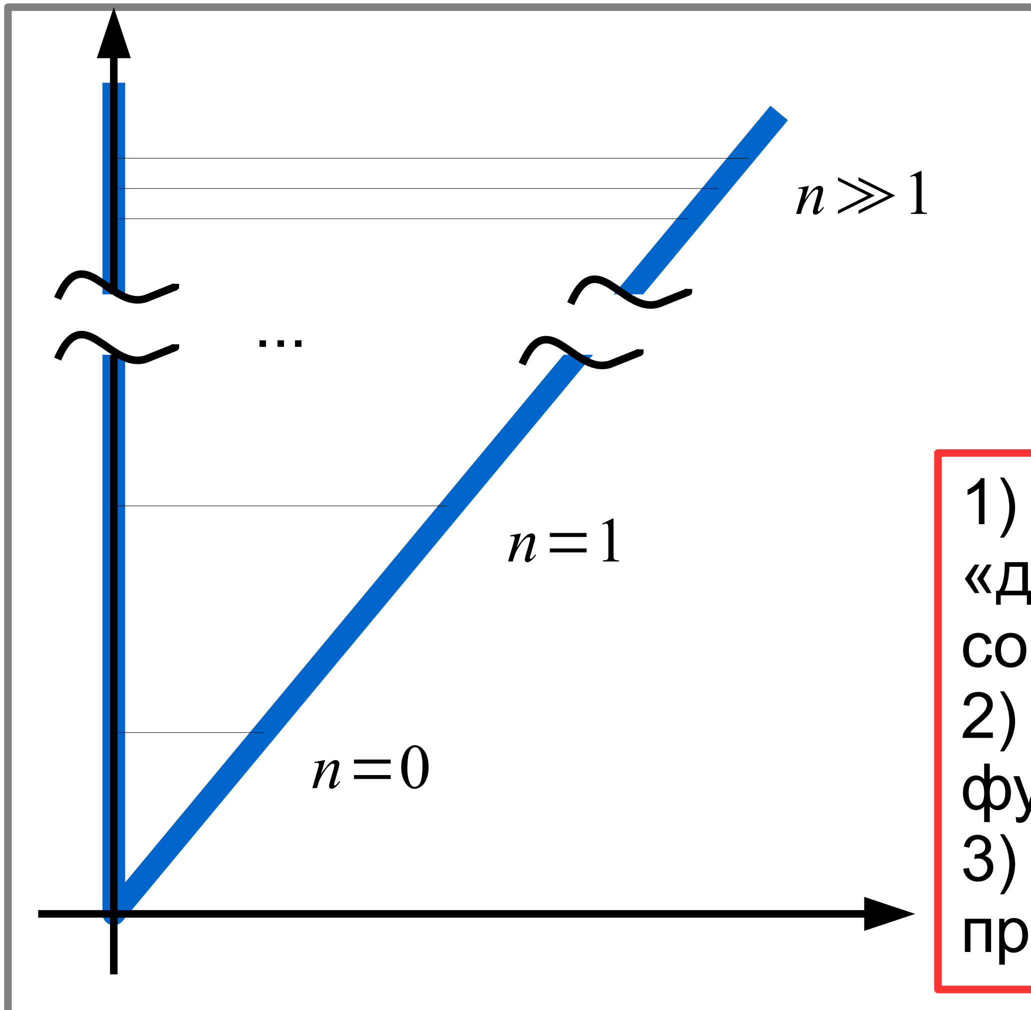
$$\Psi(t=0) = \Psi_1$$

$$\Psi = e^{-iE_0 t/\hbar}\left[\Psi_1 \cos(Tt) - i\Psi_2 \sin(Tt)\right]$$

Часть 3. Оценки и приближенные методы

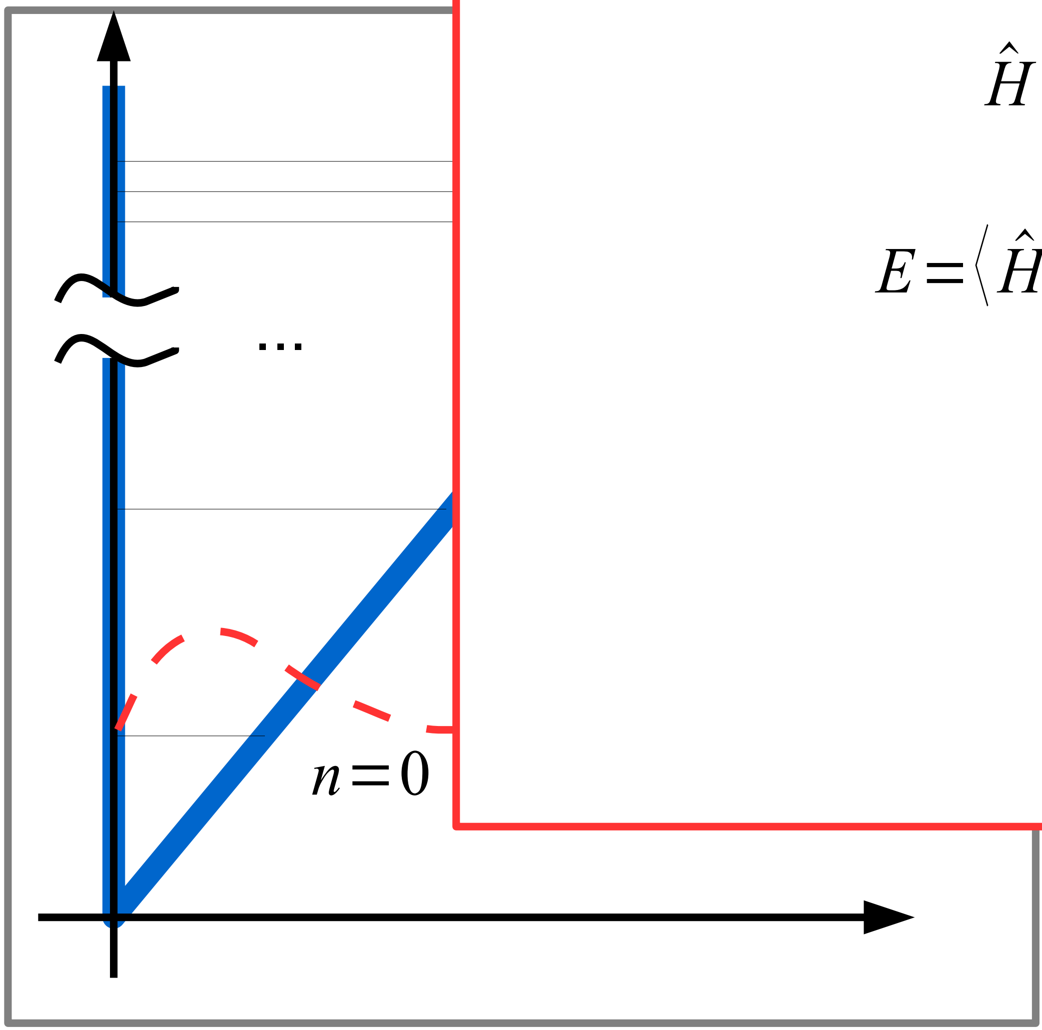


Оценки и приближенные методы



1) Оценка энергии и «делокализации» основного состояния
2) «Угадывание» волновой функции основного состояния
3) Квазиклассическое приближение

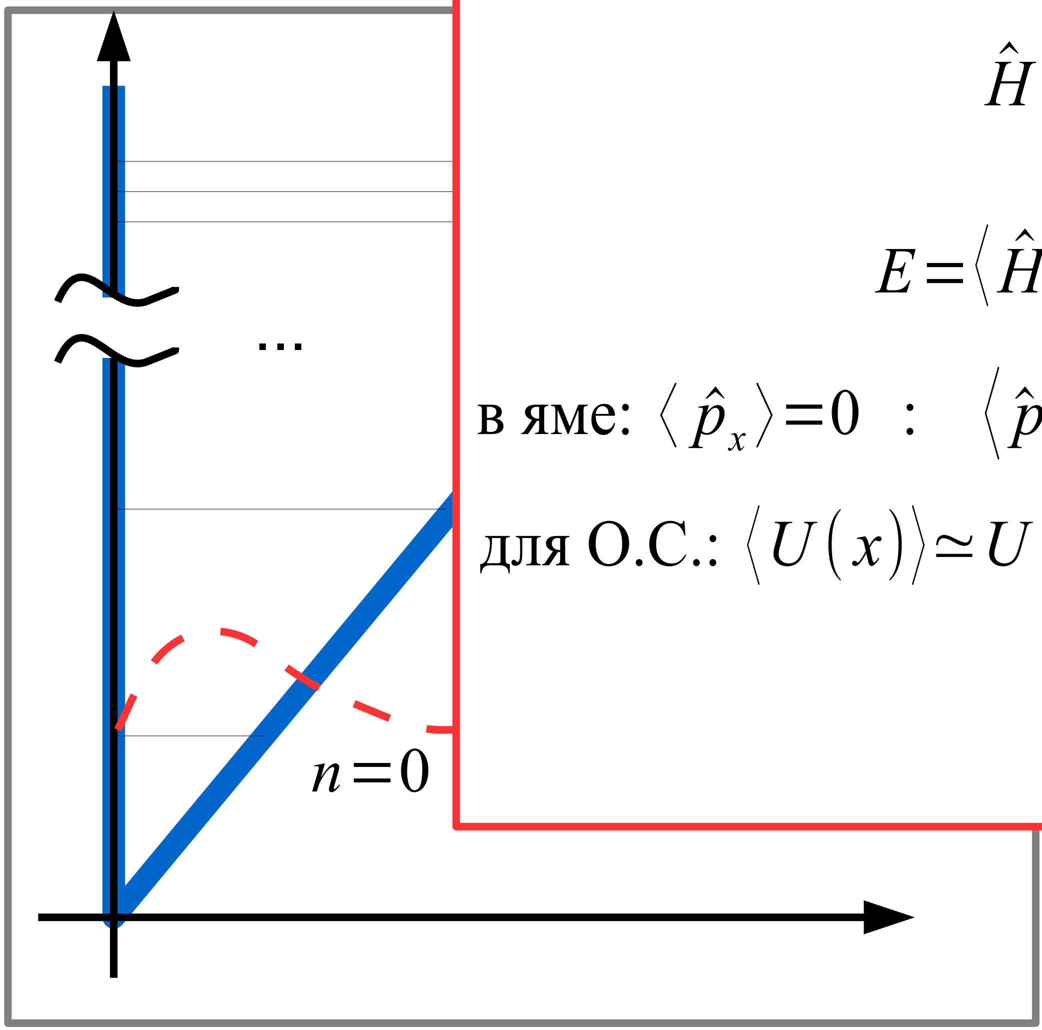
Соотношение неопределенностей: оценки для основного состояния



$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + U(x)$$

$$E = \langle \hat{H} \rangle = \frac{\langle \hat{p}_x^2 \rangle}{2m} + \langle U(x) \rangle$$

Соотношение неопределенностей: оценки для основного состояния



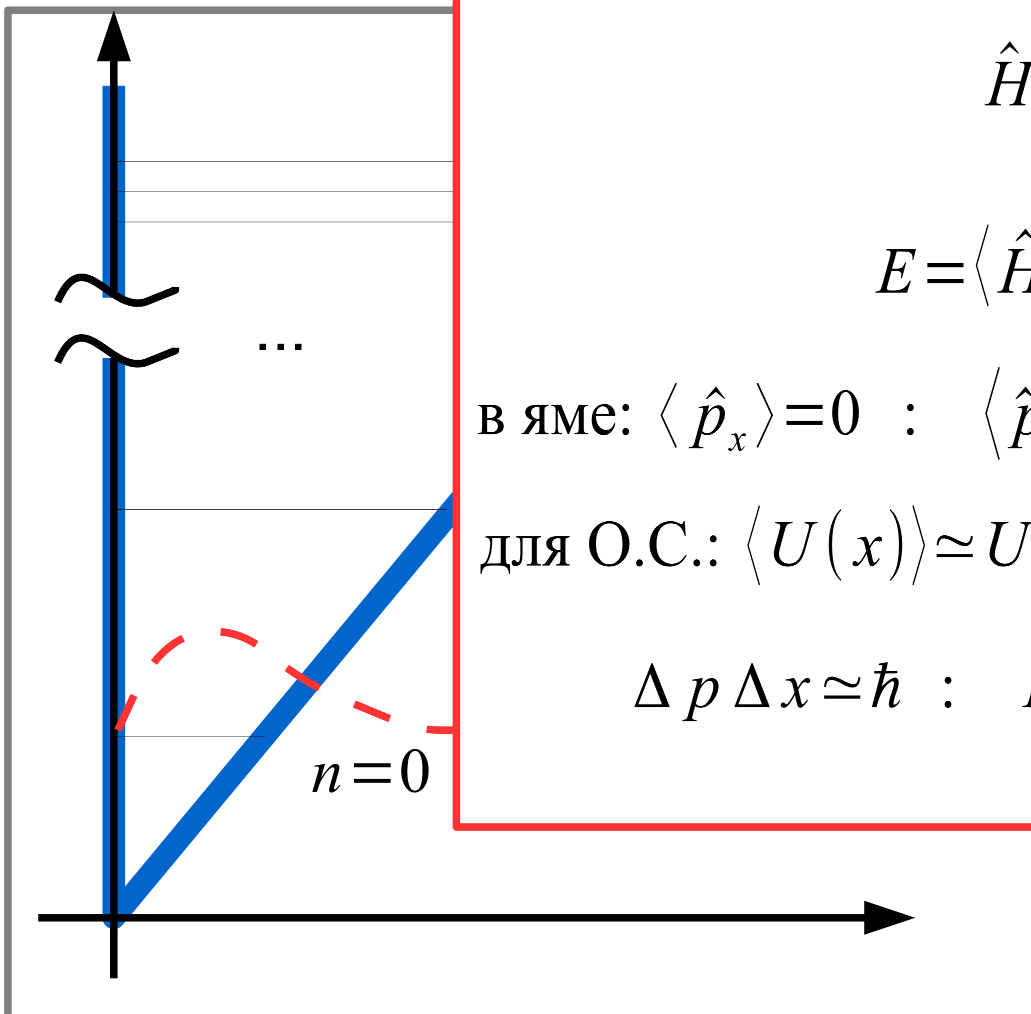
$$\hat{H}=\frac{\hat{p}_x^2}{2m}+U(x)$$

$$E=\langle\hat{H}\rangle=\frac{\langle\hat{p}_x^2\rangle}{2m}+\langle U(x)\rangle$$

в яме: $\langle\hat{p}_x\rangle=0\quad:\quad\langle\hat{p}_x^2\rangle=\left\langle\left(\hat{p}_x-\langle p_x\rangle\right)^2\right\rangle=(\Delta p)^2$

для О.С.: $\langle U(x)\rangle\simeq U(\langle x\rangle)\simeq U\left(\sqrt{\left\langle\left(x-\langle x\rangle\right)^2\right\rangle}\right)\simeq U(\Delta x)$

Соотношение неопределенностей: оценки для основного состояния



$$\hat H = \frac{\hat p_x^2}{2m} + U(x)$$

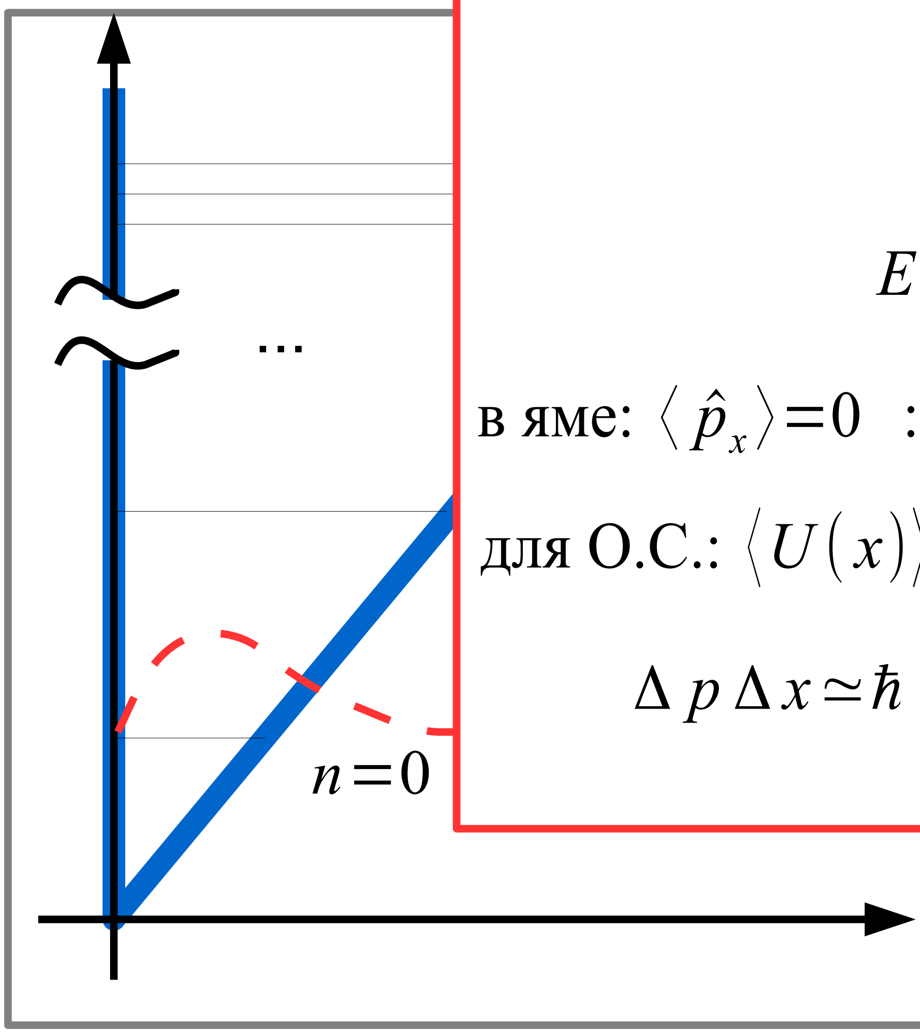
$$E = \langle \hat H \rangle = \frac{\langle \hat p_x^2 \rangle}{2m} + \langle U(x) \rangle$$

в яме: $\langle \hat p_x \rangle = 0 \quad : \quad \langle \hat p_x^2 \rangle = \left\langle \left(\hat p_x - \langle p_x \rangle \right)^2 \right\rangle = (\Delta p)^2$

для О.С.: $\langle U(x) \rangle \simeq U(\langle x \rangle) \simeq U\left(\sqrt{\left\langle \left(x - \langle x \rangle \right)^2 \right\rangle} \right) \simeq U(\Delta x)$

$$\Delta p \, \Delta x \simeq \hbar \quad : \quad E(\Delta x) \simeq \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} + U(\Delta x)$$

Соотношение неопределенностей: оценки для основного состояния



$$\hat{H}=\frac{\hat{p}_x^2}{2m}+U(x)$$

$$E=\langle\hat{H}\rangle=\frac{\langle\hat{p}_x^2\rangle}{2m}+\langle U(x)\rangle$$

в яме: $\langle\hat{p}_x\rangle=0\quad:\quad\langle\hat{p}_x^2\rangle=\left\langle\left(\hat{p}_x-\langle p_x\rangle\right)^2\right\rangle=(\Delta p)^2$

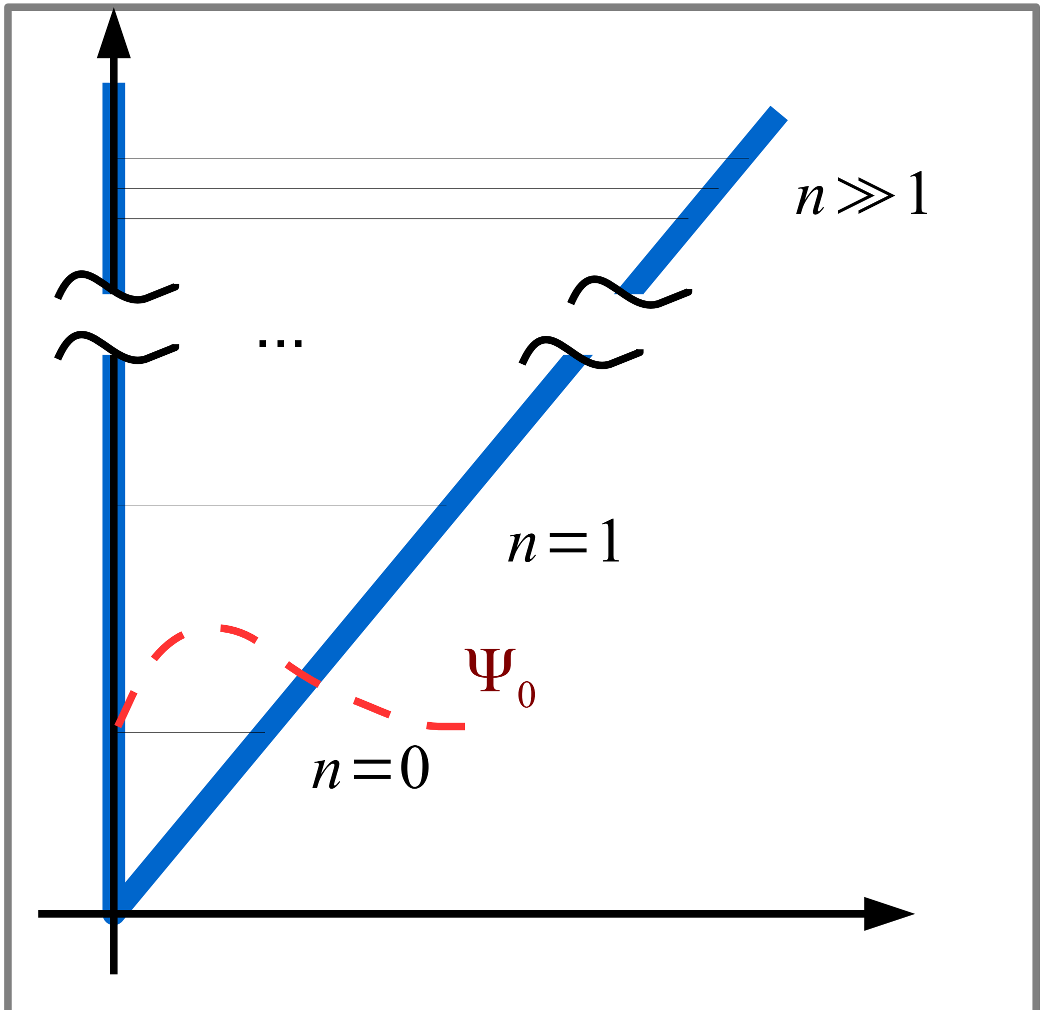
для О.С.: $\langle U(x)\rangle\simeq U(\langle x\rangle)\simeq U\left(\sqrt{\left\langle\left(x-\langle x\rangle\right)^2\right\rangle}\right)\simeq U(\Delta x)$

$$\Delta p\,\Delta x\simeq\hbar\quad:\quad E(\Delta x)\simeq\frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2}+U(\Delta x)$$

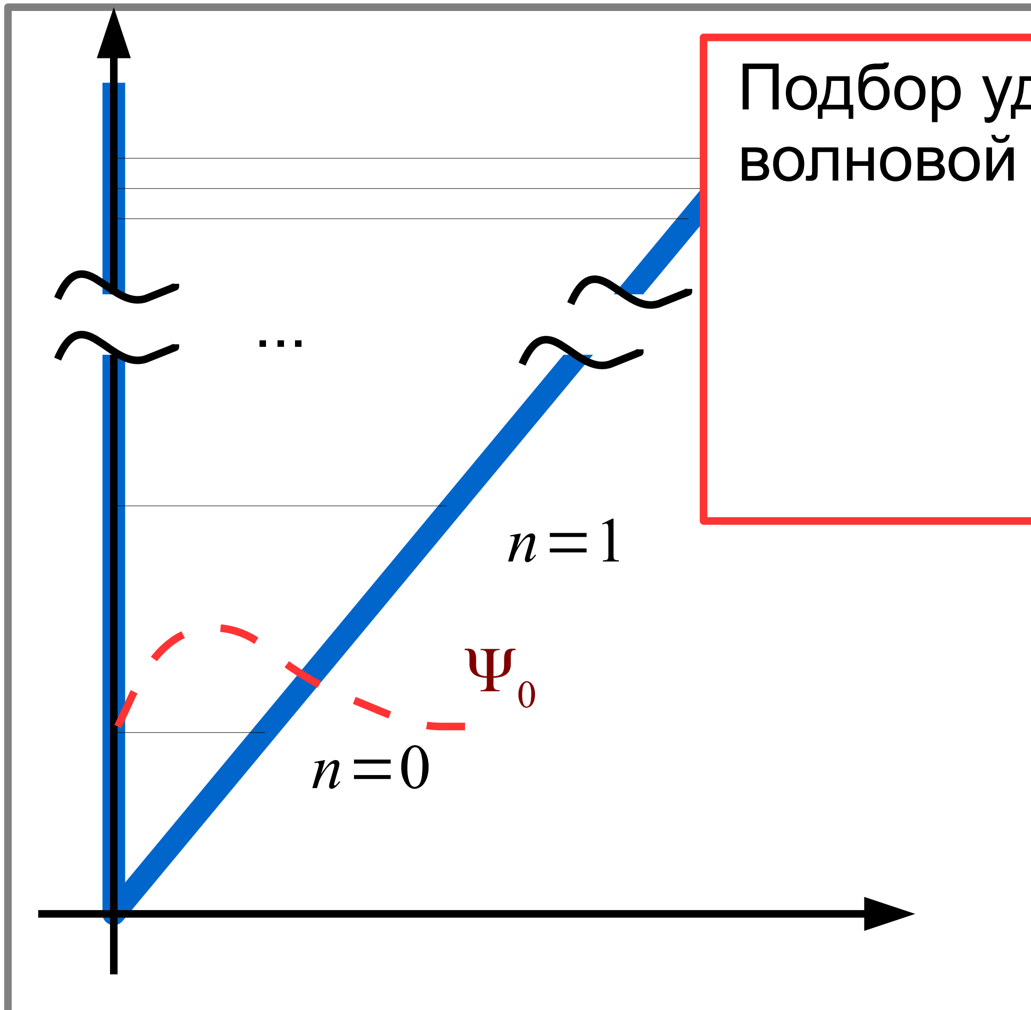
$min\,E(\Delta x)$

позволяет оценить энергию О.С. и амплитуду «нулевых колебаний»

«Угадывание» волновой функции основного состояния



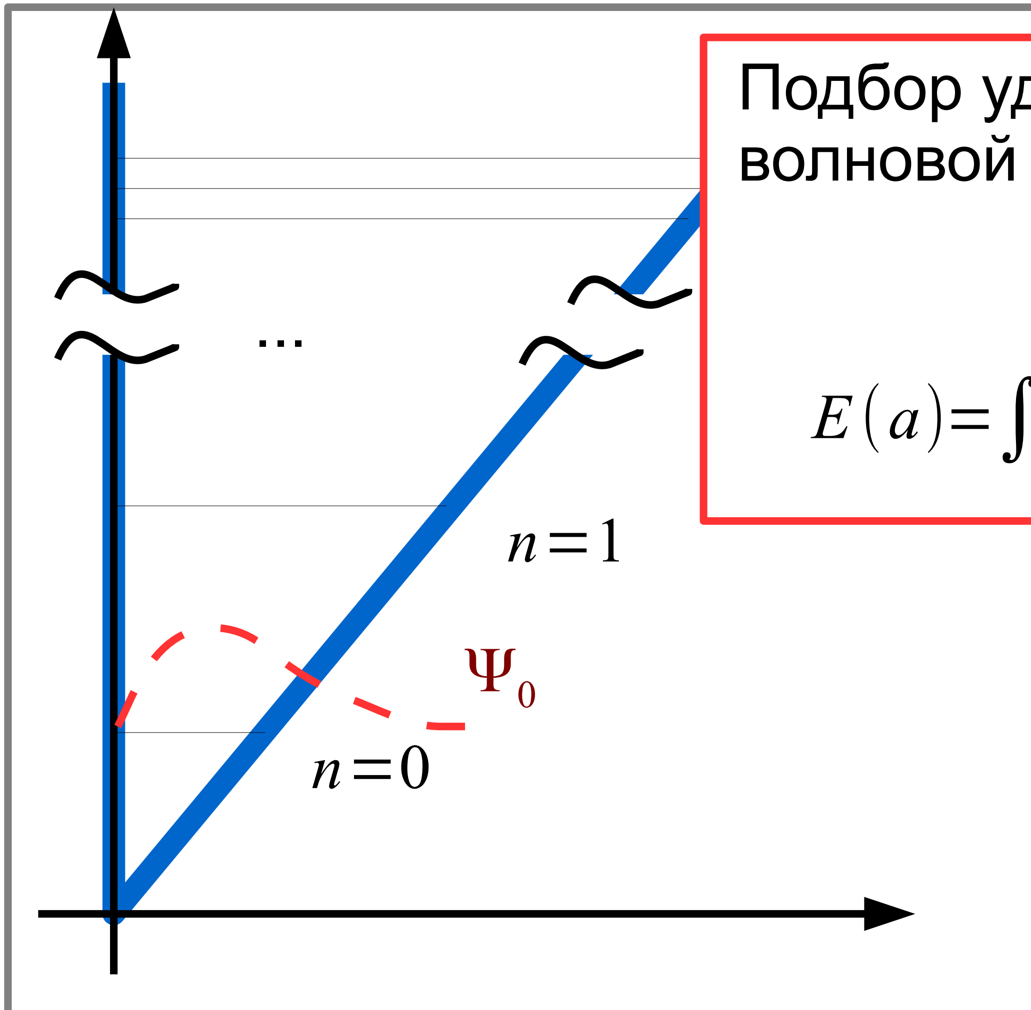
«Угадывание» волновой функции основного состояния



Подбор удобной для вычислений волновой функции, например:

$$\Psi(x, a) = A\, x\, e^{-x/a}$$

«Угадывание» волновой функции основного состояния

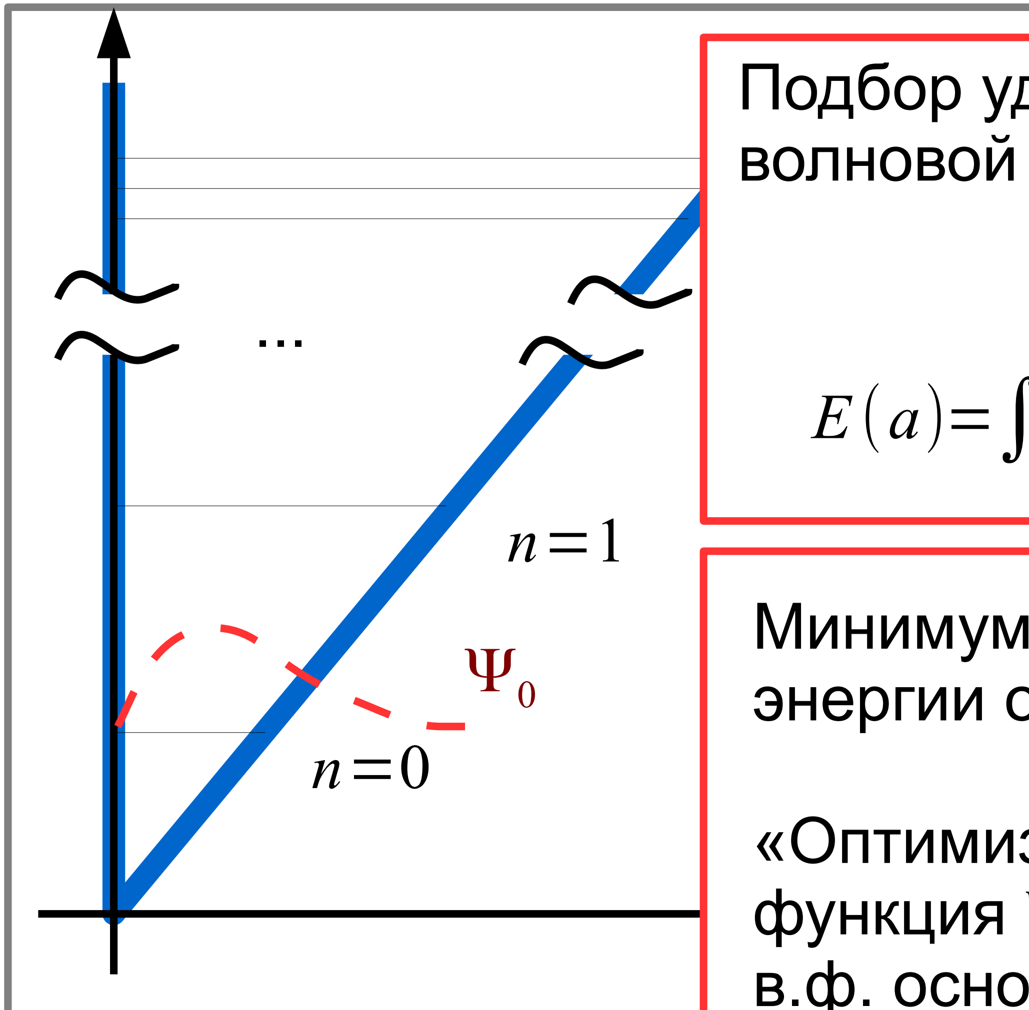


Подбор удобной для вычислений волновой функции, например:

$$\Psi(x, a) = A\, x\, e^{-x/a}$$

$$E(a) = \int \Psi^*(x, a)\, \hat{H}\, \Psi(x, a)\, dx > E_0$$

«Угадывание» волновой функции основного состояния



Подбор удобной для вычислений волновой функции, например:

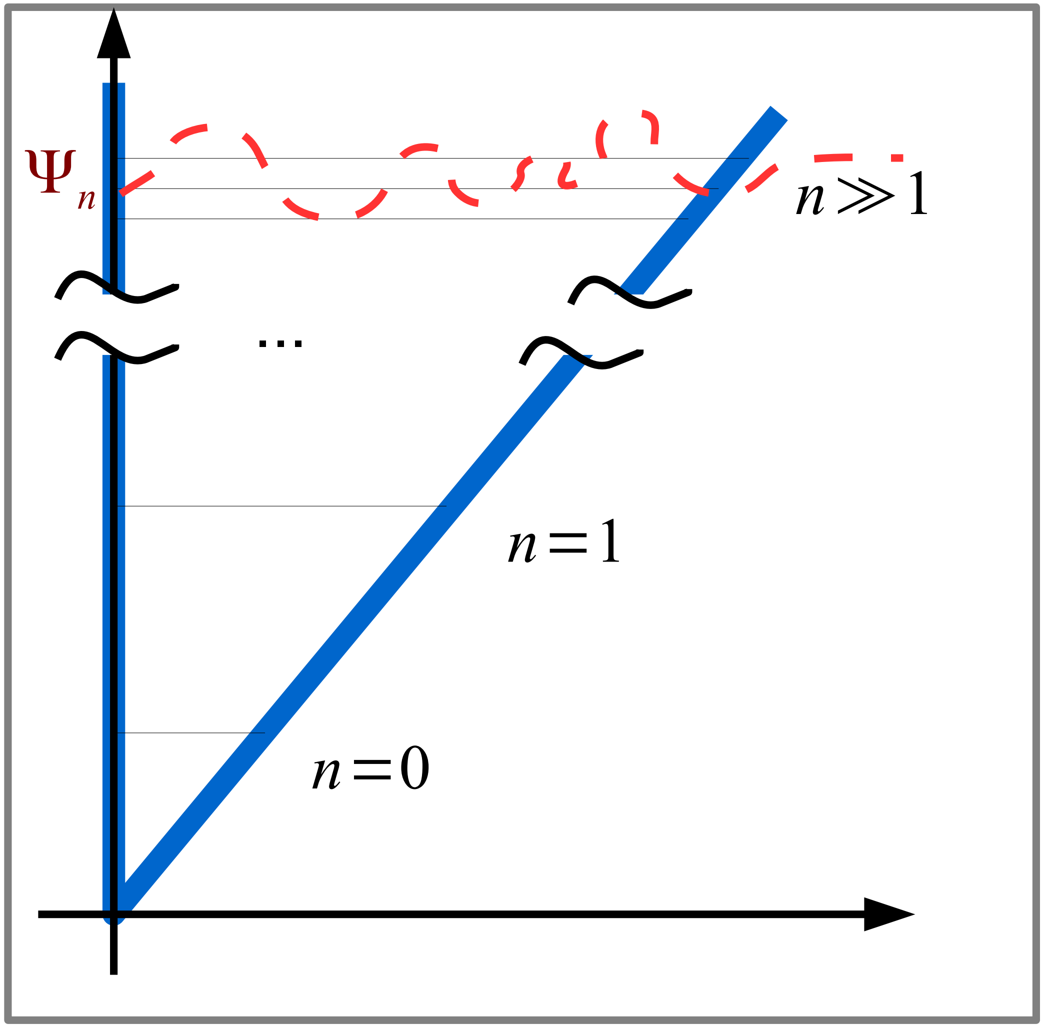
$$\Psi(x,a) = A\,x\,e^{-x/a}$$

$$E(a) = \int \Psi^*(x,a)\,\hat{H}\,\Psi(x,a)\,dx > E_0$$

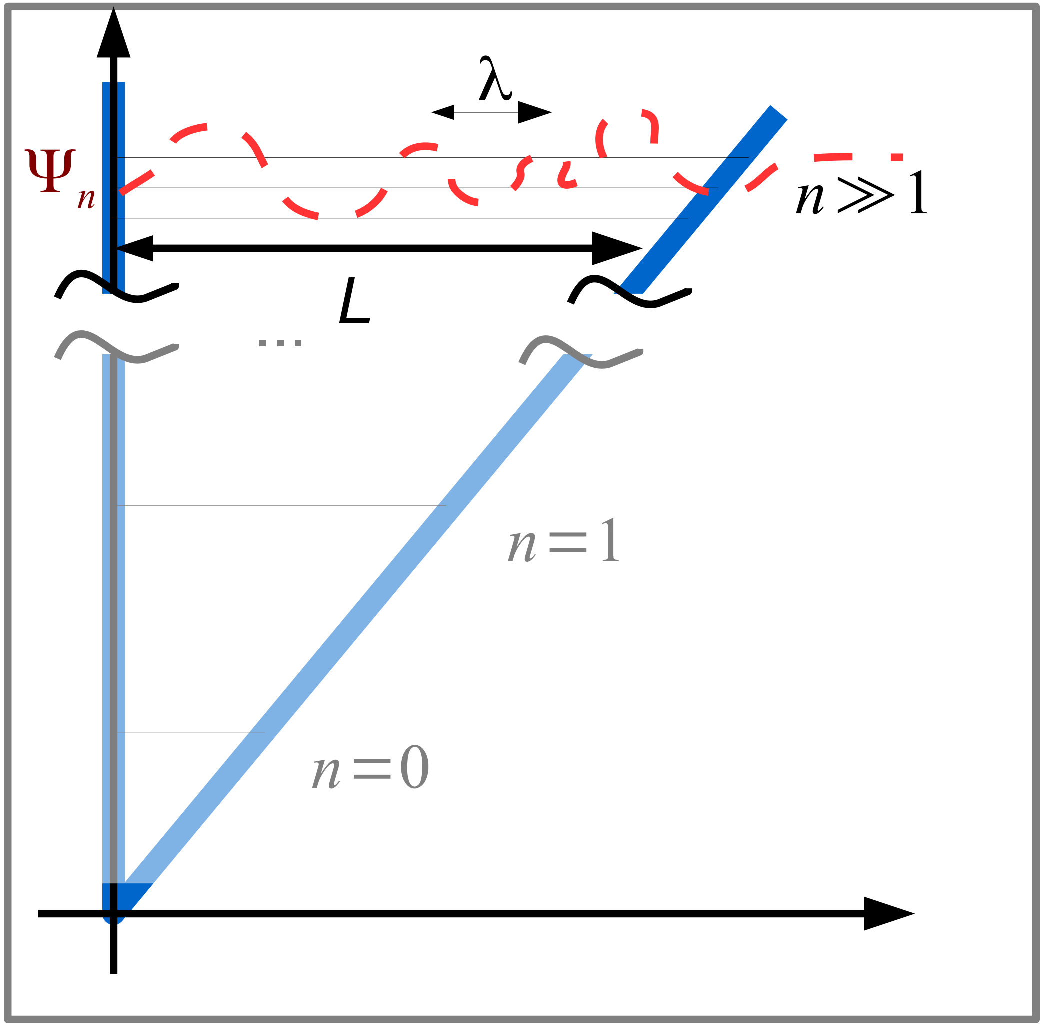
Минимум $E(a)$ приближается к энергии основного состояния.

«Оптимизованная» волновая функция $\Psi(x,a)$ будет «близка» к в.ф. основного состояния Ψ_0

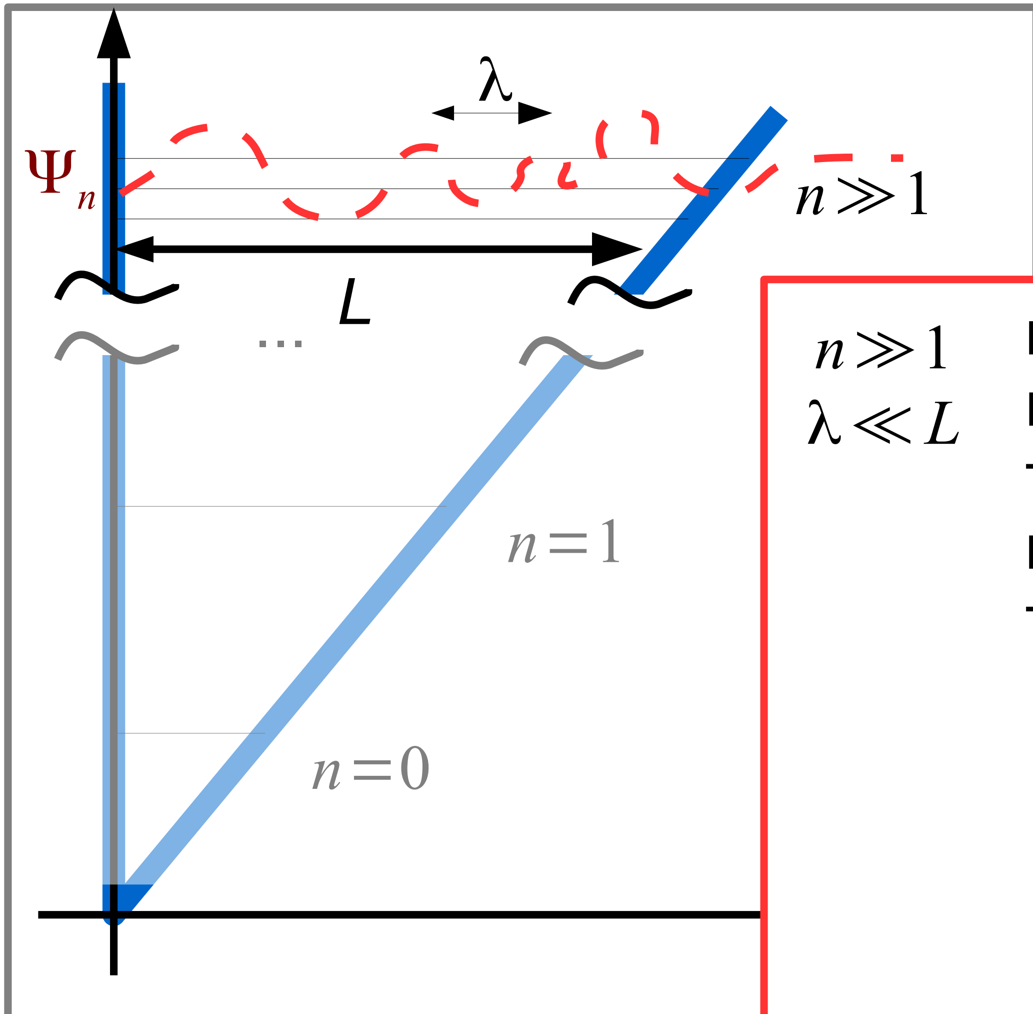
Приближение Бора-Зоммерфельда



Приближение Бора-Зоммерфельда



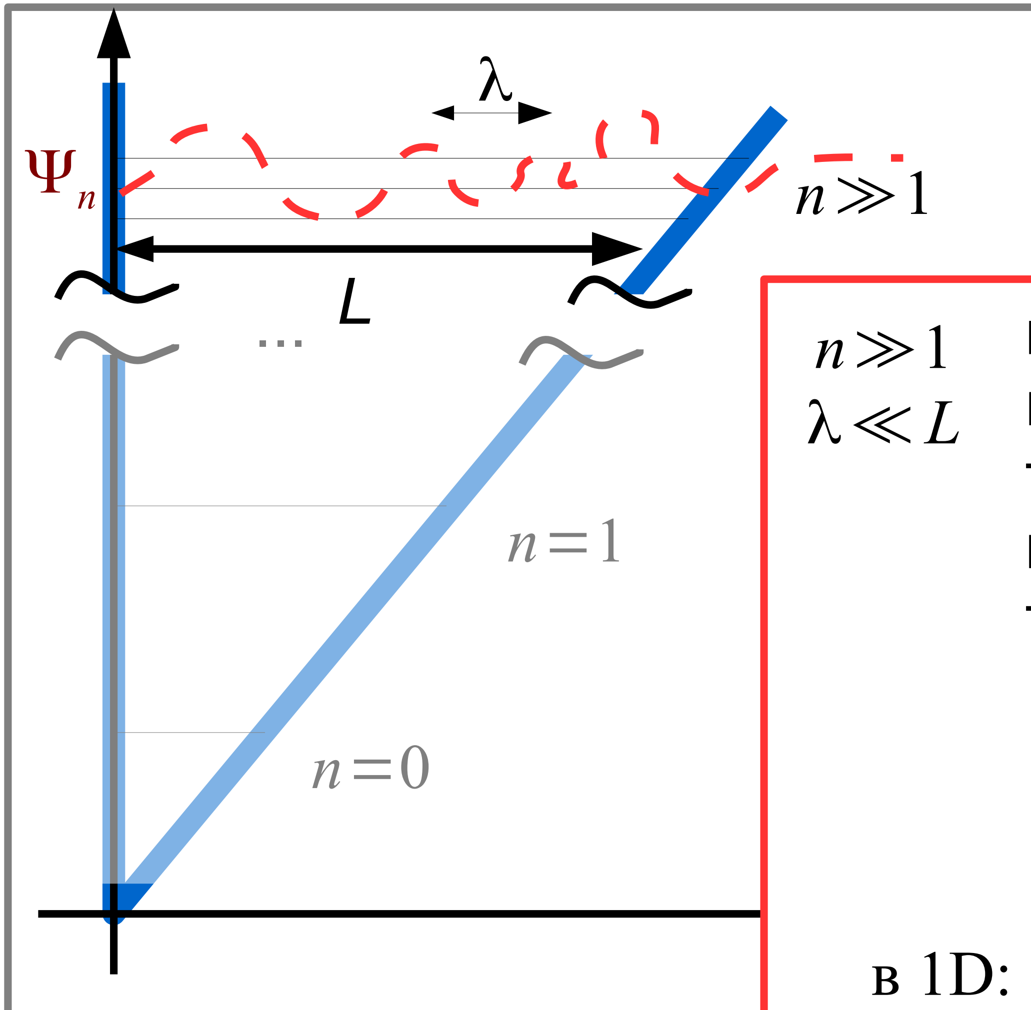
Приближение Бора-Зоммерфельда



$n \gg 1$
$\lambda \ll L$

волновой пакет частицы может быть достаточно точно локализован — возвращается смысл траектории частицы

Приближение Бора-Зоммерфельда



$n \gg 1$

$\lambda \ll L$

волновой пакет частицы может быть достаточно точно локализован — возвращается смысл траектории частицы

$$\oint \vec{k}(\vec{r})\, d\vec{l} = 2\pi n$$

$$\oint \vec{p}(\vec{r})\, d\vec{l} = n h$$

в 1D: $$2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{2m(E-U(x))}\,dx = n h$$

Часть 4. Момент импульса в квантовой физике

https://www.youtube.com/watch?v=DcaJQtKHm88

Момент импульса в квантовой физике

стоп-кадр из https://www.youtube.com/watch?v=DcaJQtKHm88

для *сферического* волчка

$$\hat{H}_{вращ} = \frac{\hat{\vec{L}}^2}{2I}$$

Момент импульса в квантовой физике

стоп-кадр из https://www.youtube.com/watch?v=DcaJQtKHm88

для *сферического* волчка

$$\hat{H}_{вращ} = \frac{\hat{\vec{L}}^2}{2I}$$

$$\hat{\vec{L}} = [\vec{r} \times \hat{\vec{p}}] = \begin{pmatrix} y\hat{p}_z - z\hat{p}_y \\ -x\hat{p}_z + z\hat{p}_x \\ x\hat{p}_y - y\hat{p}_x \end{pmatrix}$$

Момент импульса в квантовой физике

стоп-кадр из https://www.youtube.com/watch?v=DcaJQtKHm88

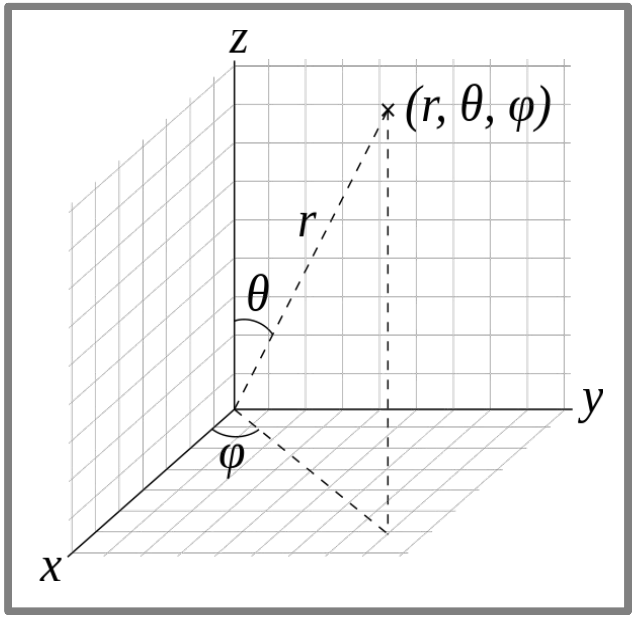
для *сферического* волчка

$$\hat{H}_{вращ} = \frac{\hat{\vec{L}}^2}{2I}$$

$$\hat{\vec{L}} = \left[\vec{r} \times \hat{\vec{p}}\right] = \begin{pmatrix} y\,\hat{p}_z - z\,\hat{p}_y \\ -x\,\hat{p}_z + z\,\hat{p}_x \\ x\,\hat{p}_y - y\,\hat{p}_x \end{pmatrix}$$

В стационарных состояниях L^2 должен иметь строго определенные значения, но все компоненты *вектора* $\boldsymbol{L}$ одновременно задать невозможно

Немного математики в сферических координатах



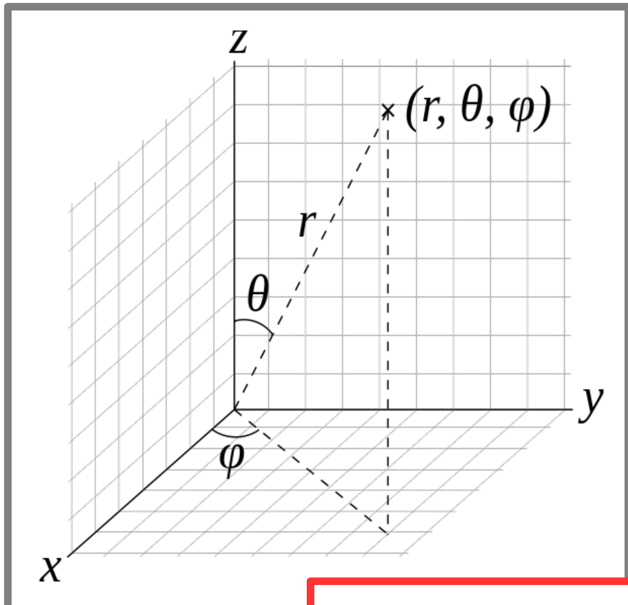
https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate_system

$$X = r \sin\Theta \cos\phi$$
$$Y = r \sin\Theta \sin\phi$$
$$Z = r \cos\Theta$$

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$
$$\Theta = arctg\,\frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z}$$
$$\phi = arctg\,\frac{Y}{X}$$

$$\hat{L}_z = x\,\hat{p}_y - y\,\hat{p}_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Немного математики в сферических координатах



https://en.wikipedia.o
Spherical_coordinate

$$X = r\sin\Theta\cos\phi$$
$$Y = r\sin\Theta\sin\phi$$
$$Z = r\cos\Theta$$

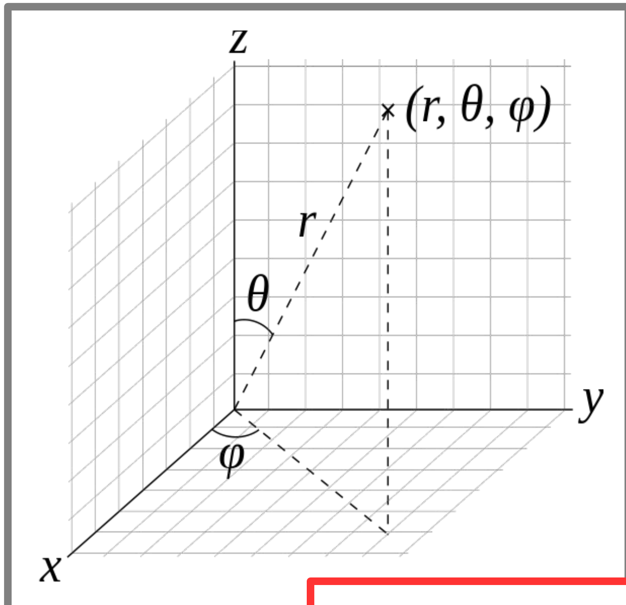
$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$
$$\Theta = arctg\,\frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z}$$
$$\phi = arctg\,\frac{Y}{X}$$

$$\hat{L}_z = x\,\hat{p}_y - y\,\hat{p}_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad \hat{l}_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial f}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

Немного математики в сферических координатах



https://en.wikipedia.o
Spherical_coordinate

$$X = r\sin\Theta\cos\phi$$
$$Y = r\sin\Theta\sin\phi$$
$$Z = r\cos\Theta$$

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$
$$\Theta = arctg\,\frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z}$$
$$\phi = arctg\,\frac{Y}{X}$$

$$\hat{L}_z = x\,\hat{p}_y - y\,\hat{p}_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad \hat{l}_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial f}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

$$= -\frac{1}{r^2}\hat{l}^2 f$$

Собственные значения проекции момента

$$\hat{l}_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$-i \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} = m \Psi$$

$$\Psi = f(r, \Theta) e^{i m \phi}$$

+ требование однозначности при повороте на 2π

Собственные значения проекции момента

$$\hat{l}_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$-i\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} = m\Psi$$

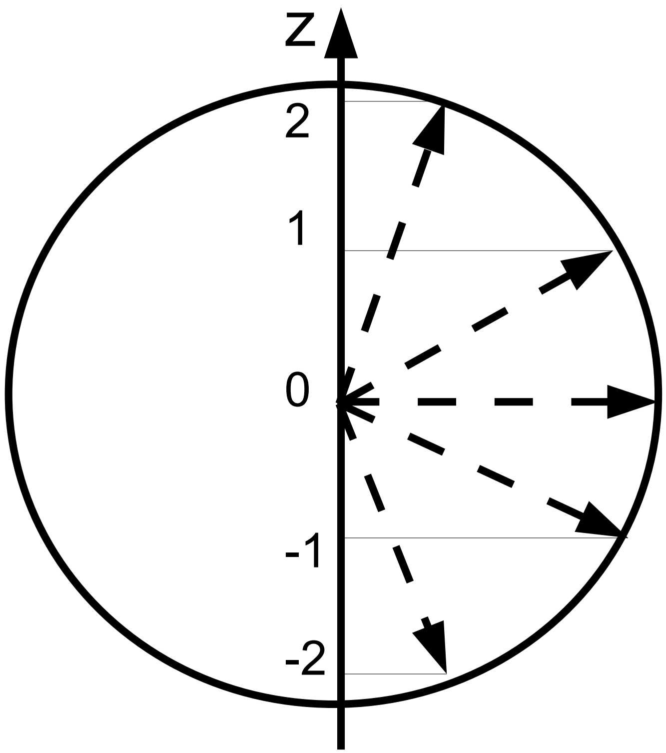
$$\Psi = f(r,\Theta)\,e^{im\phi}$$

+ требование однозначности при повороте на 2π

m — целое
возможные значения от $-l$ до l

Собственные значения проекции момента

$$\hat{l}_z = -i\frac{\partial}{\partial \phi}$$



«Векторная» модель:

- при заданной длине возможны только дискретные значения проекции на ЛЮБУЮ заданную ось
- соотношения неопределенности запрещают направление «строго вдоль Z»

от $-l$ до l

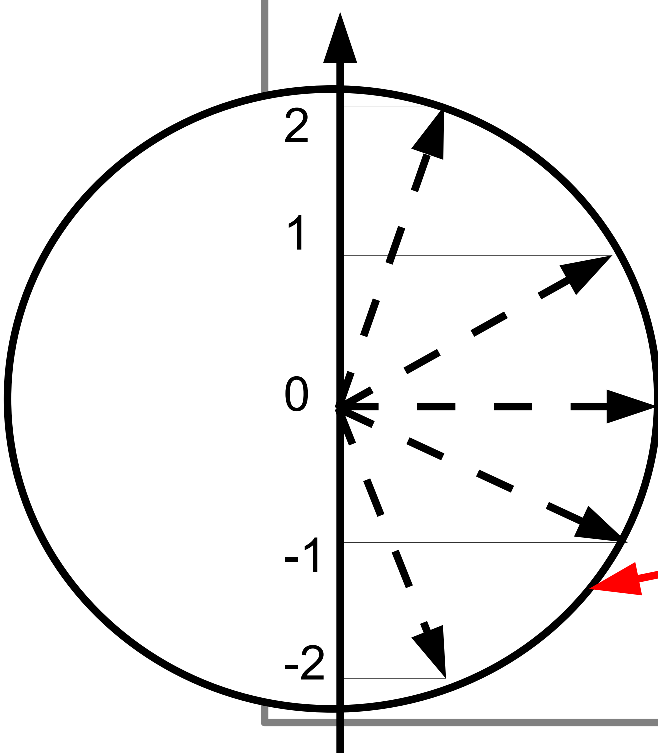
Собственные значения квадрата момента. Физика.

в отсутствие выделенного направления все значения проекции равновероятны, все оси координат равносильны

$$\left\langle \hat{l}^2 \right\rangle = \left\langle \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2 \right\rangle = 3\left\langle \hat{l}_z^2 \right\rangle =$$

$$= 3 \times \left[\frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} m^2 \right] =$$

$$= \frac{3}{2l+1} \times \frac{1}{3} l(l+1)(2l+1) = \boxed{l(l+1)}$$



$$\sqrt{\left\langle \hat{l}^2 \right\rangle} > l$$

Собственные значения квадрата момента. Математика.

$$\hat{l}^2 = -\left(\frac{1}{\sin\Theta} \frac{\partial}{\partial\Theta} \left(\sin\Theta \frac{\partial}{\partial\Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\Theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right)$$

$\hat{l}^2 \Psi = A \Psi$ решается в сферических функциях, см ЛЛ.III, пар.28

$$Y_{lm}(\Theta, \phi) = C_{lm} P_l^{|m|}(\cos\Theta) e^{im\phi}$$

собственные значения $A = l(l+1)$

Собственные значения квадрата момента. Математика.

$$\hat{l}^2 = -\left(\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

$\hat{l}^2\Psi = A\Psi$ решается в сферических функциях, см ЛЛ.III, пар.28

$$Y_{lm}(\Theta,\phi) = C_{lm}P_l^{|m|}(\cos\Theta)e^{im\phi}$$

собственные значения $A = l(l+1)$

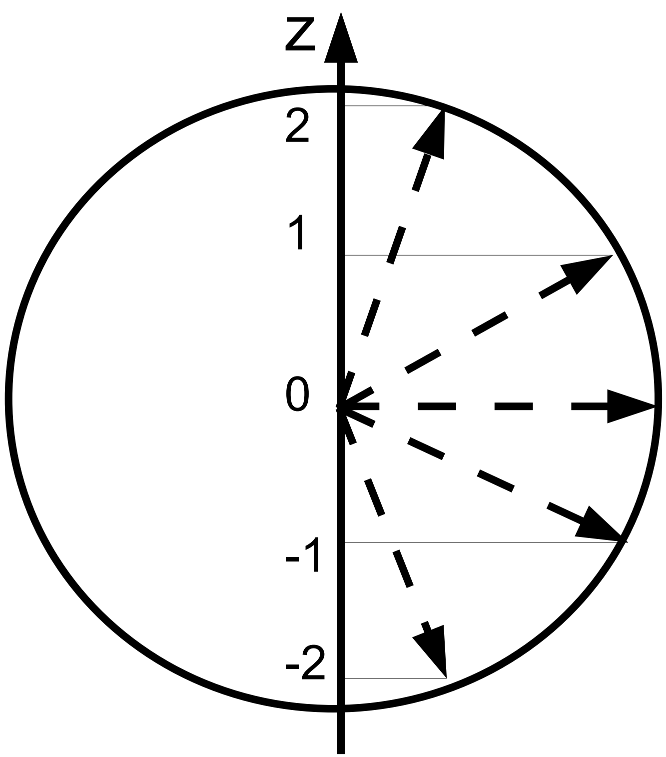
Пространственная чётность состояния с определенным моментом импульса

$$\vec{r} \Leftrightarrow -\vec{r}$$

$$\{r,\Theta,\phi\} \Leftrightarrow \{r,\pi-\Theta,\pi+\phi\}$$

$$Y_{lm}(\pi-\Theta,\phi+\pi) = (-1)^l Y_{lm}(\Theta,\phi)$$

Правила квантования момента импульса



- одновременно могут быть измерены проекция момента на заданную (**любую**, традиционно обозначается Z) ось и квадрат момента импульса
- собственные значения квадрата момента $l(l+1)$, «длиной» вектора момента импульса называют l
- проекция момента импульса — целое число $m=-l,-l+1...l-1, l$, всего $(2l+1)$ возможность
- чётность состояния с определённым l : $P=(-1)^l$

Часть 5. Движение в центральном поле, некоторые общие свойства

О строгом решении

$$\boxed{E\,\Psi = \hat{H}\,\Psi = \left(\frac{\hat{p}^2}{2\,m} + U(r)\right)\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2\,m}\Delta + U(r)\right)\Psi}$$

О строгом решении

$$E\,\Psi = \hat{H}\,\Psi = \left(\frac{\hat{p}^2}{2\,m} + U\left(r\right)\right)\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\Delta + U\left(r\right)\right)\Psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + U\left(r\right)\Psi + \frac{\hbar^2}{2mr^2}\hat{l}^2\Psi = E\,\Psi$$

О строгом решении

$$E\Psi = \hat{H}\Psi = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + U(r)\right)\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(r)\right)\Psi$$

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + U(r)\Psi}_{\text{действует только на радиальную часть}} + \frac{\hbar^2}{2mr^2}\hat{l}^2\Psi = E\Psi$$

действует только на радиальную часть

действует только на угловую часть

О строгом решении

$$E\Psi=\hat{H}\Psi=\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+U(r)\right)\Psi=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+U(r)\right)\Psi$$

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+U(r)\Psi}_{\text{действует только на радиальную часть}}+\frac{\hbar^2}{2mr^2}\underbrace{\hat{l}^2}_{\text{действует только на угловую часть}}\Psi=E\Psi$$

$$\boxed{\Psi=\frac{\xi(r)}{r}\times Y_{lm}(\Theta,\phi)}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\xi'' + \left(U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\xi = E\,\xi$$

Сведена к одномерной задаче, *r>0*

$$\Psi(r,\Theta,\phi) = \Psi_{n_r,l,m}$$
$$E = E(n_r, l)$$

$$E\Psi = \hat{H}\Psi =$$

$$2m\ r^2\ \partial r\ \Big(\quad \partial r\ \Big) \qquad 2mr^2$$

действует только на радиальную часть

действует только на угловую часть

$$\Psi = \frac{\xi(r)}{r} \times Y_{lm}(\Theta, \phi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\xi'' + \left(U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\xi = E\xi$$

Сведена к одномерной задаче, *r>0*

$$\Psi(r,\Theta,\phi) = \Psi_{n_r,l,m}$$
$$E = E(n_r, l)$$

$$E\Psi = \hat{H}\Psi =$$

$$2m\ r^2\ \partial r\left(\quad \partial r\right)$$

действует только на радиальную часть

Квантовые числа:

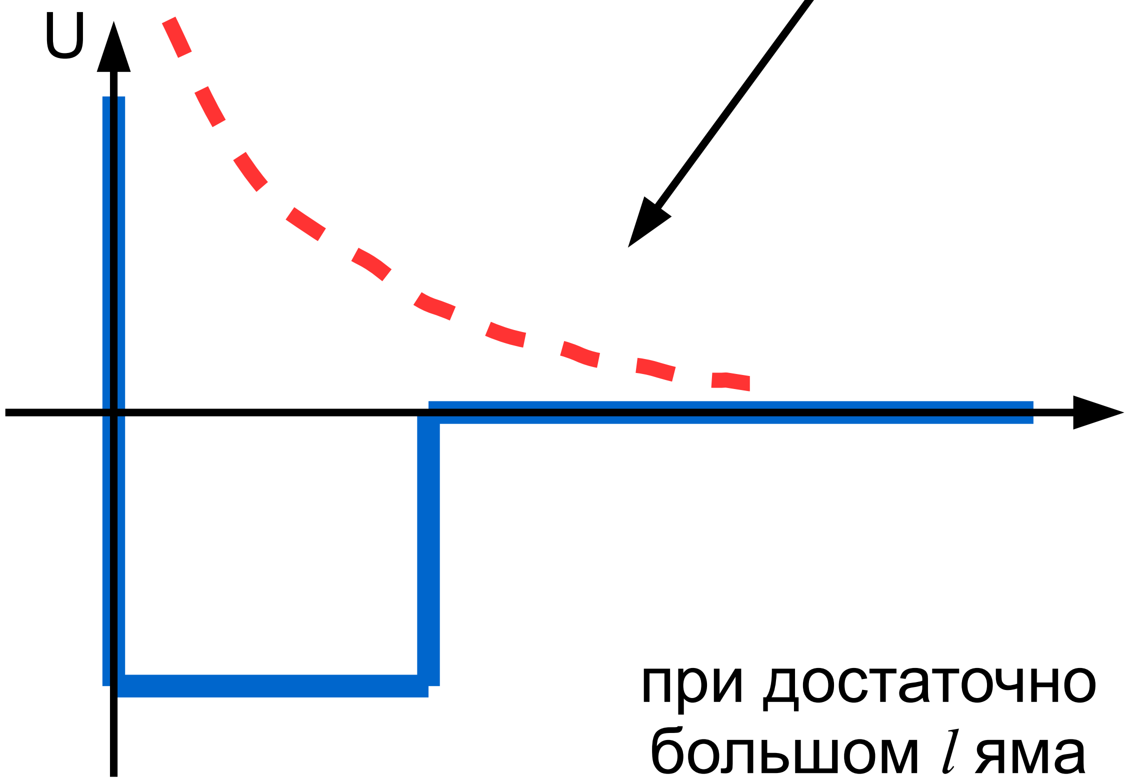
- n_r — радиальное (0,1,2...)
- l — орбитальное {s,p,d,f..}={0,1,2,3..}
- m — магнитное

$$\Psi = \frac{\xi(r)}{r} \times Y_{lm}(\Theta,\phi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\xi'' + \left(U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right)\xi = E\xi$$

центробежная
энергия

$E\Psi = \hat{H}\Psi =$



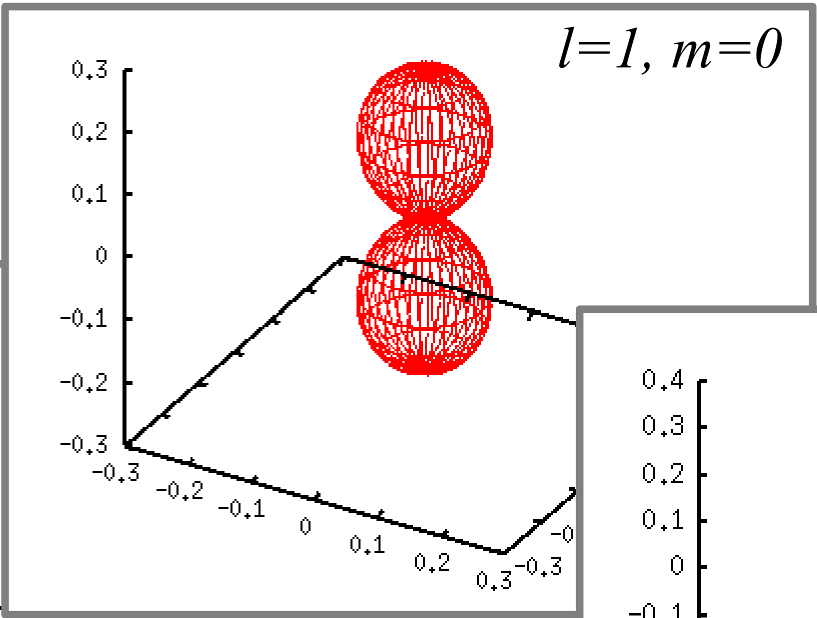
твует
ко на
вую
сть

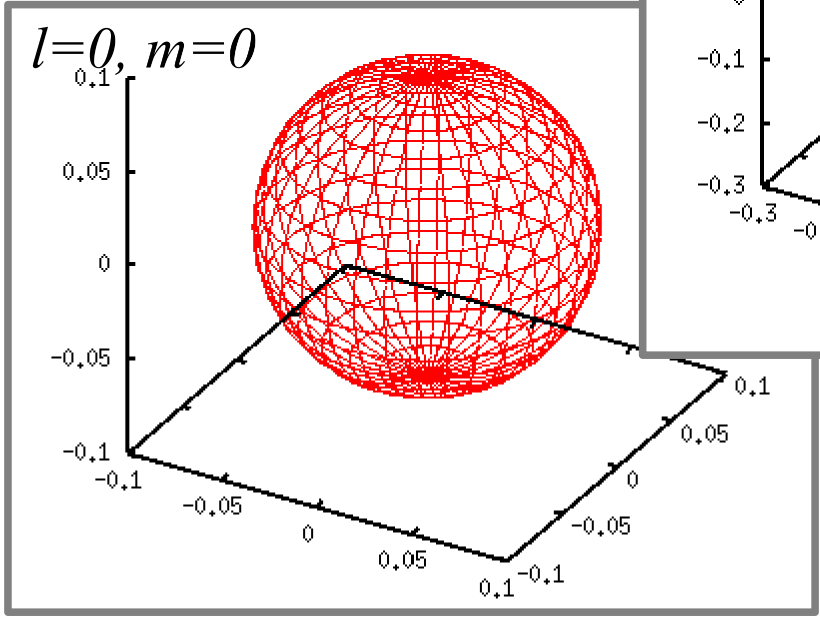
при достаточно
большом l яма
может «пропасть»

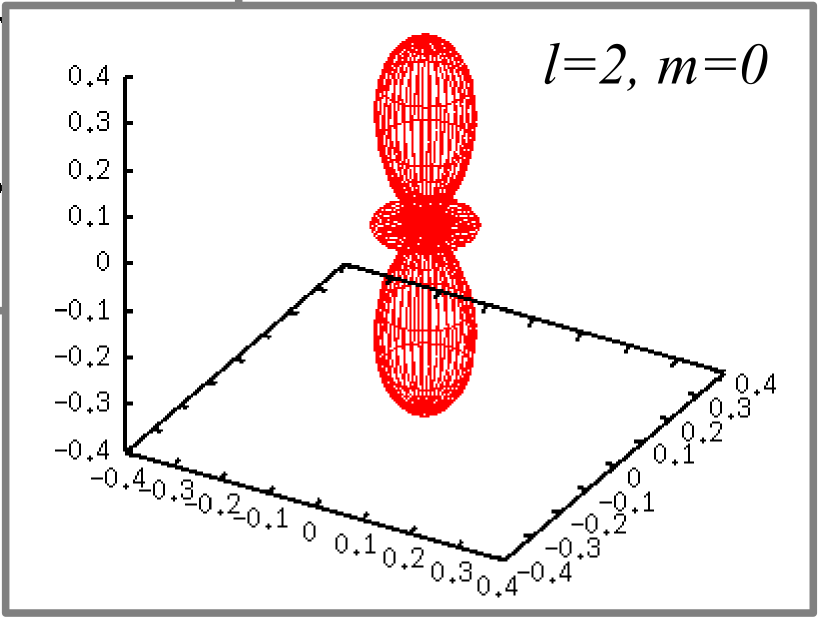
Вид некоторых волновых функций (угловая часть).

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\xi'' + \left(U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\xi = E\xi$$

$$\Psi = \frac{\xi(r)}{r} \times \boxed{Y_{lm}(\Theta,\phi)}$$





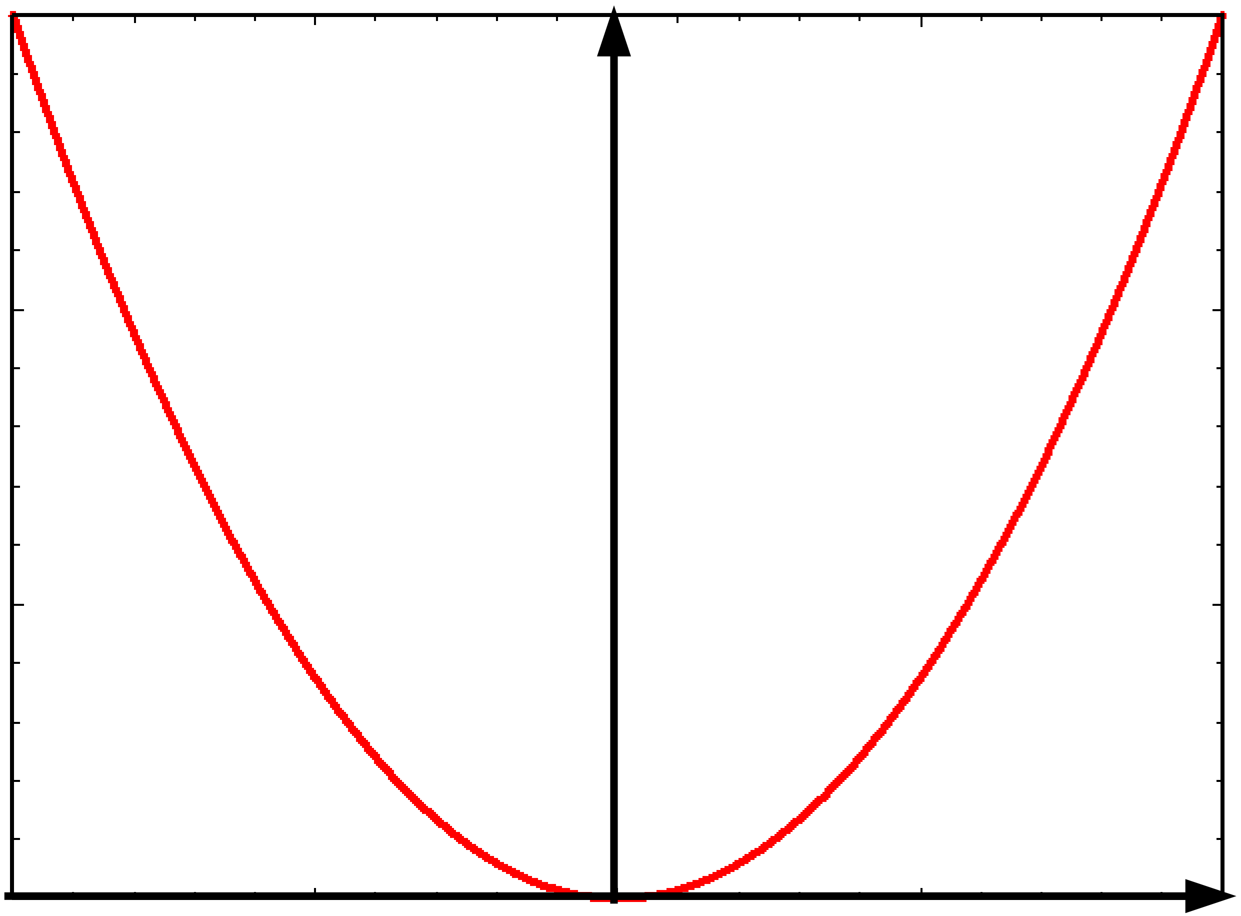


http://lowrank.net/gnuplot/spherical_harmonics/index-e.html

Часть 6. Трехмерный осциллятор и кулоновское поле

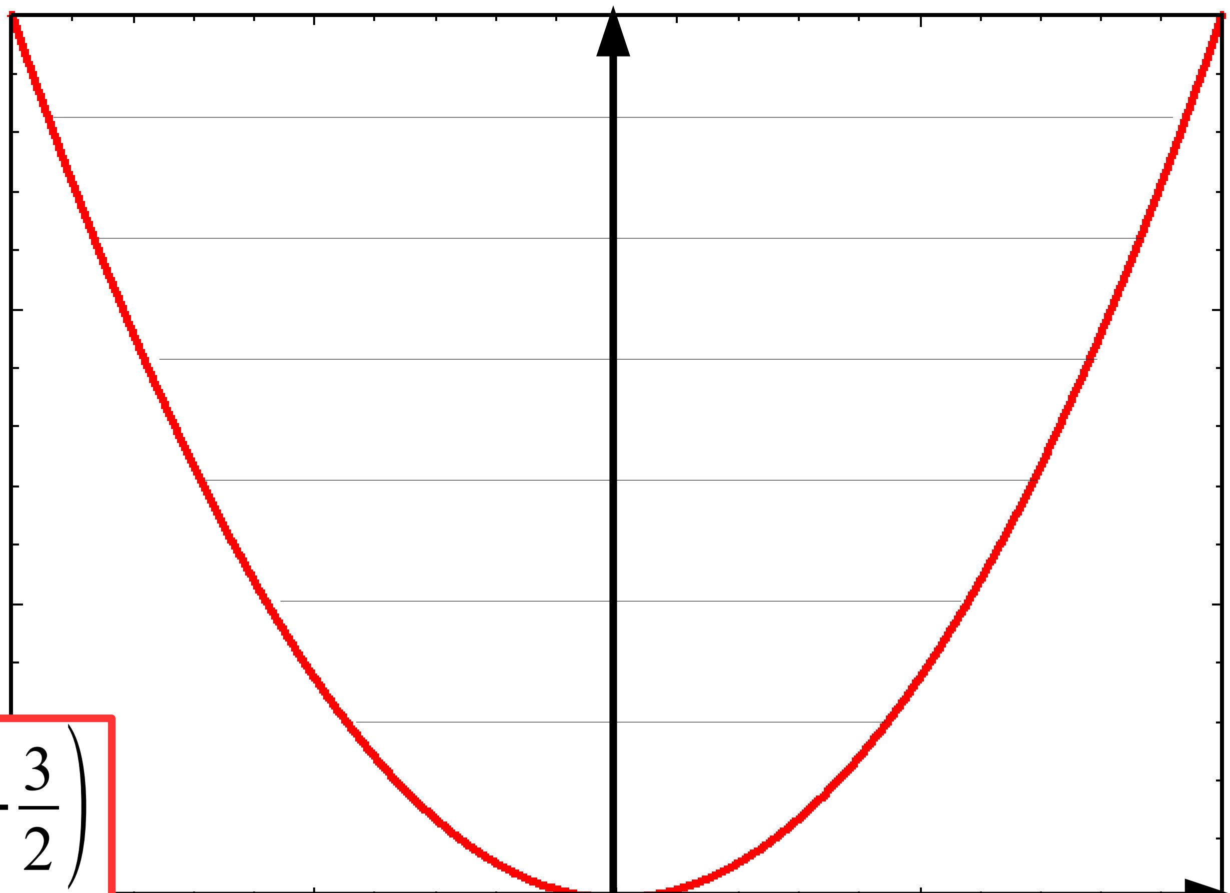
Трёхмерный осциллятор U=kr²/2

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi+\frac{kr^2}{2}\Psi=E\Psi$$



Трёхмерный осциллятор U=kr²/2

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi+\frac{kr^2}{2}\Psi=E\Psi$$



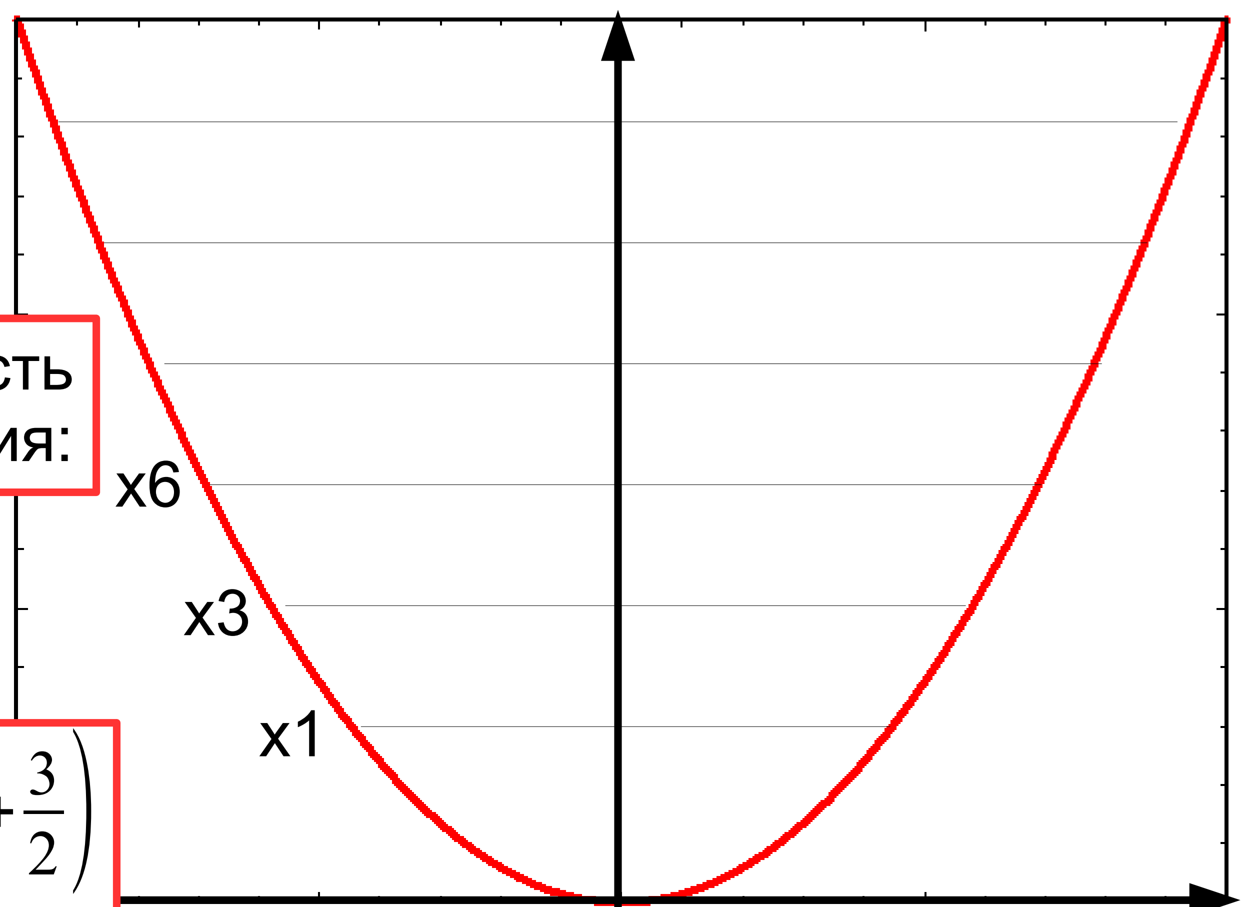
$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{3}{2}\right)$$

$$n=n_x+n_y+n_z$$

Трёхмерный осциллятор U=kr²/2

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi+\frac{kr^2}{2}\Psi=E\Psi$$

кратность вырождения:



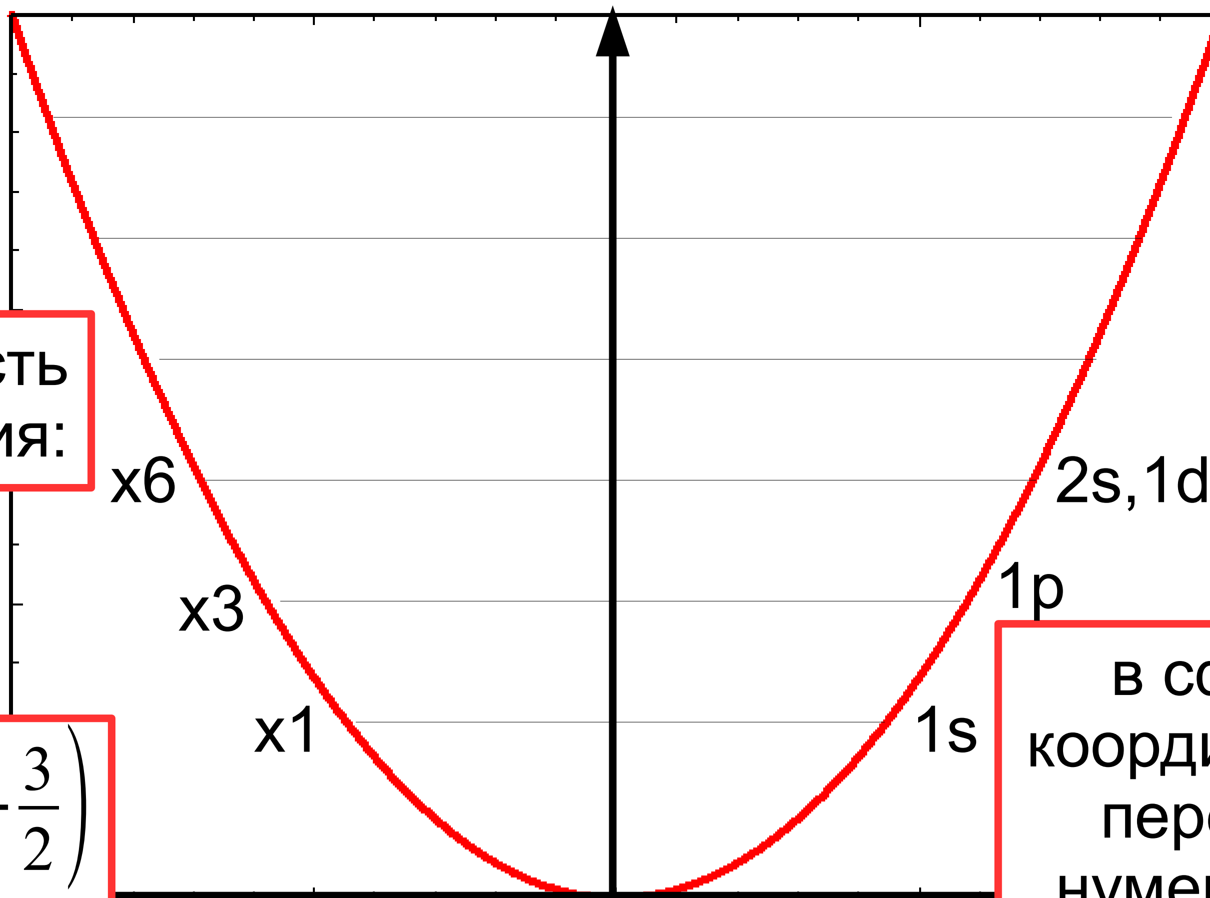
$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{3}{2}\right)$$

$$n=n_x+n_y+n_z$$

Трёхмерный осциллятор U=kr²/2

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi+\frac{kr^2}{2}\Psi=E\Psi$$

кратность вырождения:

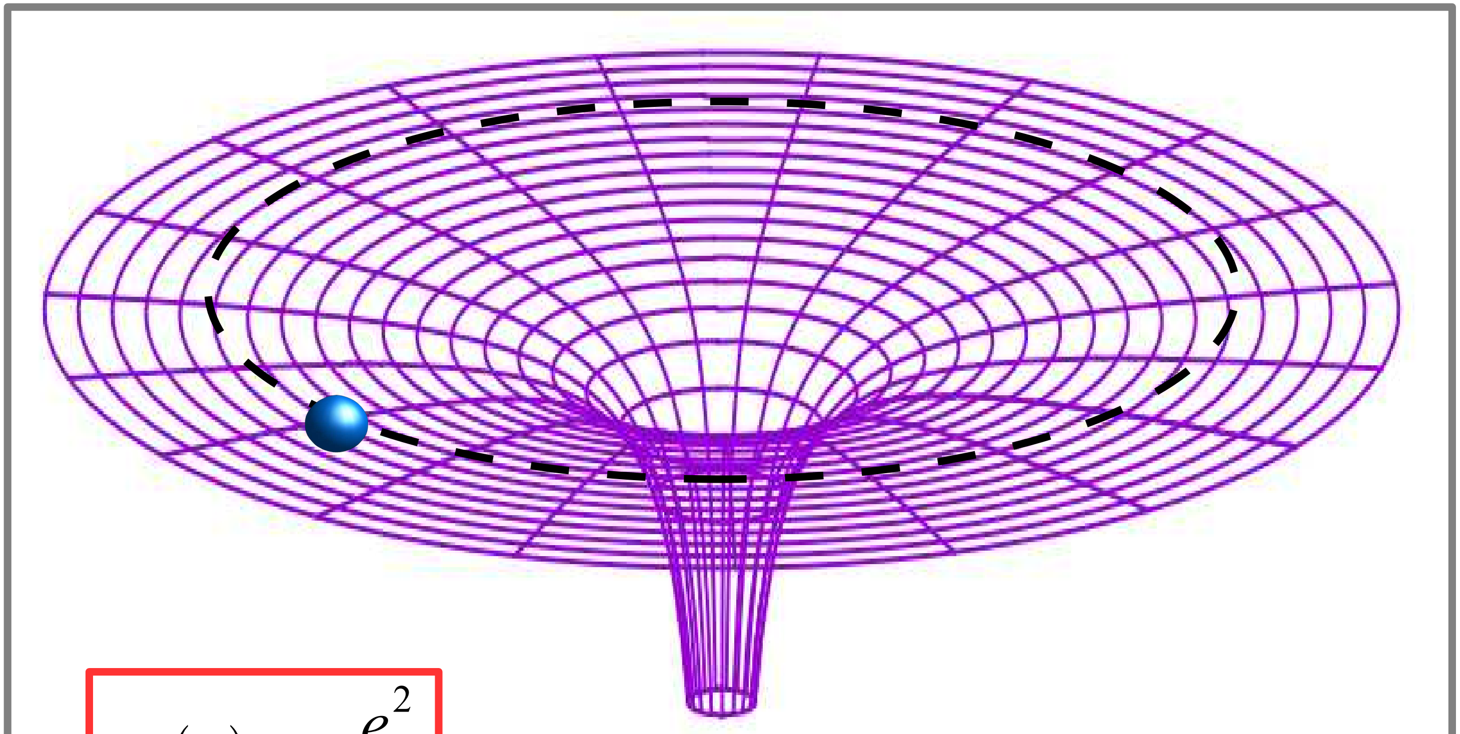


$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{3}{2}\right)$$

$$n=n_x+n_y+n_z$$

в сферических координатах (цифра перед номером нумерует уровни с одинаковым *l*)

Кулоновский потенциал U(r)=-e²/r.



$$U(r) = -\frac{e^2}{r}$$

Кулоновский потенциал U(r)=-e²/r.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi-\frac{e^2}{r}\Psi=E\,\Psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\xi''+\left(-\frac{e^2}{r}+\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}\right)\xi=E\,\xi$$

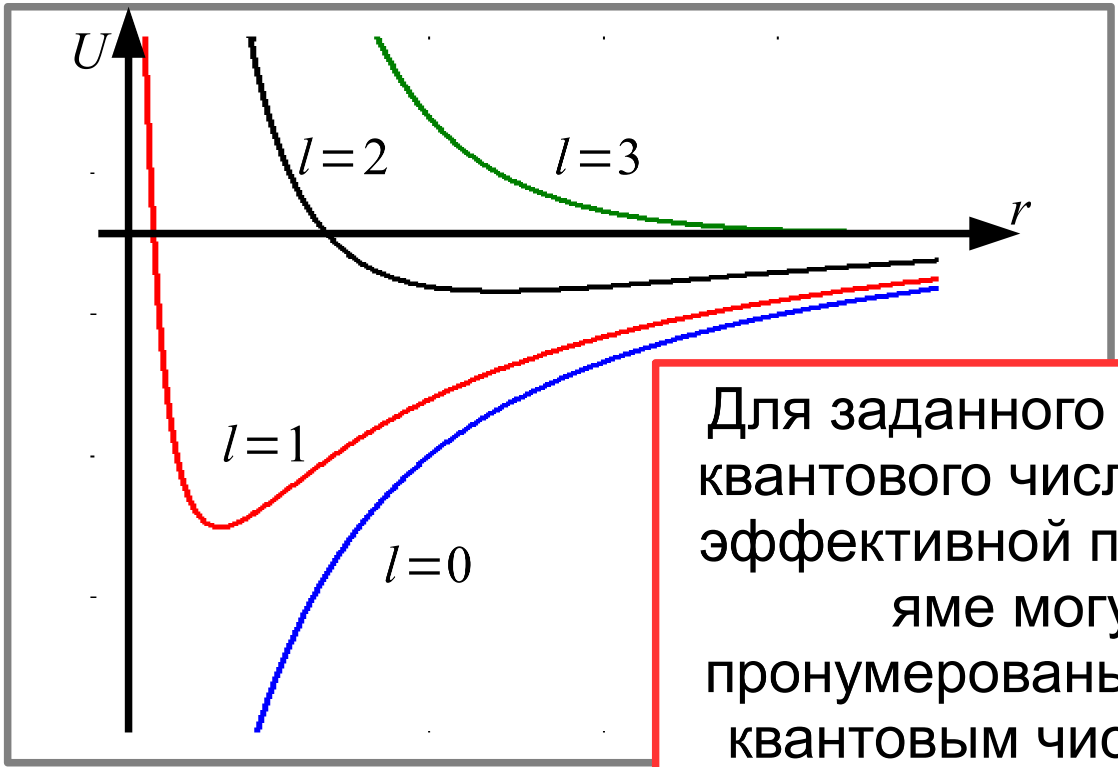
$$\Psi=\frac{\xi\left(r\right)}{r}\times Y_{lm}\left(\Theta,\phi\right)$$

Кулоновский потенциал U(r)=-e²/r.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi-\frac{e^2}{r}\Psi=E\,\Psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\xi''+\left(-\frac{e^2}{r}+\frac{l(l+1)}{r^2}\right)\xi=E\,\xi$$

$$\Psi=\frac{\xi(r)}{r}\times Y_{lm}(\Theta,\phi)$$



Для заданного орбитального квантового числа l решения в эффективной потенциальной яме могут быть пронумерованы радиальным квантовым числом n_r=0, 1 ...

Кулоновский потенциал U(r)=-e²/r.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi - \frac{e^2}{r}\Psi = E\Psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\xi'' + \left(-\frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\xi = E\xi$$

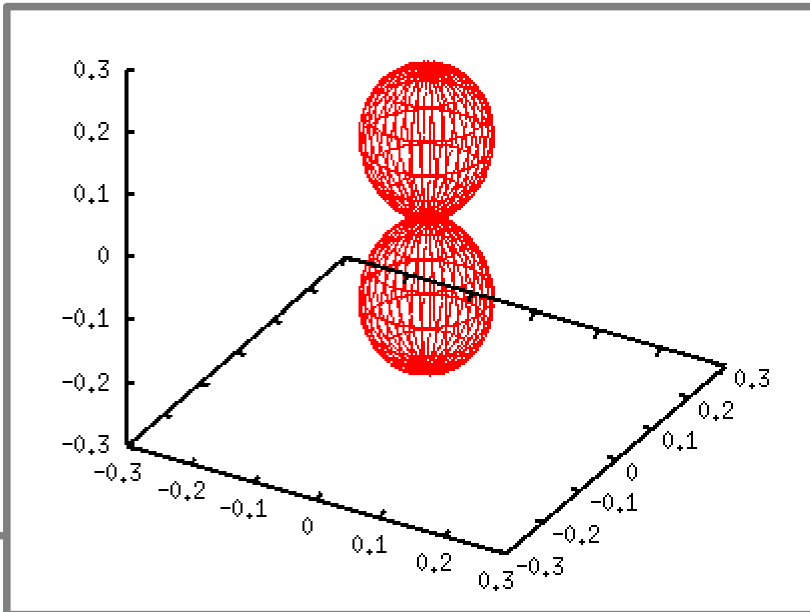
$$\Psi = \frac{\xi(r)}{r} \times Y_{lm}(\Theta, \phi)$$

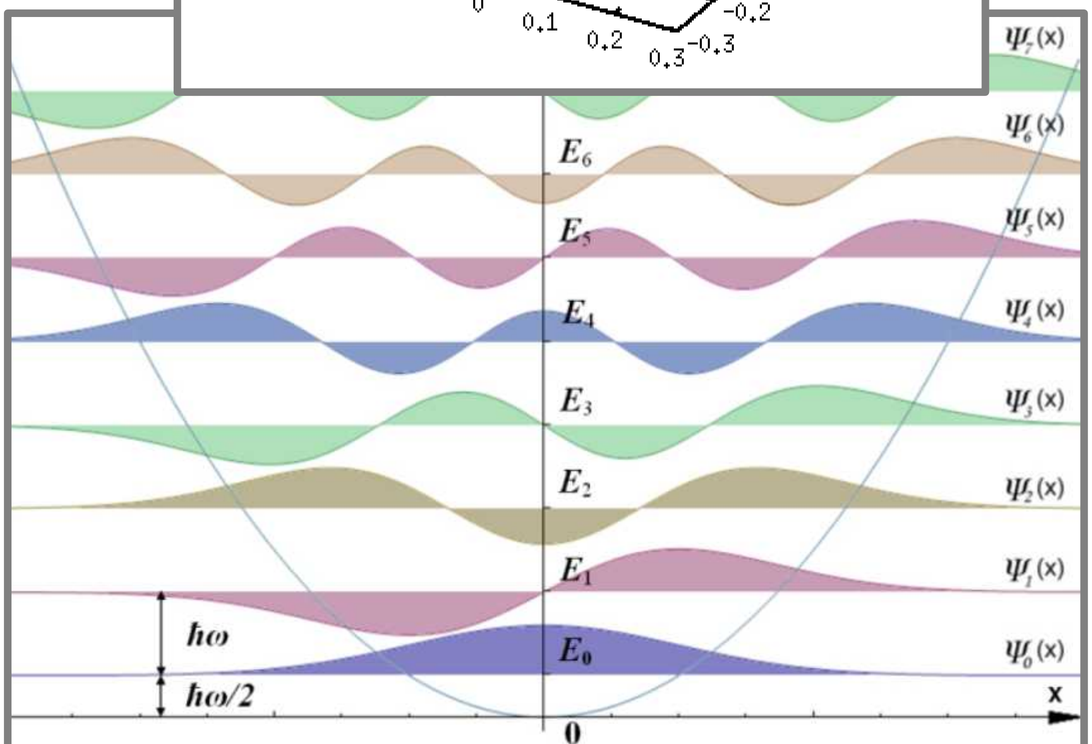
$$E_n = -\frac{m e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$$

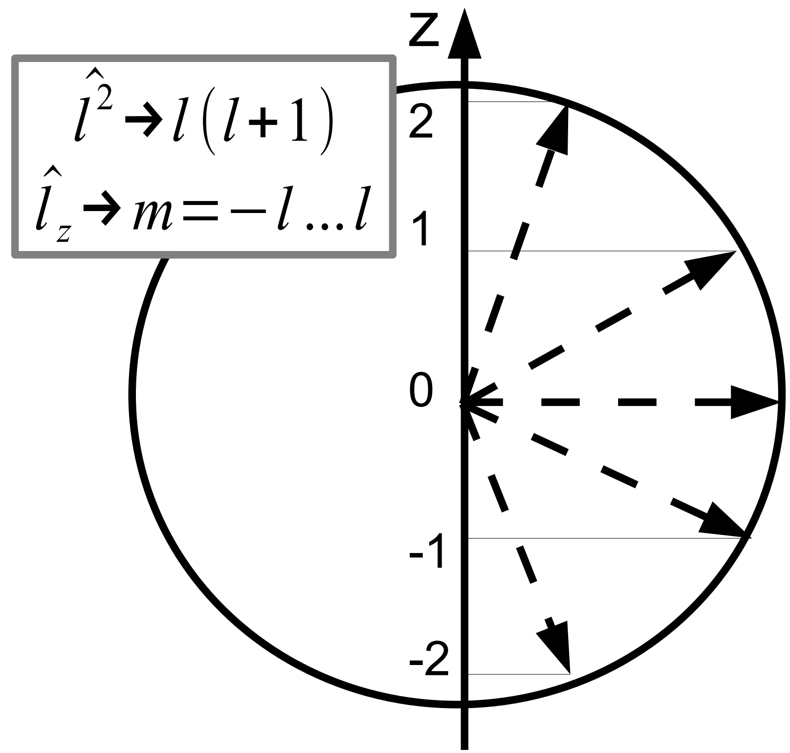
13.6 эВ

Только ответы:
1) *случайное* вырождение по орбитальному квантовому числу
2) энергию определяет главное квантовое число $n = n_r + l + 1$
3) возможные значения момента $l = 0, 1 \ldots (n-1)$

Основное на лекции







$$\hat{l}^2 \rightarrow l(l+1)$$

$$\hat{l}_z \rightarrow m = -l \ldots l$$