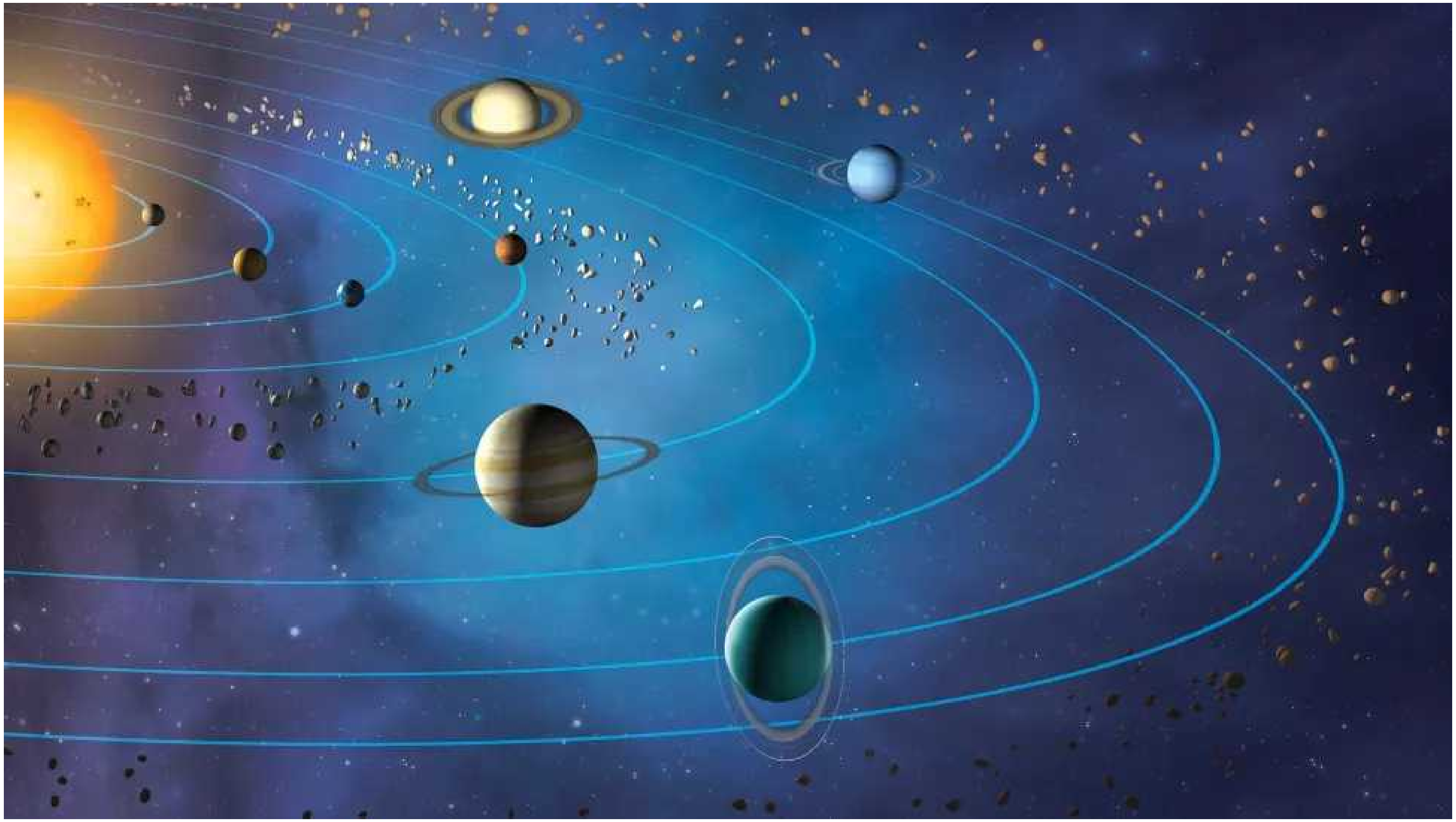
Лекция 7.

1. Спин. Опыты Эйнштейна-де Гааза и Штерна-Герлаха.
2. Квантовые числа атома водорода. Тонкая и сверхтонкая структура атомных уровней атома водорода.
3. Сложение моментов.
4. Тождественность частиц в квантовой физике.

В.Н.Глазков, МФТИ 2022

Часть 1. Спин электрона



Artwork showing the planets orbiting the sun (from inner to outer): Mercury, Venus, Earth, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus and Neptune. (Image credit: Mark Garlick/science Photo Library via Getty Images)

Собственный момент импульса (спин)

$$\hat{l}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

В системе покоя частицы её волновая функция может зависеть от поворота вокруг оси...

У частицы есть собственный момент импульса (спин).

Собственный момент импульса (спин)

$$\hat{l}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

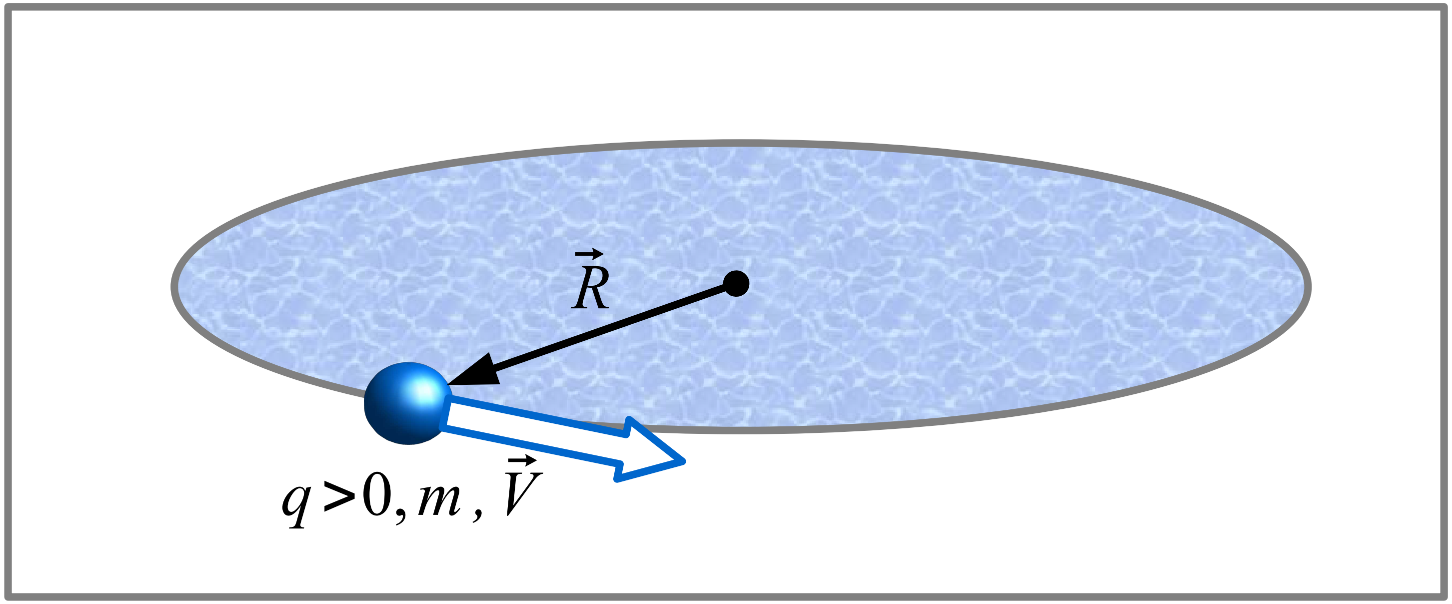
В системе покоя частицы её волновая функция может зависеть от поворота вокруг оси...

У частицы есть собственный момент импульса (спин).

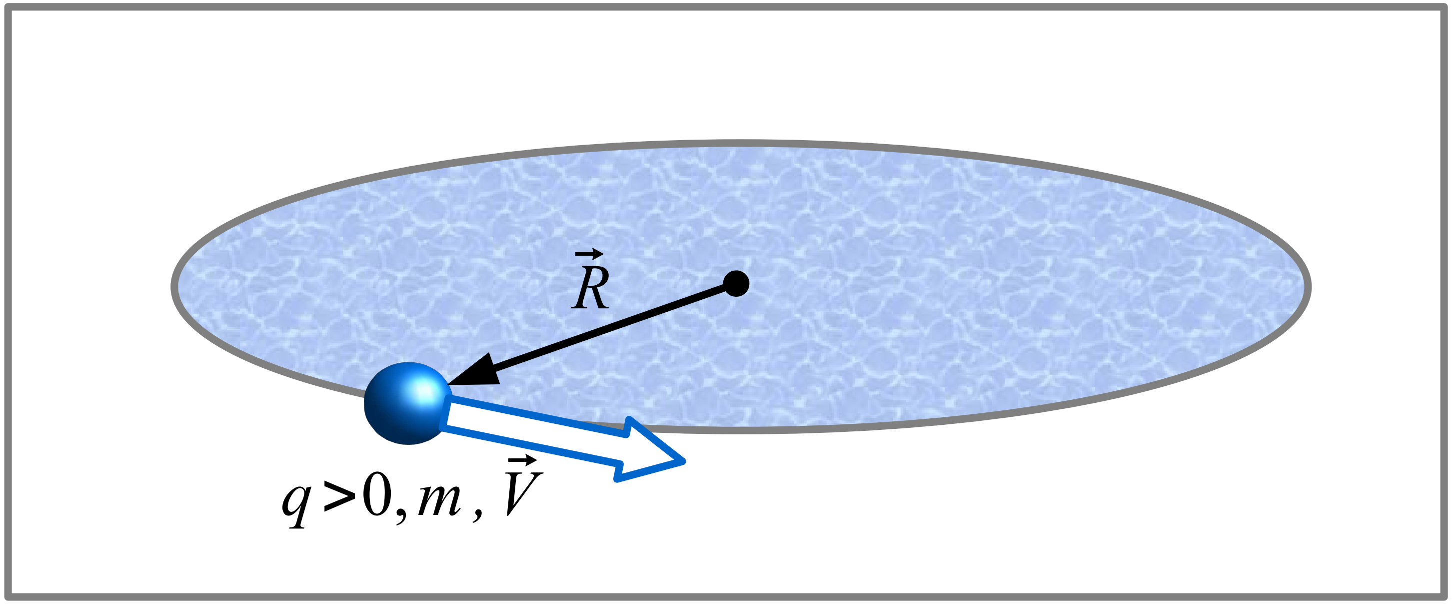
В нерелятивистской квантовой физике существование спина постулируется.

Спин квантовых частиц может быть целым (в т.ч. 0) и полуцелым.

Гиромагнитное отношение



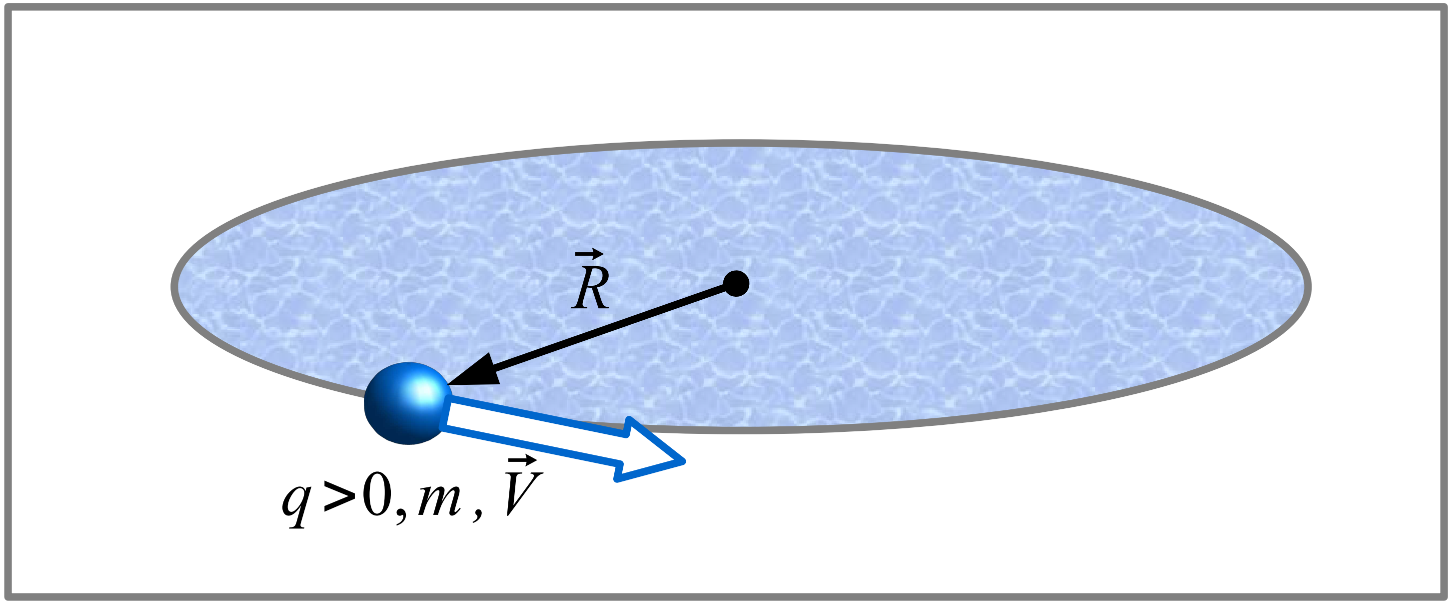
Гиромагнитное отношение



момент импульса: $L = m V r$

магнитный момент (СГС): $M = \pi r^2 \times \frac{1}{c} \frac{q}{2\pi r / V} = \frac{q V r}{2c}$

Гиромагнитное отношение



момент импульса: $L = m V r$

магнитный момент (СГС): $M = \pi r^2 \times \dfrac{1}{c} \dfrac{q}{2\pi r / V} = \dfrac{q V r}{2c}$

$$\frac{M}{L} = \frac{q}{2mc}$$

Гиромагнитное отношение

$q>0,$

момент

магнитный мо

$$\frac{M}{L}=\frac{q}{2mc}$$

Характерный масштаб для электрона:

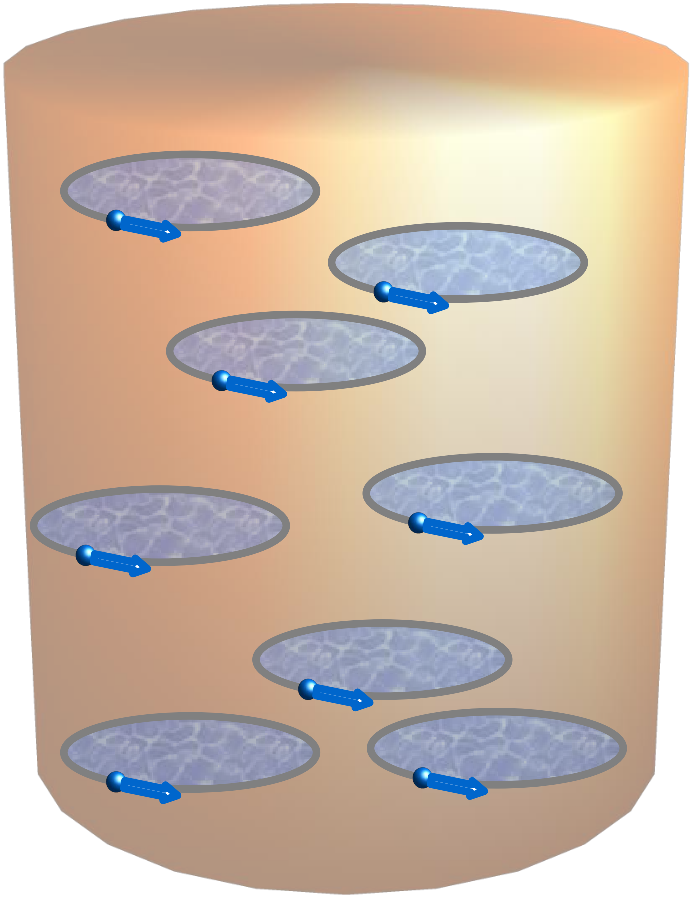
$$\mu_B \underset{(\text{СГС})}{=} \frac{e\hbar}{2m_e c} = 0.927\times10^{-20}\ \text{эрг/Гс} = \\ = 5.8\times10^{-9}\ \text{эВ/Гс}$$

для ядра:

$$\mu_n \underset{(\text{СГС})}{=} \frac{e\hbar}{2m_p c} \approx \frac{1}{2000}\mu_B$$

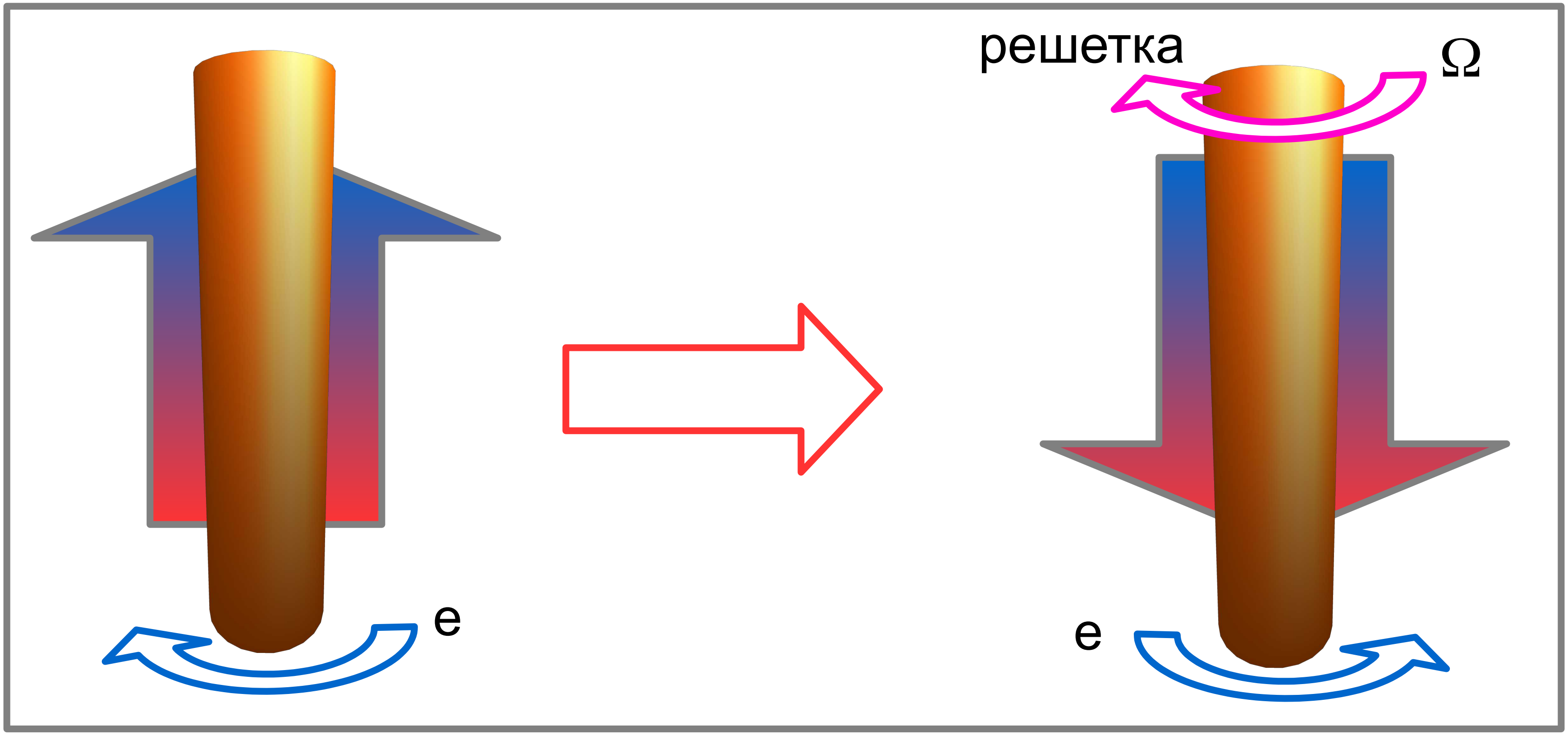
Опыты Эйнштейна-де Гааза

«Молекулярные токи» Ампера



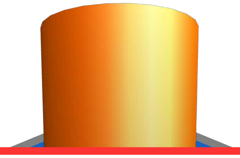
Опыты Эйнштейна-де Гааза

Идея: измерить изменение момента импульса при полном перемагничивании образца.



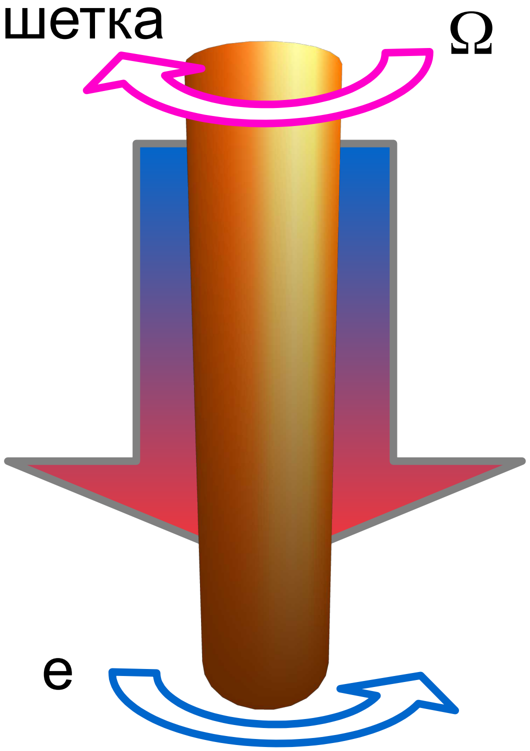
Опыты Эйнштейна-де Гааза

Идея: измерить изменение момента импульса при полном перемагничивании образца.



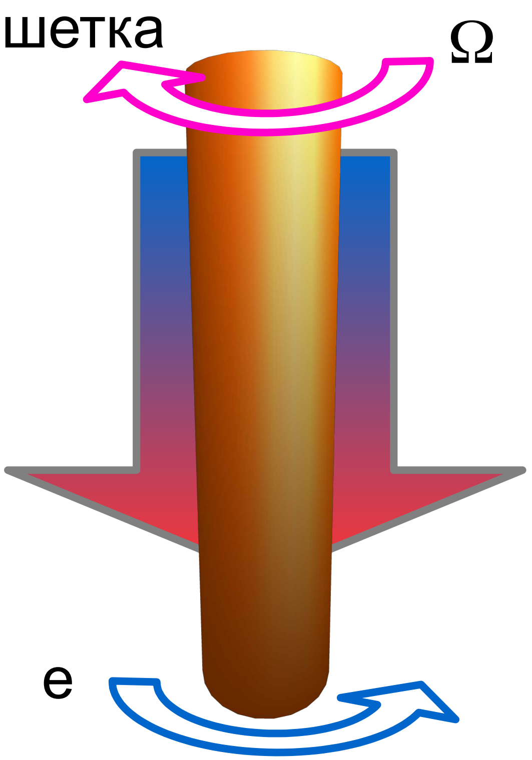
$$L_e = \pm N \hbar l_e$$

$$\Omega = \frac{\Delta L}{I} = \frac{2N\hbar l_e}{I} = \frac{2\hbar l_e}{M_0 r^2}$$



Опыты Эйнштейна-де Гааза

Идея: измерить изменение момента импульса при полном перемагничивании образца.

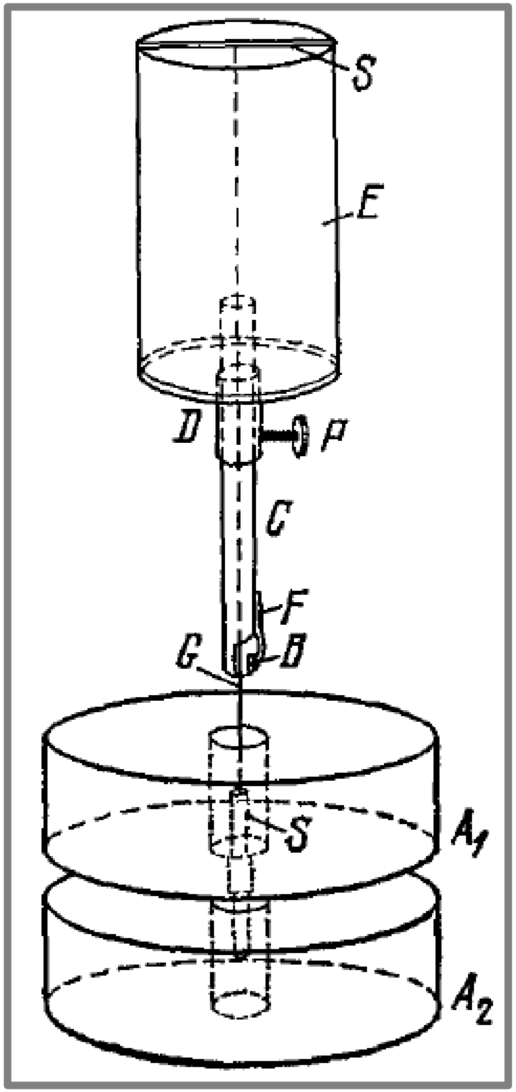


$$L_e = \pm N\hbar l_e$$

$$\Omega = \frac{\Delta L}{I} = \frac{2N\hbar l_e}{I} = \frac{2\hbar l_e}{M_0 r^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_0\left({}^{56}Fe\right) \sim 9.3\cdot 10^{-23}\,\text{г} \\ r = 1\,\text{мм} \end{array}\right\} \rightarrow \Omega \sim 10^{-3}\ 1/\text{сек}$$

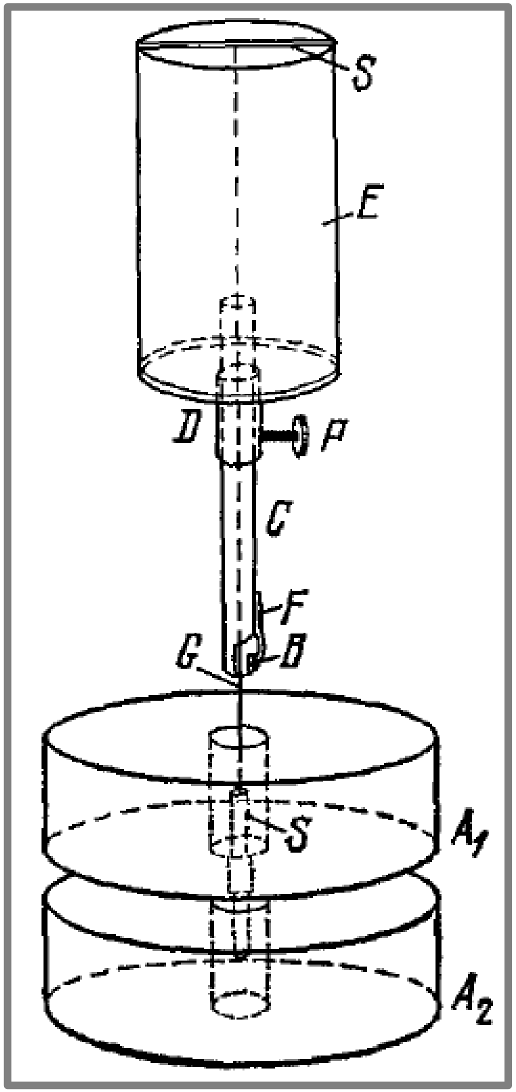
Организация опыта Эйнштейна-де Гааза



Торсионный маятник+перемагничивание на резонансной частоте!

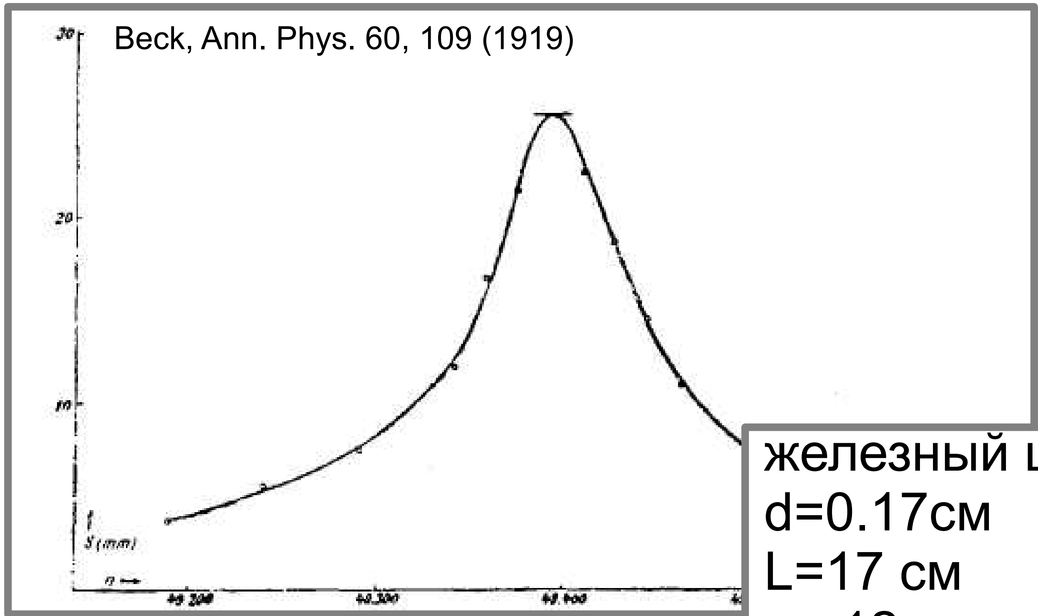
УФН 128, 545 (1979)

Организация опыта Эйнштейна-де Гааза



УФН 128, 545 (1979)

Торсионный маятник+перемагничивание на резонансной частоте!



Beck, Ann. Phys. 60, 109 (1919)

железный цилиндр
d=0.17см
L=17 см
m=12 г
f~50 Гц
амплитуда колебаний «зайчика» ~10 мм

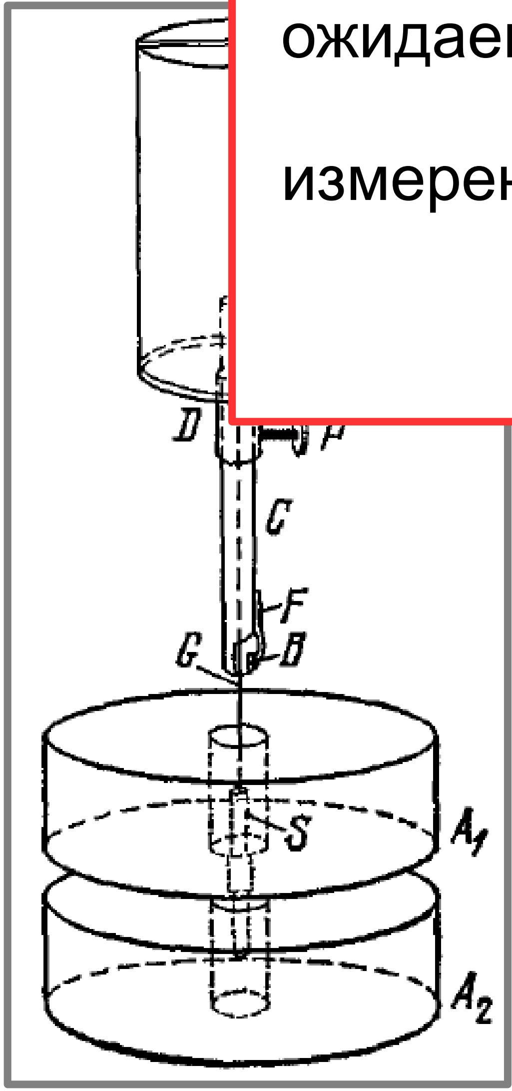
Организация опыта Эйнштейна-де Гааза

Результат Эйнштейна-де Гааза:

ожидаемое $$\gamma = \frac{L}{M} \underset{(\text{СИ})}{=} \frac{2m}{e} = 1.13\times10^{-11}\frac{\text{кг}}{\text{Кл}}$$

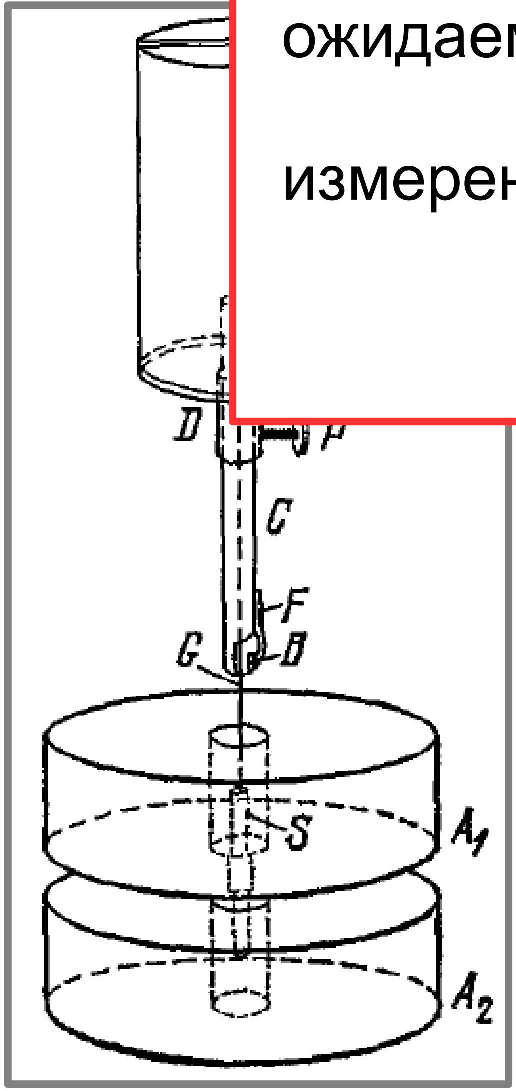
измеренное $1.4\times10^{-11}\,\text{кг}/\text{Кл}$

Успех?



УФН 128, 545 (1979)

Организация опыта Эйнштейна-де Гааза



Результат Эйнштейна-де Гааза:

ожидаемое $$\gamma = \frac{L}{M} \underset{(\text{СИ})}{=} \frac{2m}{e} = 1.13 \times 10^{-11} \frac{\text{кг}}{\text{Кл}}$$

измеренное 1.4×10^{-11} кг / Кл

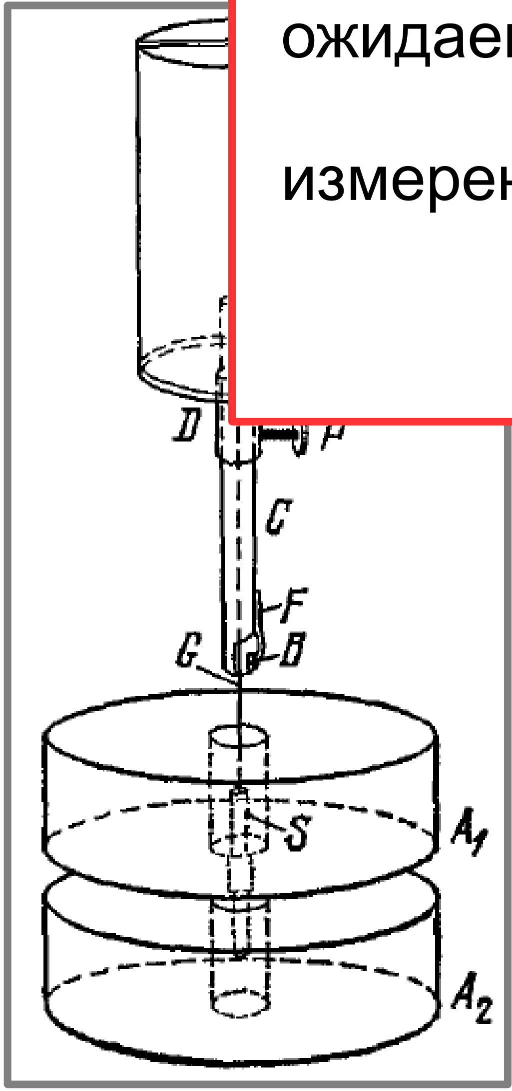
Повторение опыта в следующие годы с повышением точности сместило результат к

$$\gamma' = \frac{m}{e} = 0.57 \times 10^{-11} \frac{\text{кг}}{\text{Кл}}$$

Не соответствует модели «орбитального магнетизма»!

УФН 128, 545 (1979)

Организация опыта Эйнштейна-де Гааза



Результат Эйнштейна-де Гааза:

ожидаемое $$\gamma = \frac{L}{M} \underset{(\text{СИ})}{=} \frac{2m}{e} = 1.13\times10^{-11}\,\frac{\text{кг}}{\text{Кл}}$$

измеренное $1.4\times10^{-11}\,\text{кг}/\text{Кл}$

а

Повторение опыта в следующие годы с повышением точности сместило результат к

$$\gamma' = \frac{m}{e} = 0.57\times10^{-11}\,\frac{\text{кг}}{\text{Кл}}$$

Не соо

«орбита

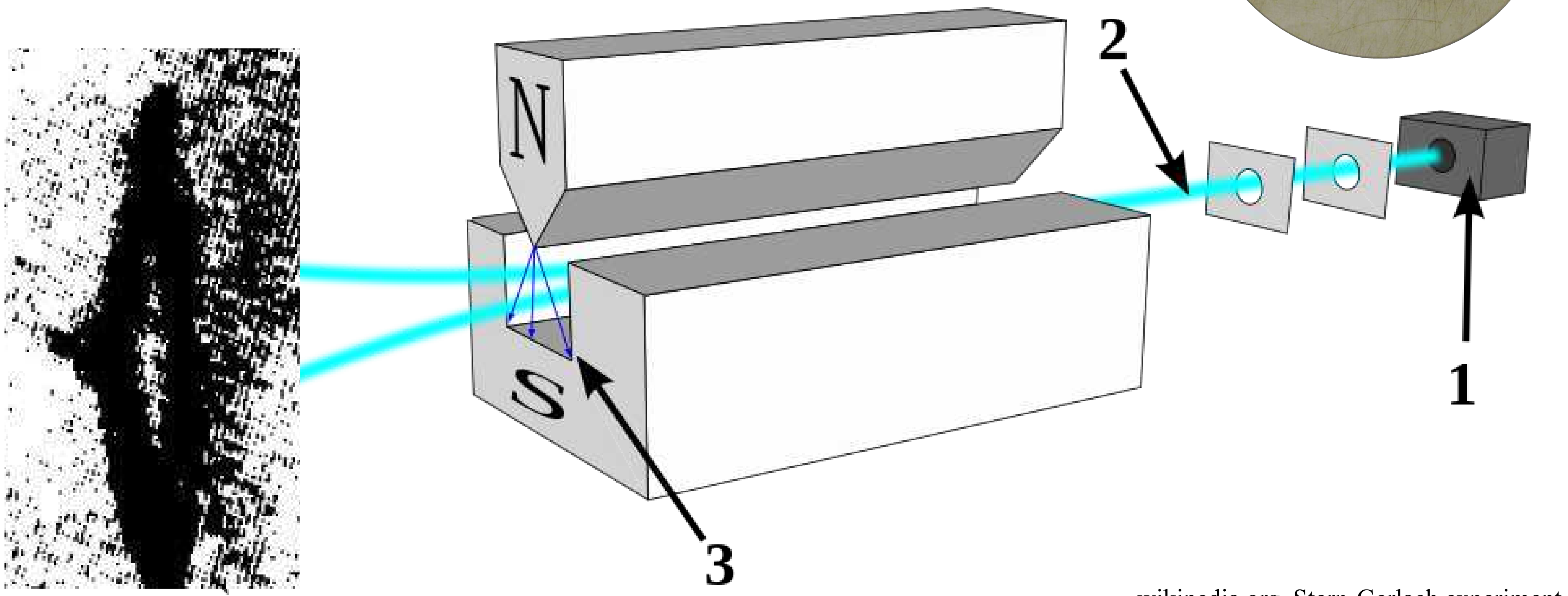
По модели Бора в О.С.: $l_e = 1$

Эксперимент соответствует тому, что на μ_B приходится $l_e = 1/2$??!!

УФН 128, 545 (1979)

Опыт Штерна-Герлаха

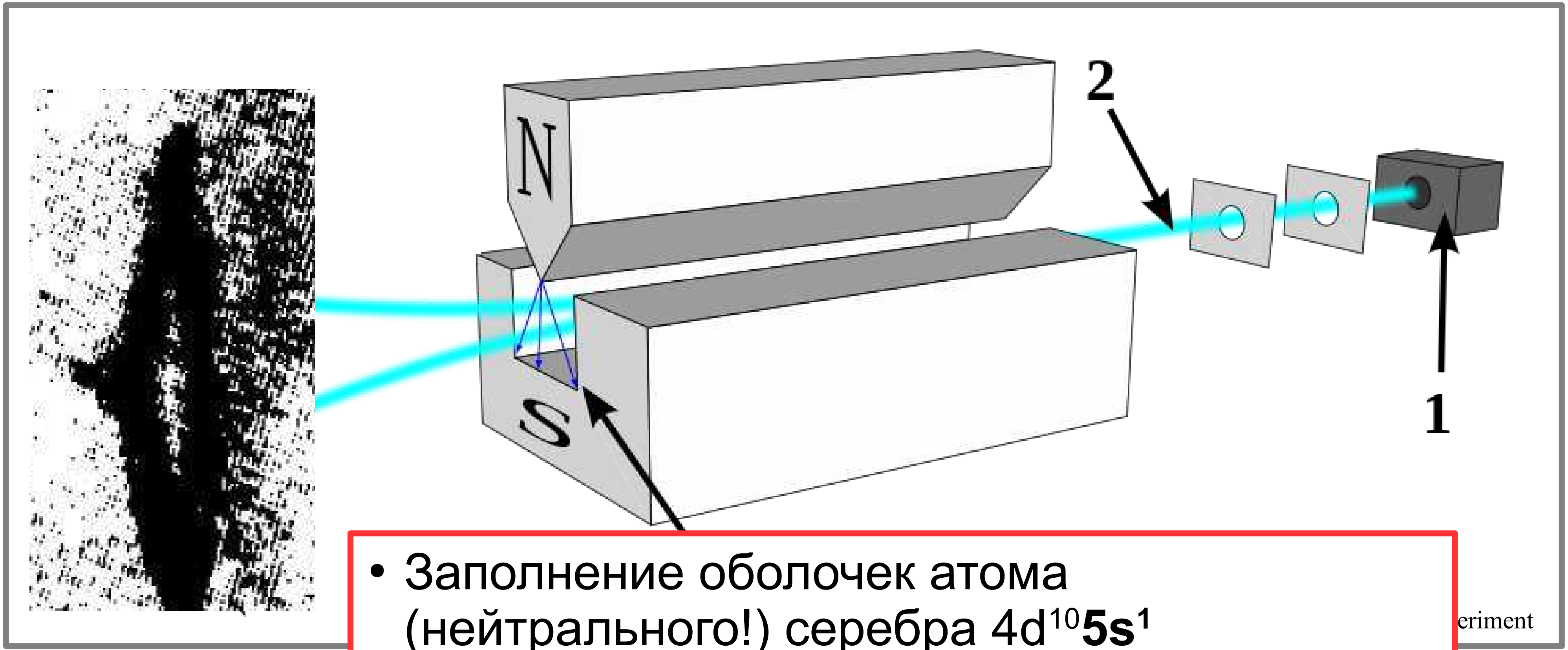
1922 - 2022



wikipedia.org, Stern-Gerlach experiment

Изображение результата эксперимента: Otto Stern,
Nobel Lecture: The Method of Molecular Rays,

Опыт Штерна-Герлаха

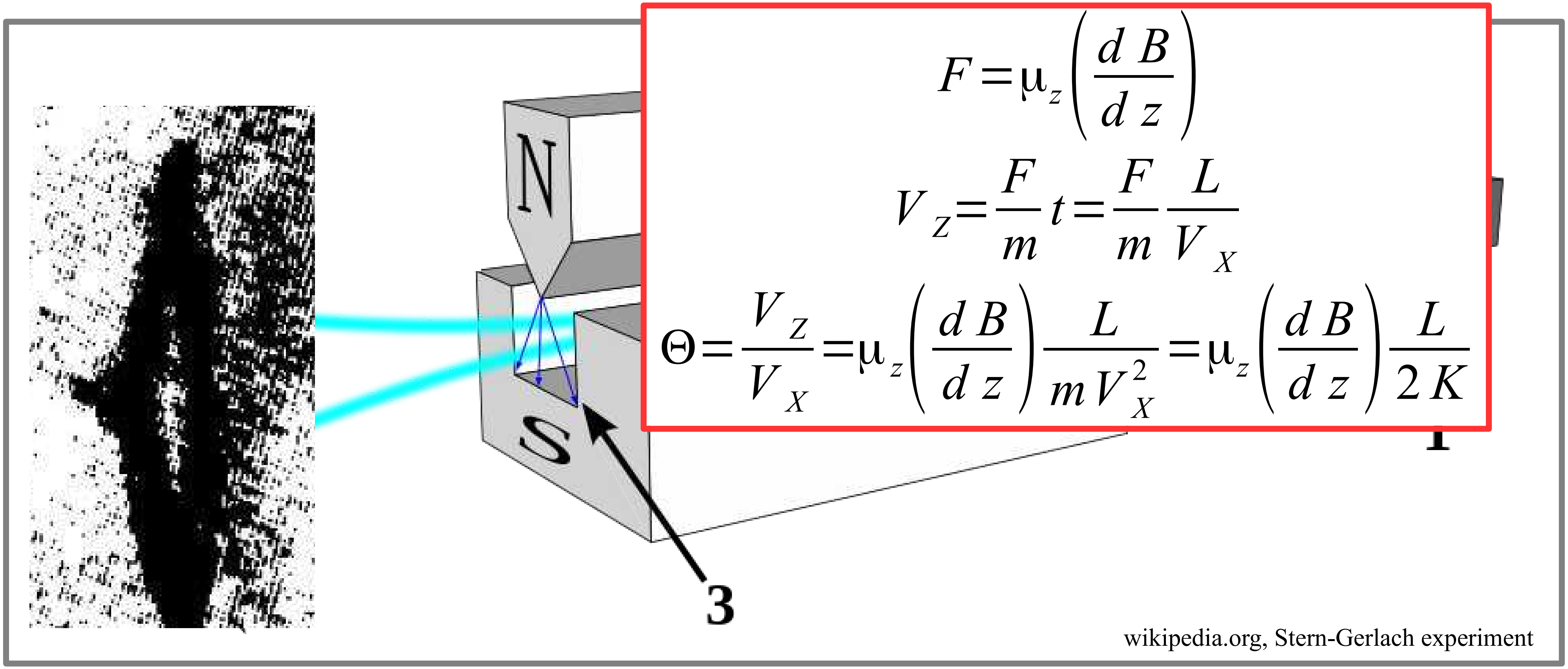


eriment

Изображение результата экспер
Nobel Lecture: The Method of M

- Заполнение оболочек атома (нейтрального!) серебра $4d^{10}\mathbf{5s}^{1}$
- Силы Лоренца нет (нейтральный атом)
- В неоднородном поле будет «втягивание» магнитного момента
- В рамках модели Бора был бы орбитальный момент импульса $\hbar$

Опыт Штерна-Герлаха



$$F = \mu_z \left(\frac{dB}{dz} \right)$$

$$V_Z = \frac{F}{m} t = \frac{F}{m} \frac{L}{V_X}$$

$$\Theta = \frac{V_Z}{V_X} = \mu_z \left(\frac{dB}{dz} \right) \frac{L}{m V_X^2} = \mu_z \left(\frac{dB}{dz} \right) \frac{L}{2K}$$

wikipedia.org, Stern-Gerlach experiment

Изображение результата эксперимента: Otto Stern,
Nobel Lecture: The Method of Molecular Rays,

Опыт Штерна-Герлаха

Изображение результата экспериме
Nobel Lecture: The Method of Molec

$$F=\mu_z\left(\frac{dB}{dz}\right)$$

$$V_Z=\frac{F}{m}t=\frac{F}{m}\frac{L}{V_X}$$

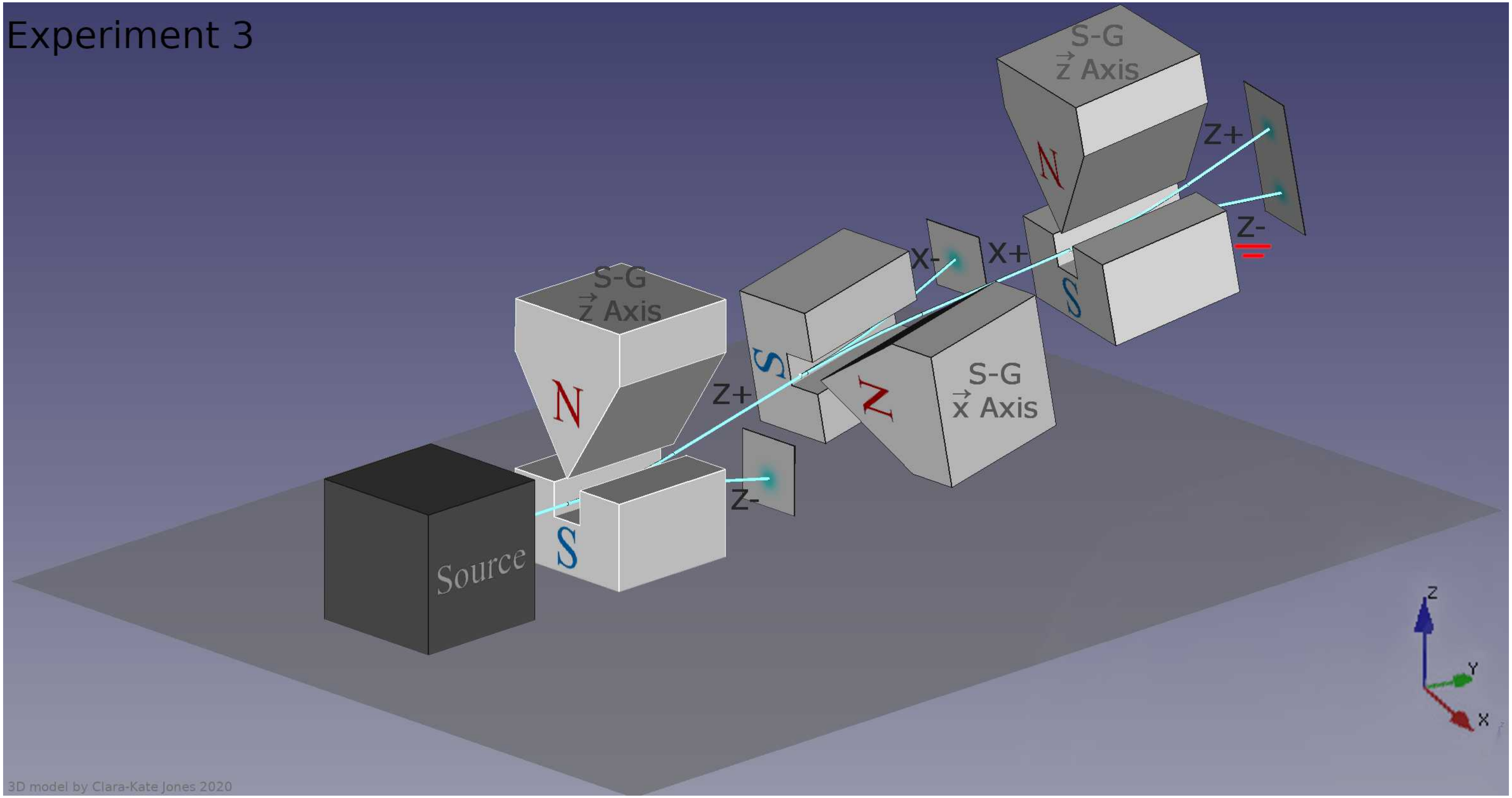
$$\Theta=\frac{V_Z}{V_X}=\mu_z\left(\frac{dB}{dz}\right)\frac{L}{mV_X^2}=\mu_z\left(\frac{dB}{dz}\right)\frac{L}{2K}$$

- В классической физике — непрерывный «веер» на выходе
- В «наивной» квантовой механике Бора с учётом орбитального магнетизма — дискретный «веер» из (2l+1) компоненты, *в том числе неотклоненный пучок*
- Эксперимент: ДВА пучка, БЕЗ НЕОТКЛОНЕННОЙ компоненты

Роль и развитие метода Штерна-Герлаха

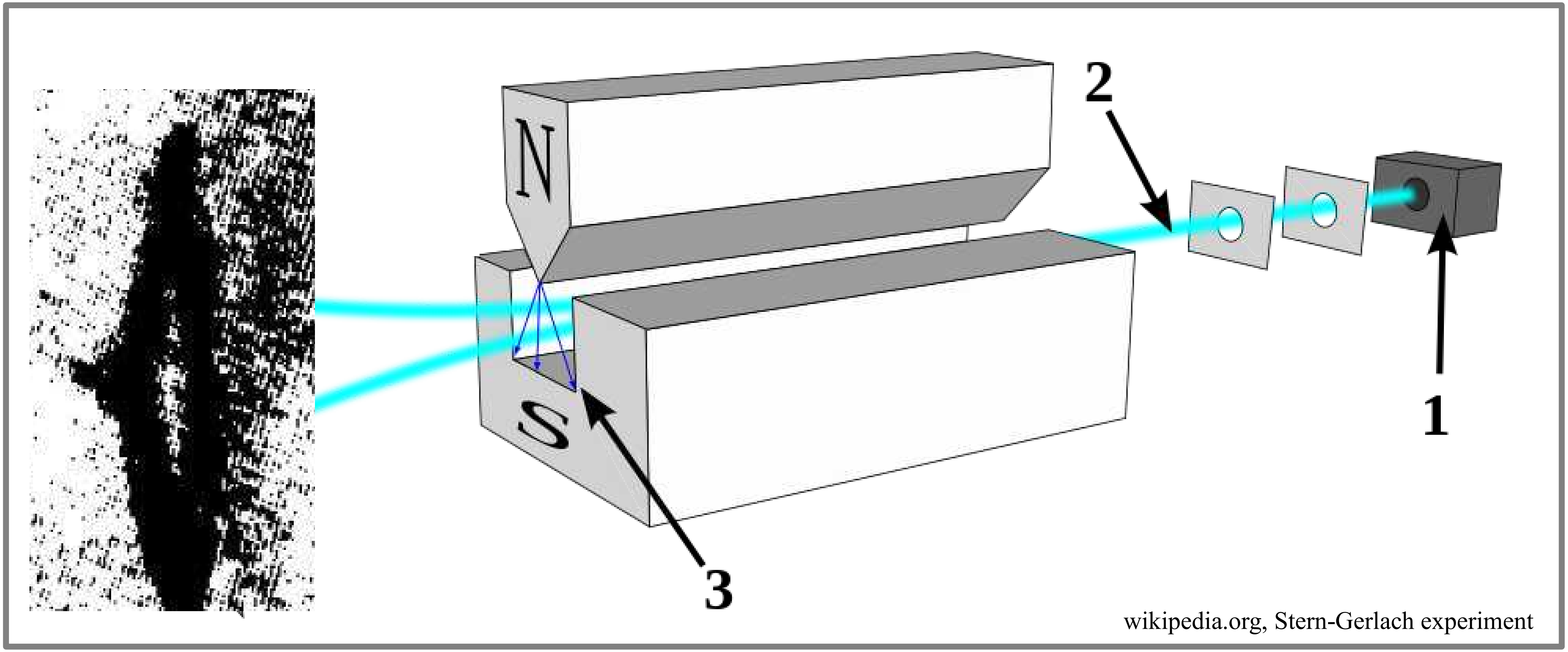
- возможность проверки соотношений неопределенности для момента импуьса
- опыты с другими частицами (нейтроны: J. E. Sherwood *et al* Phys. Rev. 96, 1546 (1954))
- метод молекулярных пучков, в том числе определение магнитного момента протонов по опытам с H_2 (Фриш и Штерн, УФН 14, 99 (1934))
- опыты с ультрахолодными бозе-конденсатами (Ch.Käfer, Stern-Gerlach experiments with Bose-Einstein condensates...., Uni.Freiburg, 2010, https://freidok.uni-freiburg.de/data/7695)

Эксперимент Штерна-Герлаха с последовательными «измерениями»



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cb/Stern-Gerlach_Analyzer_Sequential_Series_E3.png

Количественный анализ опыта Штерна-Герлаха

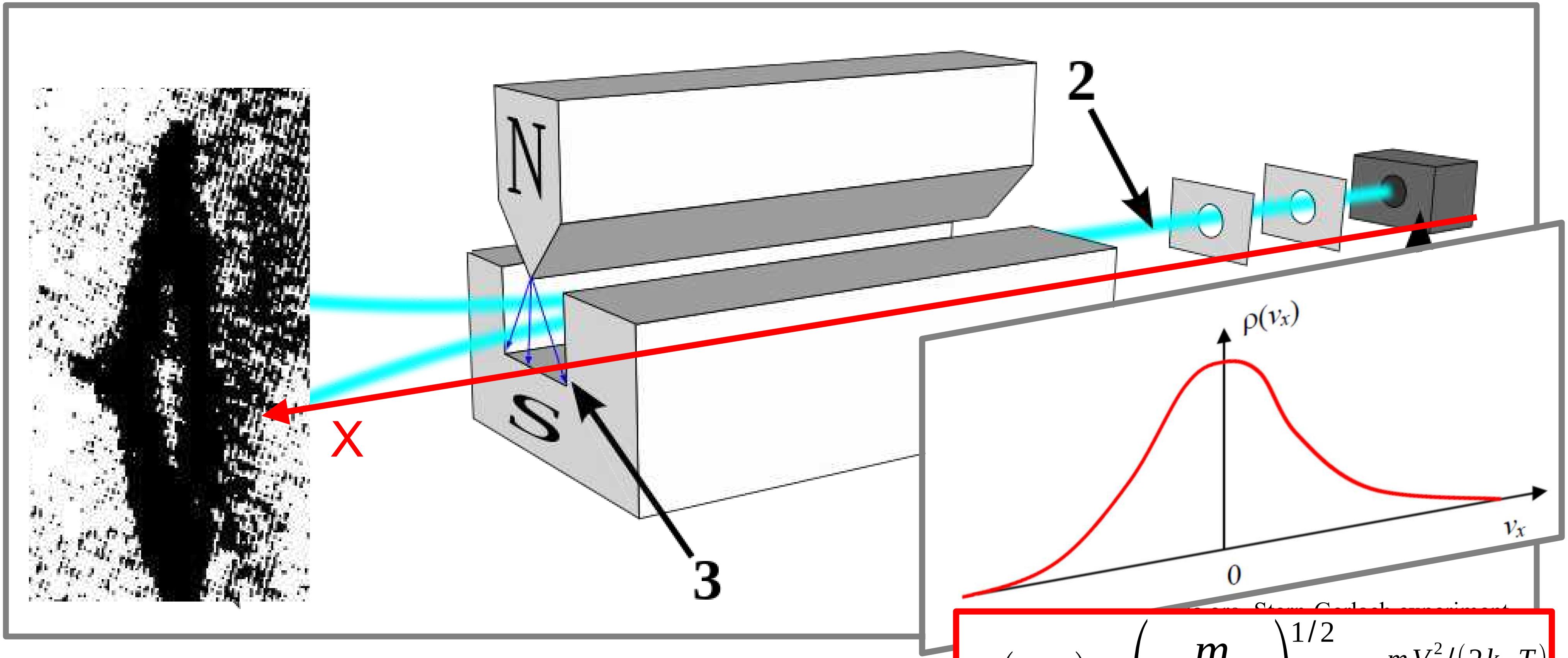


wikipedia.org, Stern-Gerlach experiment

Изображение результата эксперимента: Otto Stern,
Nobel Lecture: The Method of Molecular Rays,

$$\boxed{\Theta = \mu_z \left(\frac{d\,B}{d\,z}\right)\frac{L}{m V_X^2}}$$

Количественный анализ опыта Штерна-Герлаха



Изображение результата эксперимента: Otto Stern,
Nobel Lecture: The Method of Molecular Rays,

$$\rho\left(V_x\right)=\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2} e^{-mV_x^2/(2k_B T)}$$

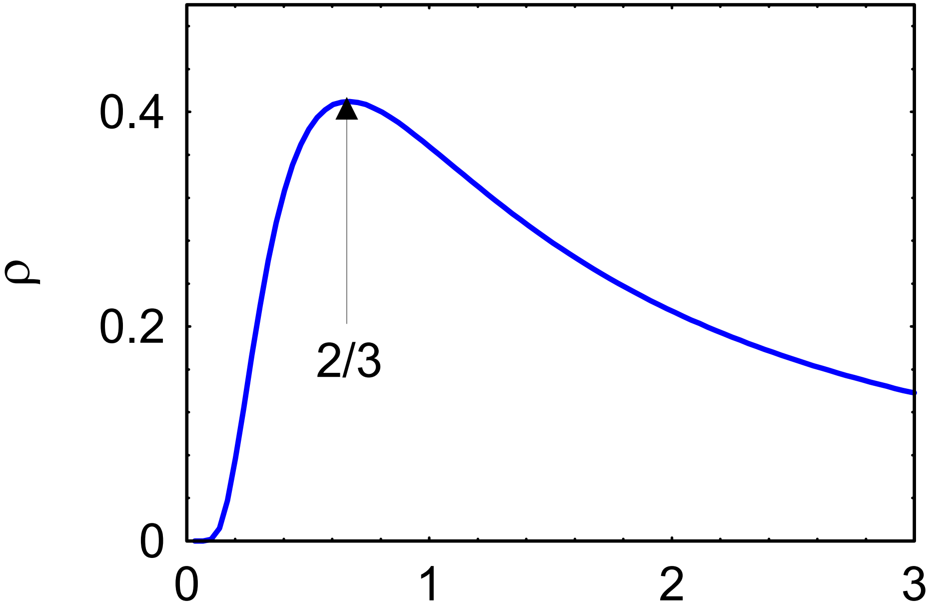
$$\Theta=\mu_z\left(\frac{dB}{dz}\right)\frac{L}{mV_X^2}$$

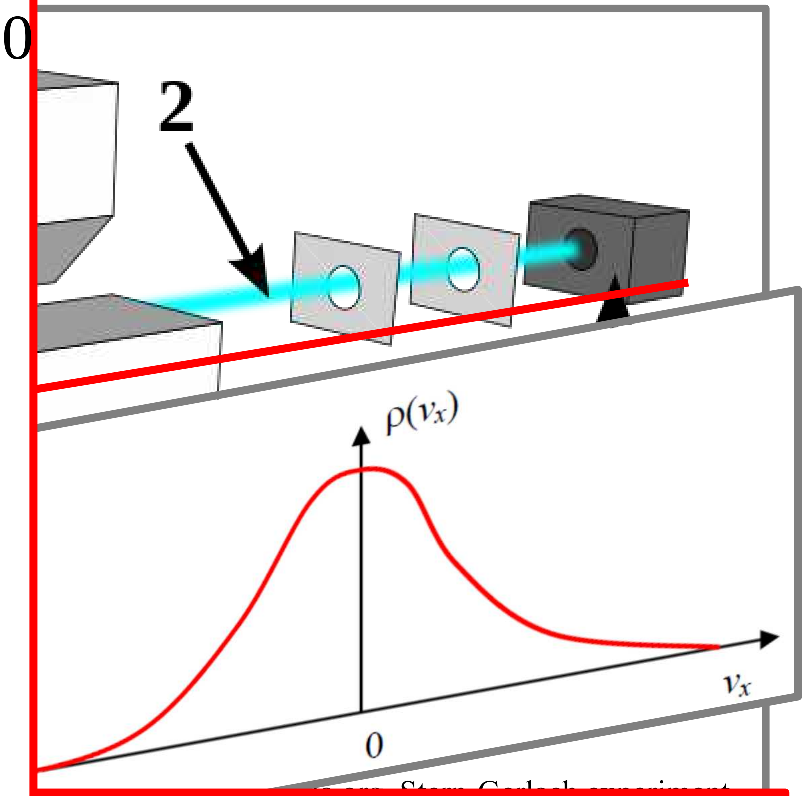
пыта Штерна-

фикс. μ_z : $1=2\int_0^{\infty}\rho(V_x)\,dV_x=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\Theta)\,d\Theta$

$$dV_x=\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{\mu_Z}{m}\left(\frac{dB}{dz}\right)L}\times\frac{1}{\Theta^{3/2}}d\Theta,\quad \mu_Z,\Theta>0$$

$$\rho(\Theta)\propto\frac{1}{\Theta^{3/2}}\exp\left(-\frac{\mu_z(dB/dz)L}{2k_BT\Theta}\right)$$





$$\rho(V_x)=\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2}e^{-mV_x^2/(2k_BT)}$$

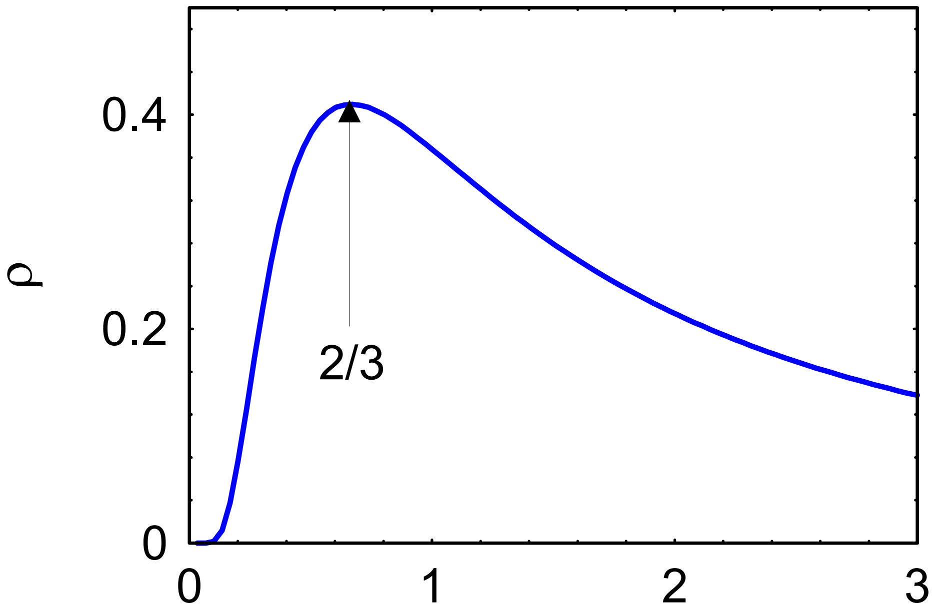
$$\Theta=\mu_z\left(\frac{dB}{dz}\right)\frac{L}{mV_X^2}$$

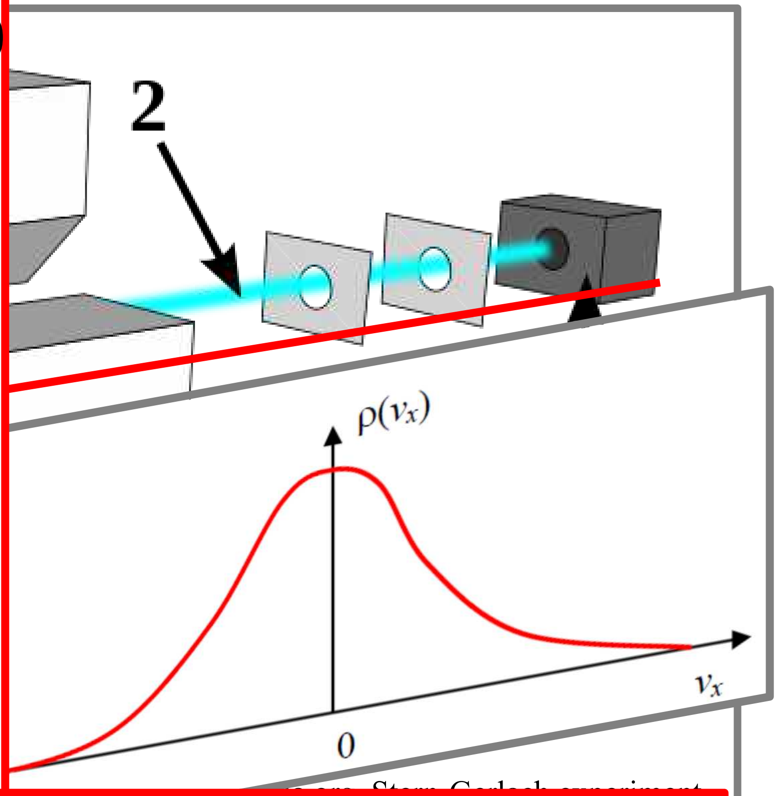
пыта Штерна-

фикс. μ_z : $1=2\int\limits_0^\infty \rho(V_x)\,dV_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(\Theta)\,d\Theta$

$$dV_x=\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{\mu_Z}{m}\left(\frac{dB}{dz}\right)L}\times\frac{1}{\Theta^{3/2}}d\Theta,\quad \mu_Z,\Theta>0$$

$$\rho(\Theta)\propto\frac{1}{\Theta^{3/2}}\exp\left(-\frac{\mu_z(dB/dz)L}{2k_BT\Theta}\right)$$





$$\Theta_{max}\approx\frac{3\mu_z(dB/dz)L}{4k_BT}$$

$$\Theta_{naive}=\mu_z\left(\frac{dB}{dz}\right)\frac{L}{mV_X^2}=\mu_z\left(\frac{dB}{dz}\right)\frac{L}{3kT}$$

Спин электрона

Эксперимент Эйнштейна-де Гааза (точный):
намагниченности в магнетон Бора отвечает момент импульса на атом $\hbar/2$

Эксперимент Штерна-Герлаха:
наличие двух проекций импульса (двух проекций магнитного момента) можно объяснить, если полный момент импульса атома с одним электроном на внешней s-оболочке равен $\hbar/2$

Спин электрона

Эксперимент Эйнштейна-де Гааза (точный):
намагниченности в магнетон Бора отвечает момент импульса на атом $\hbar/2$

Эксперимент Штерна-Герлаха:
наличие двух проекций импульса (двух

Электрон обладает своим собственным моментом импульса, спином.
Спин электрона равен 1/2 (в единицах $\hbar$).
В нерелятивистской квантовой теории наличие спина постулируется.

Часть 2. Классификация состояний электрона в атоме водорода

$$\left| n\, , l\, , m\, , S_z \right\rangle$$

Классификация состояний электрона в атоме водорода

$$|n, l, m, S_z\rangle$$

Главное (энергетическое) квантовое число

$$\boxed{E_n = -\frac{Ry}{n^2}}$$

Классификация состояний электрона в атоме водорода

$$\left|n\,,l\,,m\,,S_z\right\rangle$$

Орбитальное квантовое число

$$\boxed{l \le (n-1)}$$

Главное (энергетическое) квантовое число

$$\boxed{E_n = -\frac{Ry}{n^2}}$$

Классификация состояний электрона в атоме водорода

$$\left|n, l, m, S_z\right\rangle$$

Проекция орбитального момента импульса

$$\boxed{-l \leq m \leq l}$$

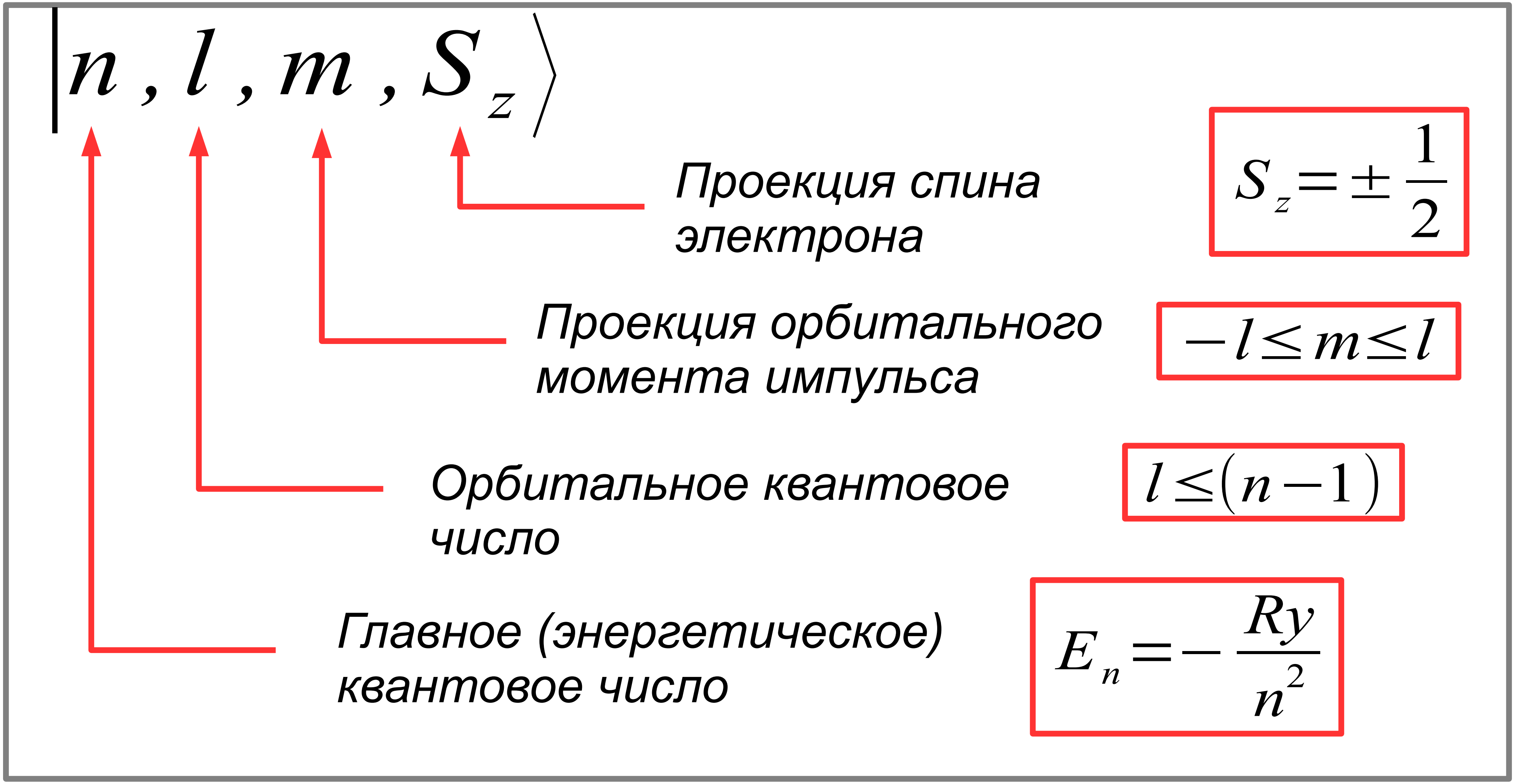
Орбитальное квантовое число

$$\boxed{l \leq (n-1)}$$

Главное (энергетическое) квантовое число

$$\boxed{E_n = -\frac{Ry}{n^2}}$$

Классификация состояний электрона в атоме водорода



$$\left|n, l, m, S_z\right\rangle$$

Проекция спина электрона

$$\boxed{S_z = \pm \frac{1}{2}}$$

Проекция орбитального момента импульса

$$\boxed{-l \le m \le l}$$

Орбитальное квантовое число

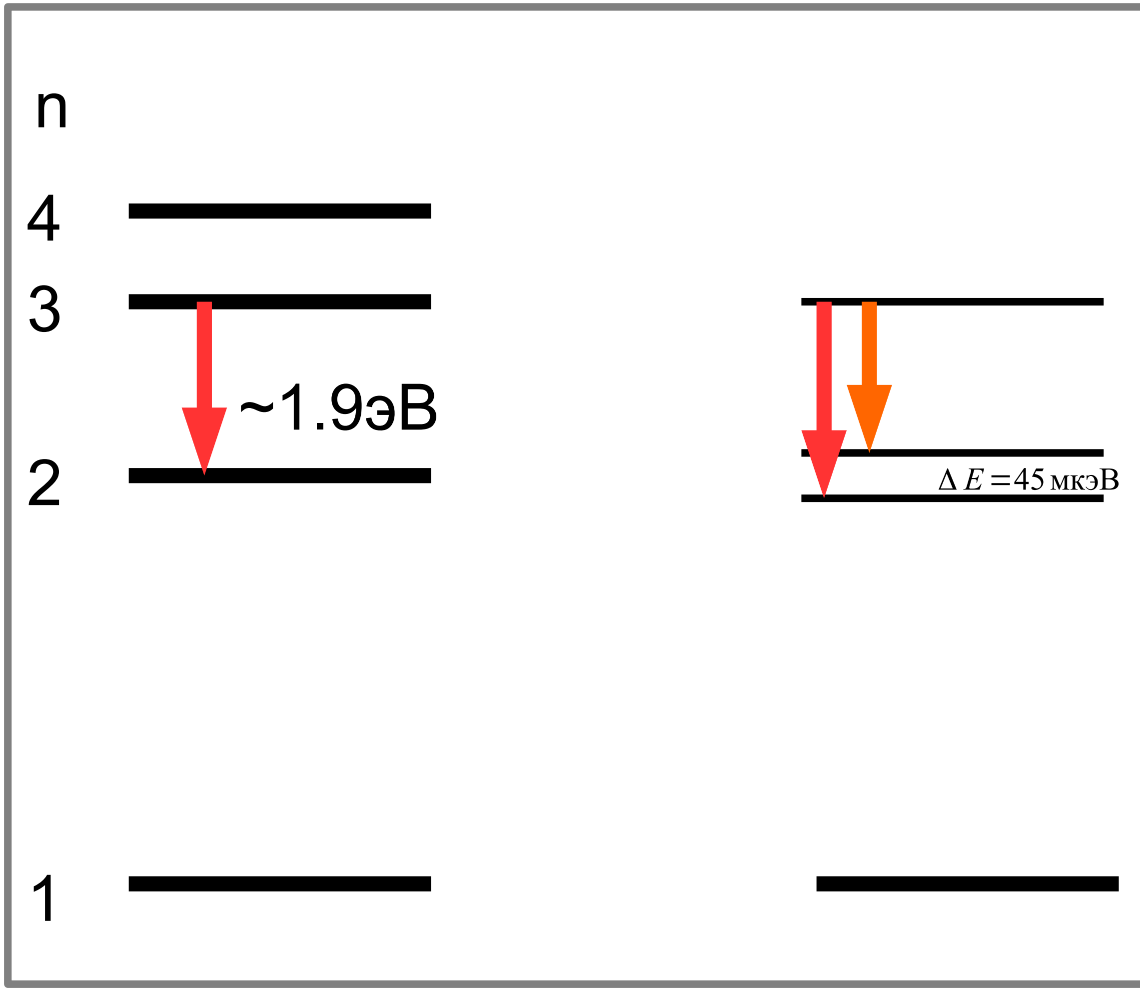
$$\boxed{l \le (n-1)}$$

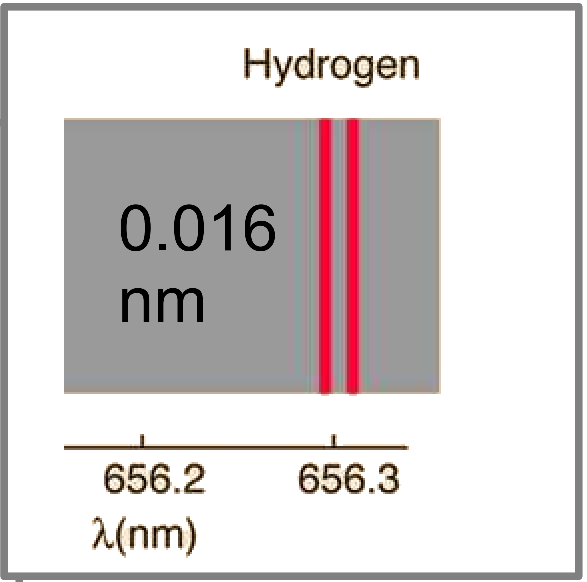
Главное (энергетическое) квантовое число

$$\boxed{E_n = -\frac{Ry}{n^2}}$$

Часть 3. Тонкая и сверхтонкая структура уровней атома водорода.

Тонкая структура уровней атома водорода





http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/hydfin.html

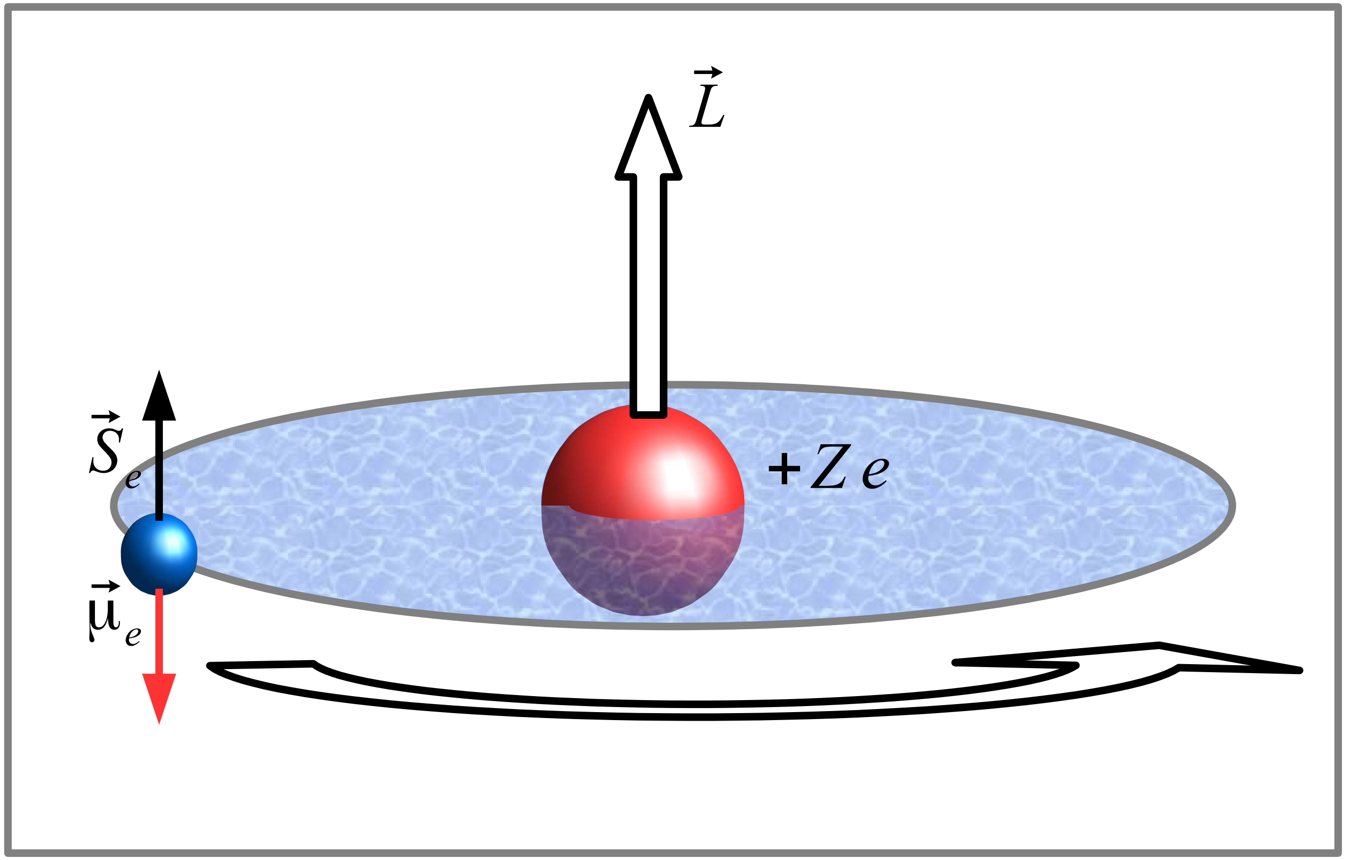
Тонкая структура линий оптического спектра требует разрешения на уровне 10^{-3}...10^{-5}

Оценка тонкой структуры для водорода

(c) Союзмультфильм

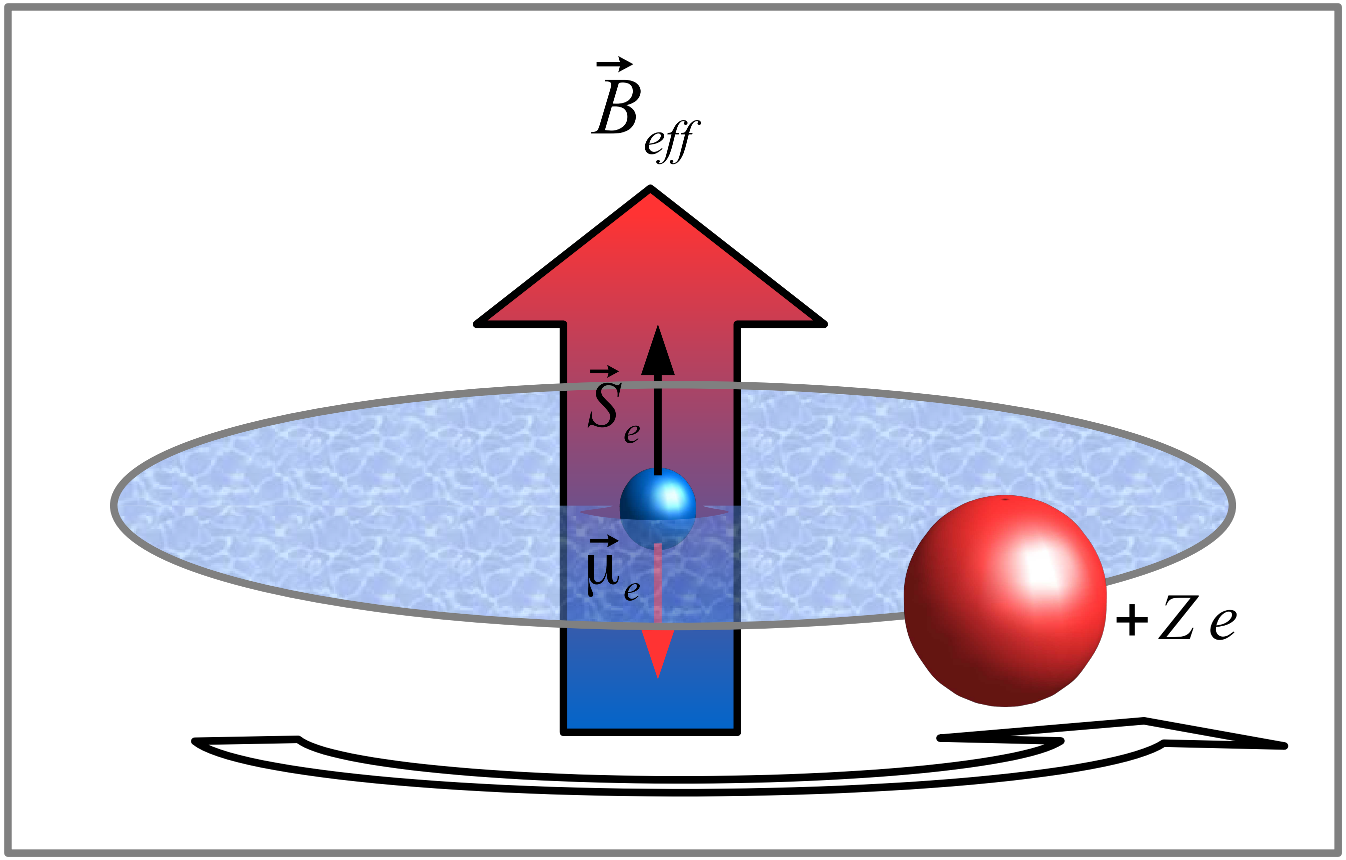
Оценка тонкой структуры для водорода

(c) Союзмультфильм

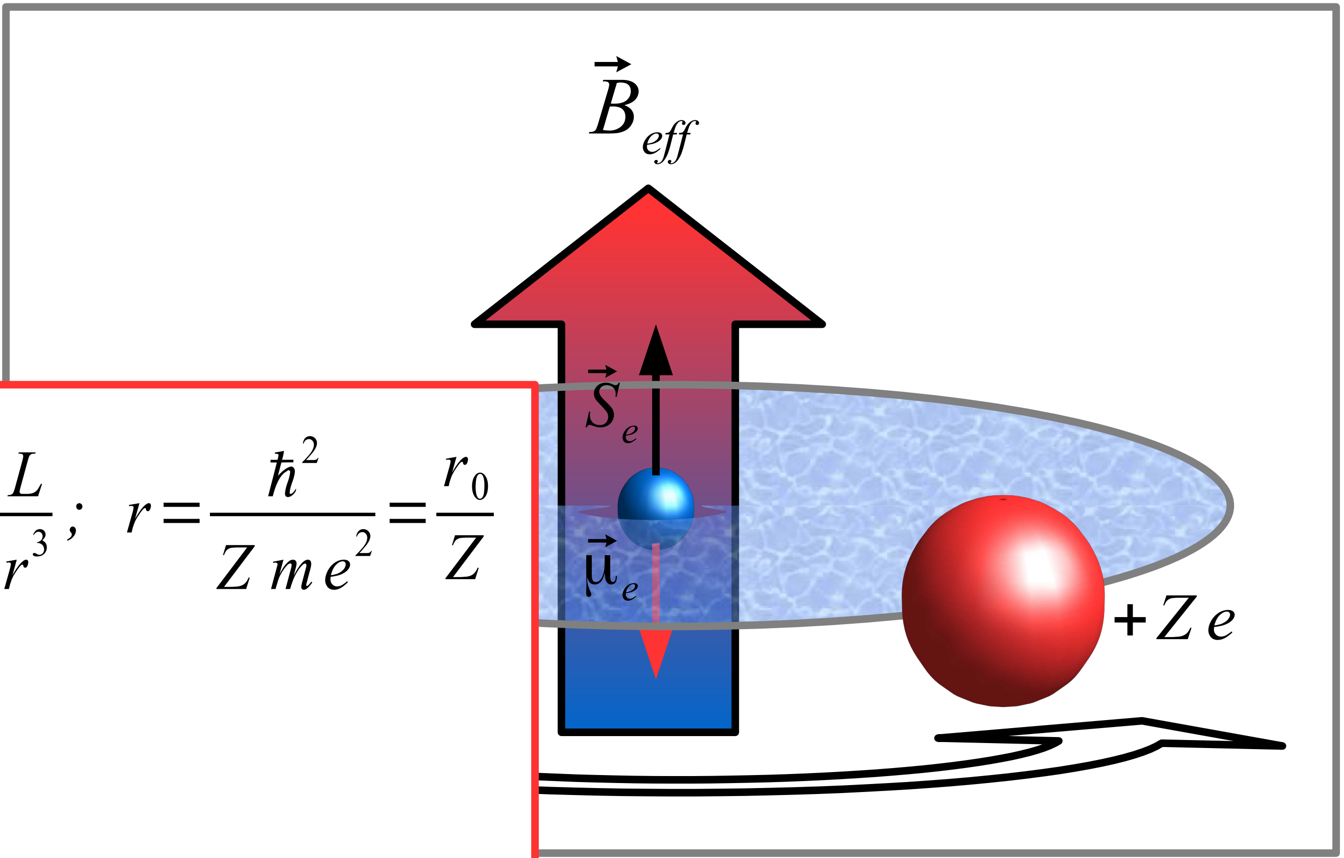


Оценка тонкой структуры для водорода

(c) Союзмультфильм

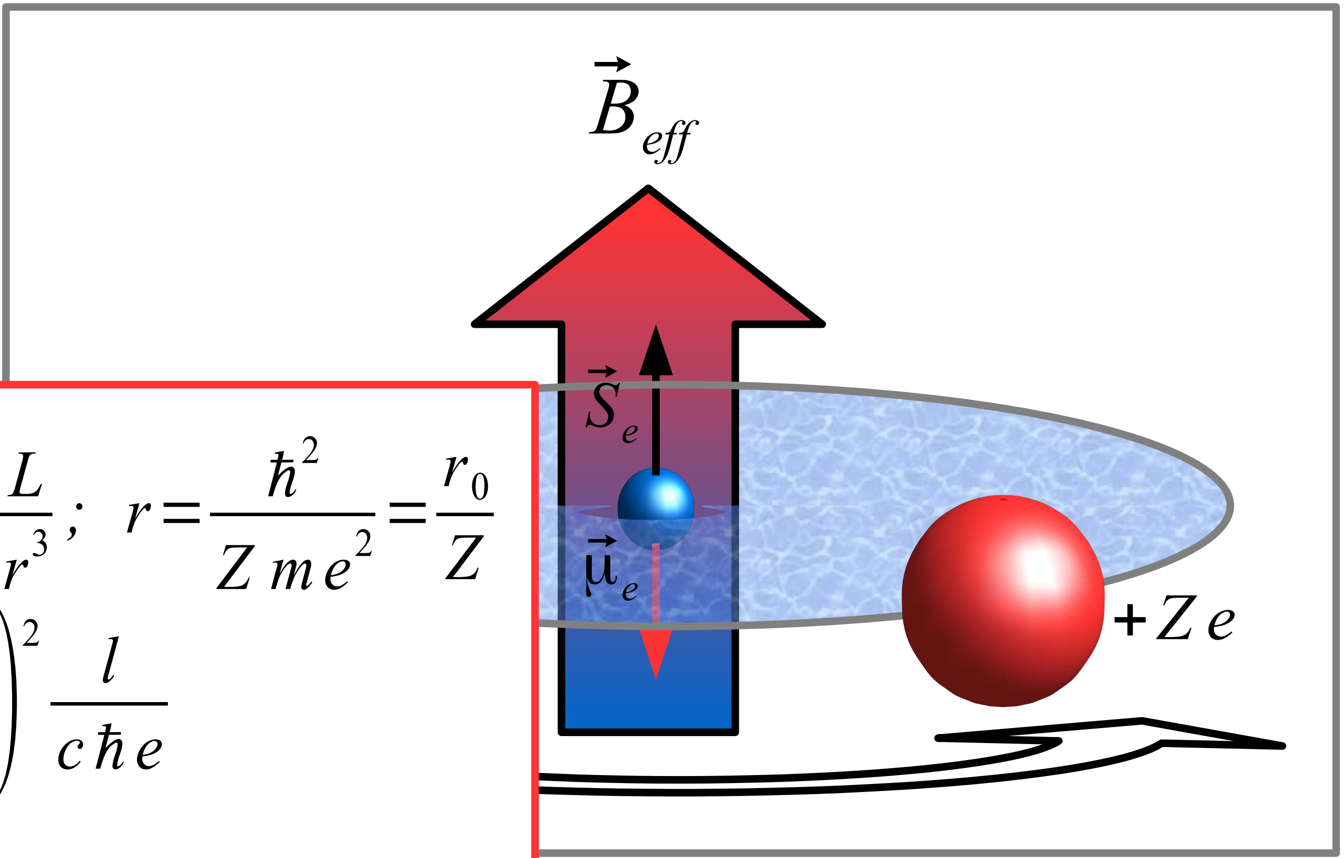


Оценка тонкой структуры для водорода



$$B_{eff} \simeq \frac{I}{c\,r} \sim \frac{Z\,e\,V/r}{c\,r} \sim \frac{Z\,e\,L}{m\,c\,r^3}\,; \quad r = \frac{\hbar^2}{Z\,m\,e^2} = \frac{r_0}{Z}$$

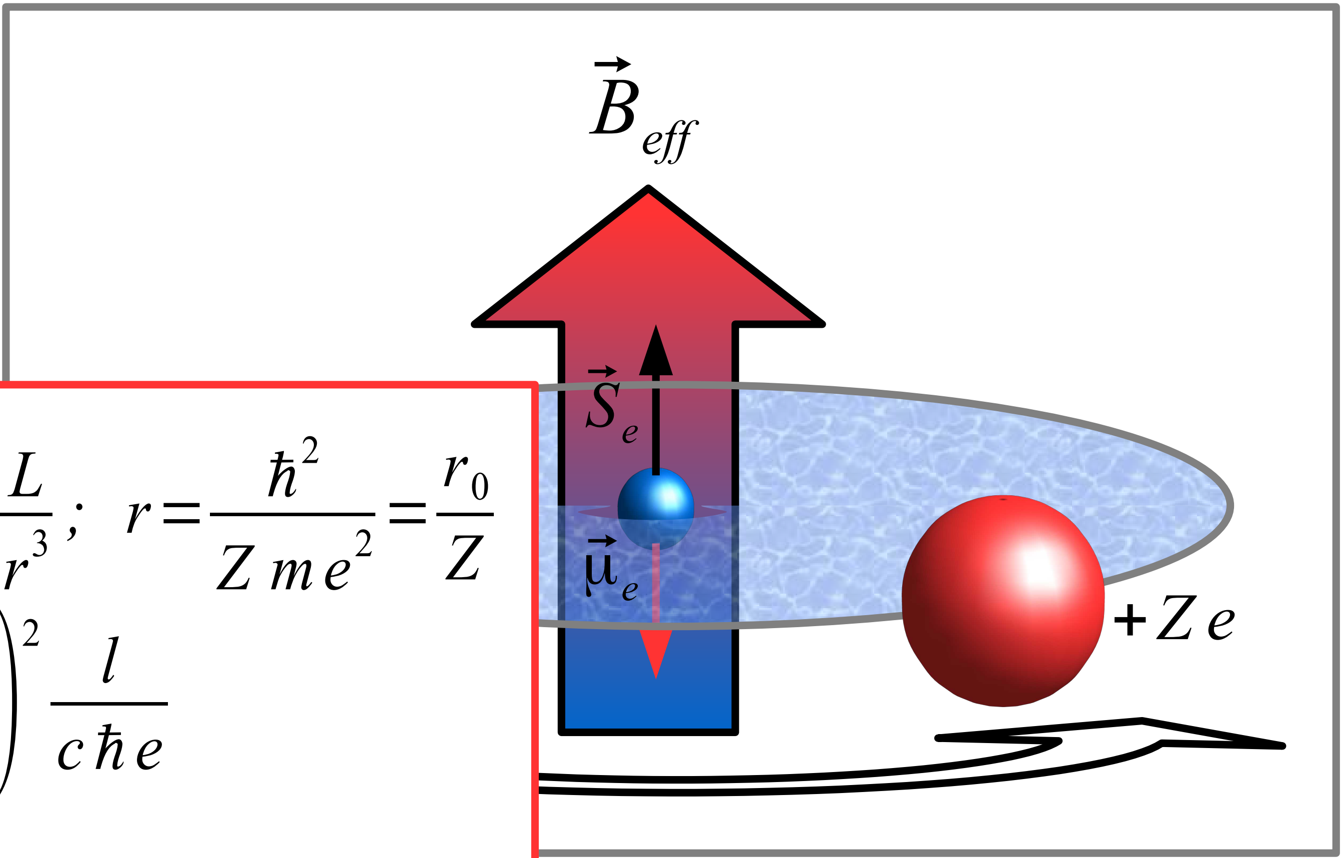
Оценка тонкой структуры для водорода



$$B_{eff} \simeq \frac{I}{c\,r} \sim \frac{Z e V / r}{c\,r} \sim \frac{Z e L}{m c r^3}; \quad r = \frac{\hbar^2}{Z m e^2} = \frac{r_0}{Z}$$

$$B_{eff} \simeq Z^4 \left(\frac{e^2}{r_0}\right)^2 \frac{l}{c\hbar e}$$

Оценка тонкой структуры для водорода

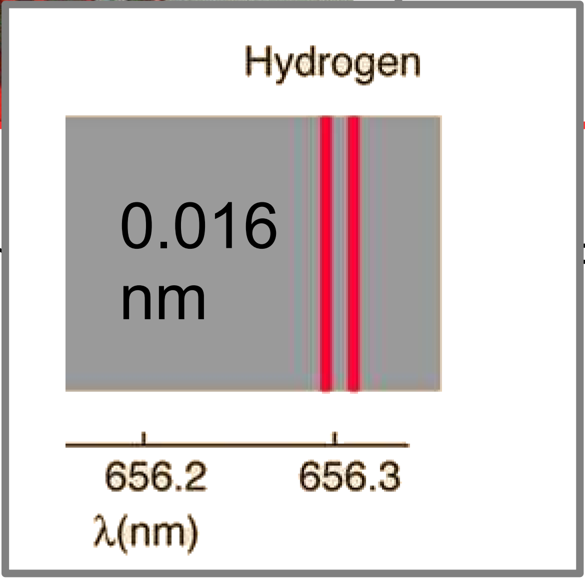


$$B_{eff} \simeq \frac{I}{cr} \sim \frac{ZeV/r}{cr} \sim \frac{ZeL}{mcr^3}; \quad r = \frac{\hbar^2}{Zme^2} = \frac{r_0}{Z}$$

$$B_{eff} \simeq Z^4 \left(\frac{e^2}{r_0}\right)^2 \frac{l}{c\hbar e}$$

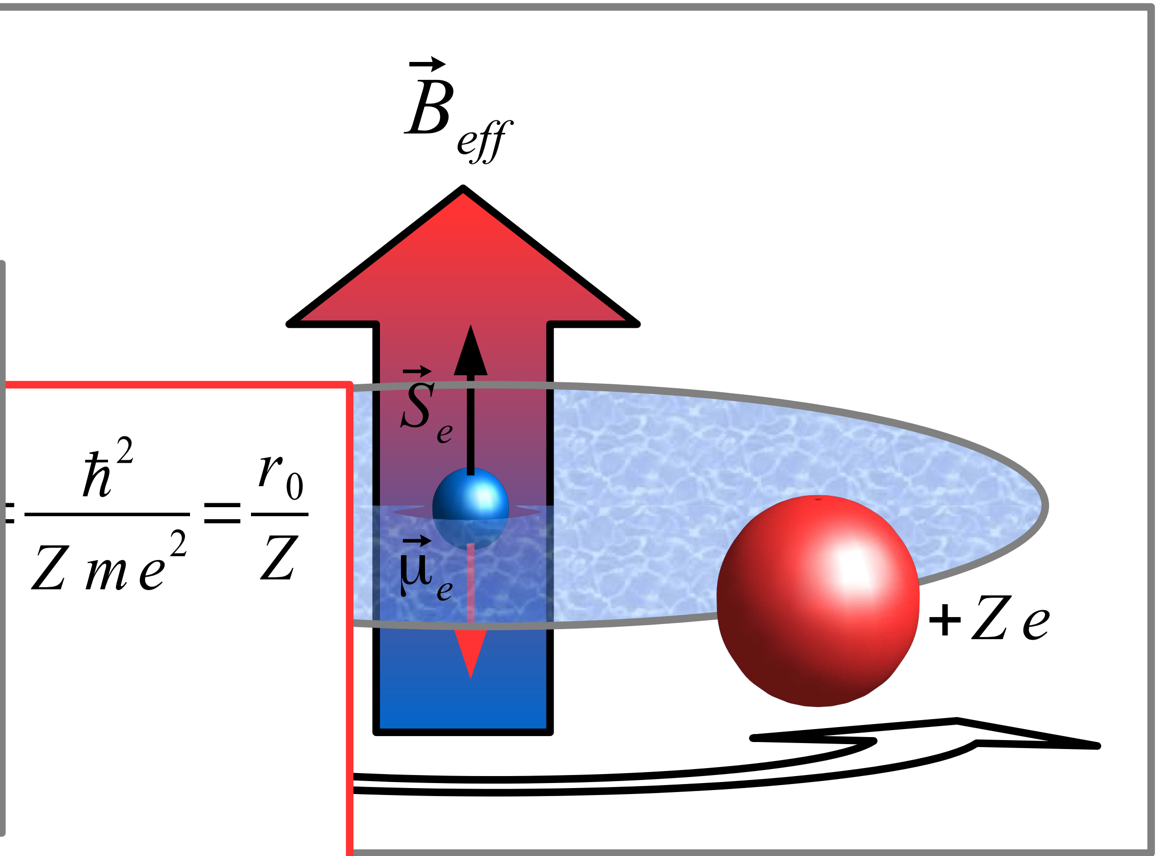
$$E_{вз} \sim \mu_B B_{eff} \sim Z^4 l \times \frac{Ry^2}{mc^2}.$$

Оценка тонкой структуры для водорода



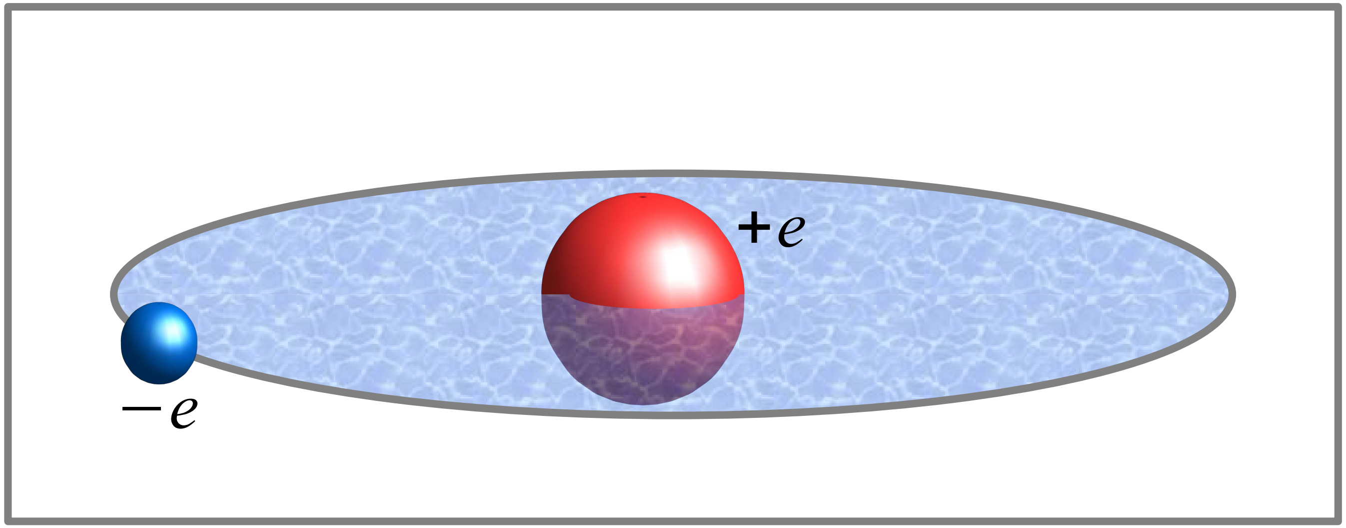
$$B_{eff} \simeq \frac{I}{c\,r} \sim$$

$$= \frac{\hbar^2}{Z\,m\,e^2} = \frac{r_0}{Z}$$



$$E_{\text{вз}} \sim \mu_B B_{eff} \sim Z^4 l \times \frac{Ry^2}{mc^2} \rightarrow \frac{E_{\text{вз}}}{Ry} \sim \frac{Ry}{mc^2} \sim 10^{-5}$$

Постоянная тонкой структуры



$$mVr=\hbar$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{V}{c}=\dfrac{\hbar}{mcr} \\[2ex] r=\dfrac{\hbar^2}{me^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{V}{c}=\frac{e^2}{\hbar c}=\alpha\approx\frac{1}{137}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{E_{\text{вз}}}{Ry}\sim\dfrac{Ry}{mc^2} \\[2ex] Ry=\dfrac{me^4}{\hbar^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{E_{\text{вз}}}{Ry}\sim\frac{e^4}{\hbar^2c^2}=\alpha^2$$

Электрон-ядерное (сверхтонкое) взаимодействие

У протона тоже есть спин $I=1/2$ и магнитный момент ~μ_n , электрон движется не только в кулоновском поле ядра, но и в дипольном поле точечного ядерного магнитного момента

$$rot\,\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l} rot\,\vec{A}=\vec{H} \\ \mathrm{div}\,\vec{A}=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta\vec{A}=-\dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \vec{A}=\dfrac{1}{c}\displaystyle\int\frac{\vec{j}}{R}dV \end{array}\right.$$

$$\vec{R}=\vec{R}_0-\vec{x}$$

$$\vec{A}\approx\frac{1}{c\,R_0}\int\vec{j}\,dV+\frac{1}{c\,R_0^3}\int\vec{j}\left(\vec{R}_0\vec{x}\right)dV$$

Электрон-ядерное (сверхтонкое) взаимодействие

У протона тоже есть спин I=1/2 и магнитный момент ~μ_n , электрон движется не только в кулоновском поле ядра, но и в дипольном поле точечного ядерного магнитного момента

$$rot\,\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l} rot\,\vec{A}=\vec{H} \\ \mathrm{div}\,\vec{A}=0 \end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l} \Delta\vec{A}=-\dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \vec{A}=\dfrac{1}{c}\displaystyle\int\frac{\vec{j}}{R}\,dV \end{array}\right.$$

$$\vec{R}=\vec{R}_0-\vec{x}$$

$$\vec{A}\approx\frac{1}{c\,R_0}\int\vec{j}\,dV+\frac{1}{c\,R_0^3}\int\vec{j}\left(\vec{R}_0\vec{x}\right)dV$$

$$\left[\vec{R}_0\times\left[\vec{x}\times\vec{j}\right]\right]=\vec{x}\left(\vec{R}_0\vec{j}\right)-\vec{j}\left(\vec{R}_0\vec{x}\right)$$

$$\int j_\alpha x_\beta\,dV=\int\mathrm{div}\left(x_\alpha\vec{j}\right)x_\beta\,dV=$$

$$=-\int x_\alpha\left(\vec{j}\vec{\nabla}\right)x_\beta\,dV=-\int x_\alpha\,j_\beta\,dV$$

$$\vec{m}=\frac{1}{2c}\int\left[\vec{x}\times\vec{j}\right]dV$$

$$\vec{A}=\frac{\left[\vec{m}\times\vec{R}_0\right]}{R_0^3}=\left[\vec{\nabla}\times\frac{\vec{m}}{R_0}\right]$$

Электрон-ядерное (сверхтонкое) взаимодействие

У протона тоже есть спин $I=1/2$ и магнитный момент $\sim\mu_n$, электрон движется не только в кулоновском поле ядра, но и в дипольном поле точечного ядерного магнитного момента

$$\vec{H}=rot\,\vec{A}=\underbrace{4\pi\vec{m}\,\delta\left(\vec{R}_0\right)}_{\text{контактное поле Ферми}}\underbrace{-\frac{\vec{m}}{R_0^3}+3\frac{\vec{n}\left(\vec{n}\,\vec{m}\right)}{R_0^3}}_{\text{«обычное» дипольное поле}}$$

$$\vec{R}=\vec{R}_0-\vec{x}$$

$$\vec{A}\approx\frac{1}{c\,R_0}\int\vec{j}\,dV+\frac{1}{c\,R_0^3}\int\vec{j}\left(\vec{R}_0\vec{x}\right)dV$$

$$\vec{A}=\frac{\left[\vec{m}\times\vec{R}_0\right]}{R_0^3}=\left[\vec{\nabla}\times\frac{\vec{m}}{R_0}\right]$$

Электрон-ядерное (сверхтонкое) взаимодействие

У протона тоже есть спин $I=1/2$ и магнитный момент $\sim\mu_n$, электрон движется не только в кулоновском поле ядра, но и в дипольном поле точечного ядерного магнитного момента

$$\vec H = rot\,\vec A = 4\pi\,\vec m\,\delta\left(\vec R_0\right) - \frac{\vec m}{R_0^3} + 3\,\frac{\vec n\left(\vec n\,\vec m\right)}{R_0^3}$$

$$E_{вз}^{(s)} \approx -4\pi\,\vec m_p \vec m_e \left|\Psi\left(0\right)\right|^2$$

выгодна параллельная ориентация магнитных моментов («антипараллельная» ориентация спинов)

r

c

$$\vec R = \vec R_0 - \vec x$$

$$\vec A \approx \frac{1}{c\,R_0}\int \vec j\,dV + \frac{1}{c\,R_0^3}\int \vec j\left(\vec R_0 \vec x\right)dV$$

$_0\vec x)$

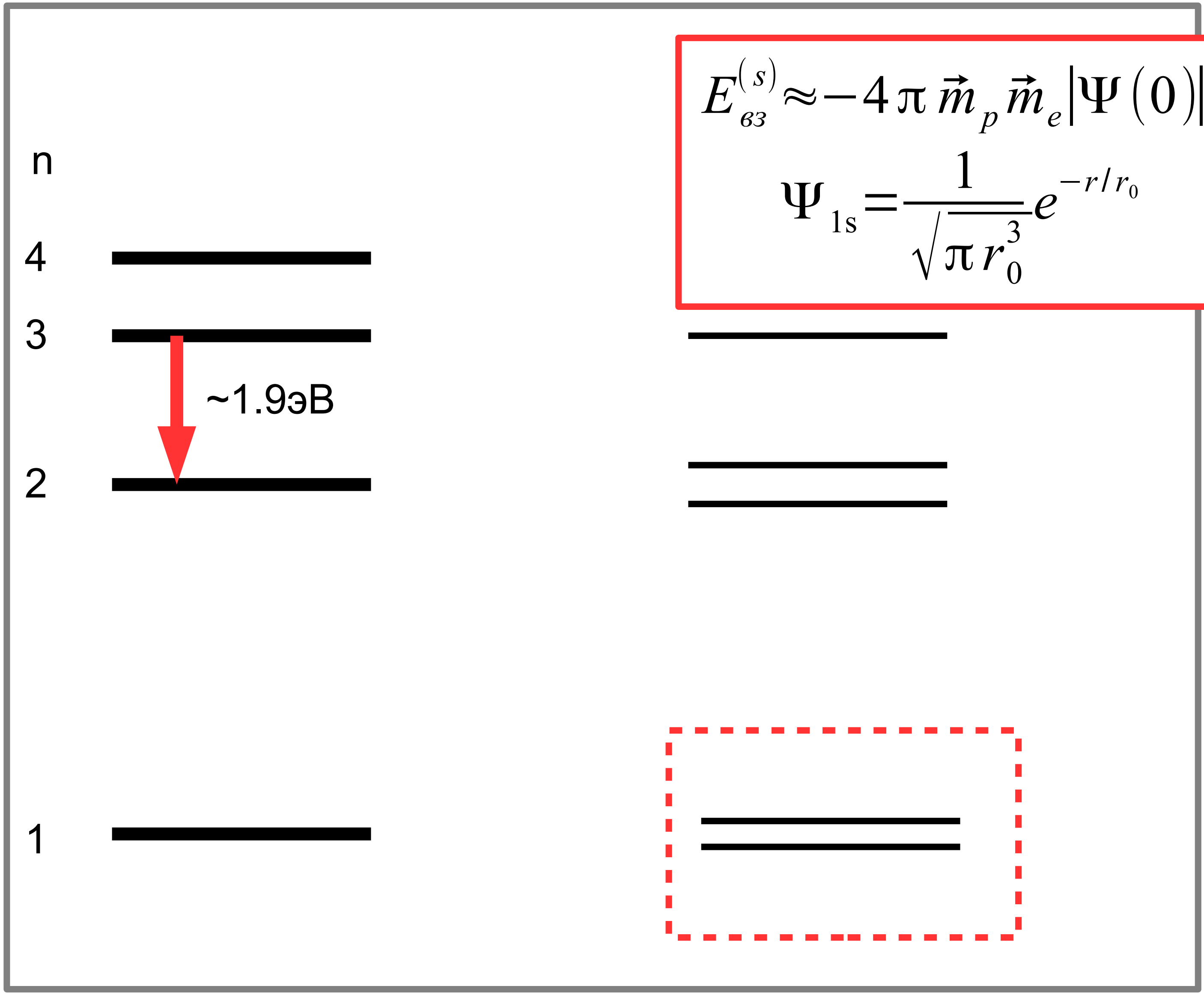
$V=$

$j_\beta\,dV$

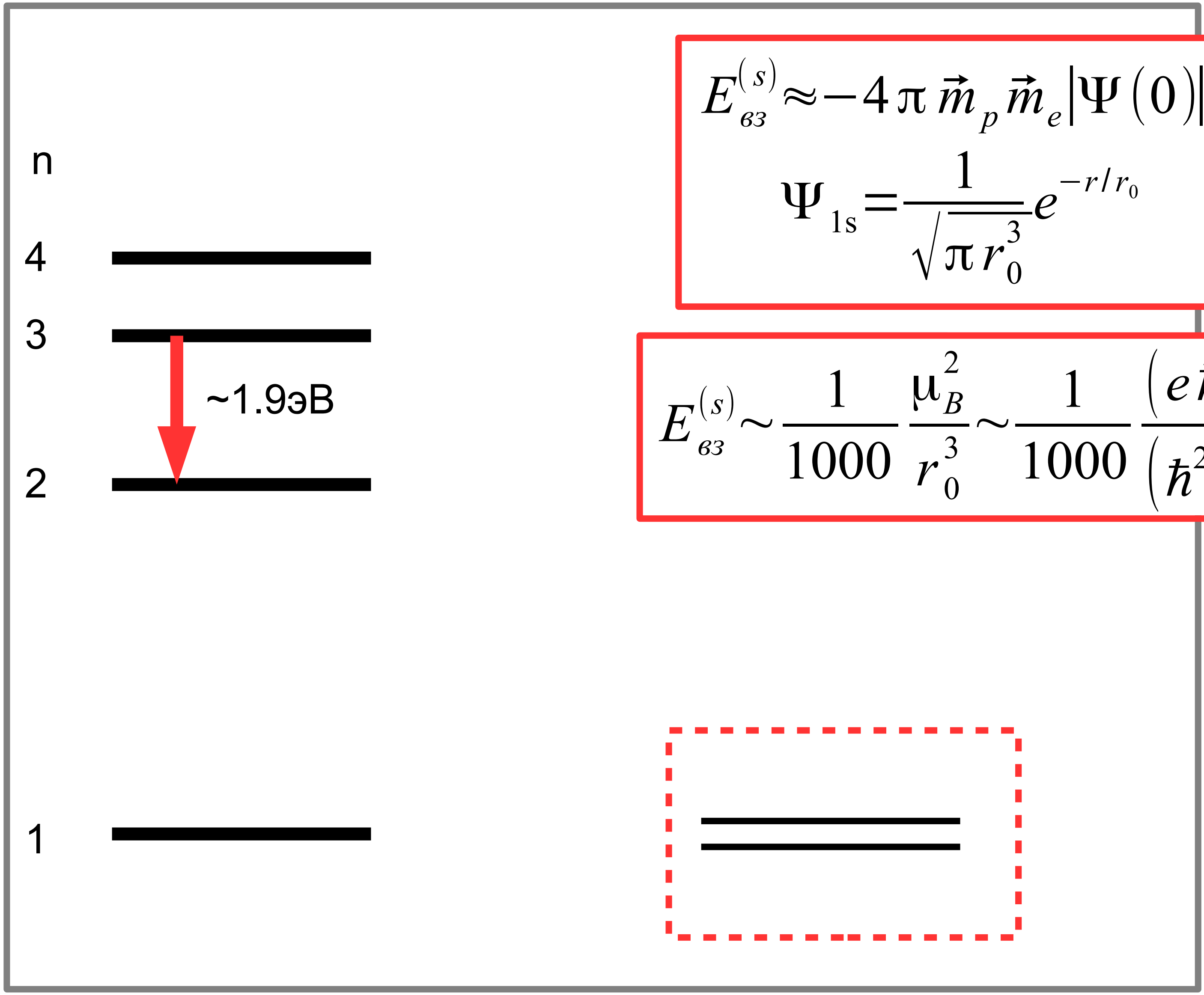
$$\vec A = \frac{\left[\vec m \times \vec R_0\right]}{R_0^3} = \left[\vec\nabla \times \frac{\vec m}{R_0}\right]$$

Электрон-ядерное (сверхтонкое) взаимодействие

$$\left.\begin{aligned} &E^{(s)}_{вз} \approx -4\pi \vec{m}_p \vec{m}_e \left|\Psi(0)\right|^2 \\ &\Psi_{1s} = \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} e^{-r/r_0} \end{aligned}\right\} \rightarrow E^{(s)}_{вз} = -4\frac{\vec{m}_p \vec{m}_e}{r_0^3}$$



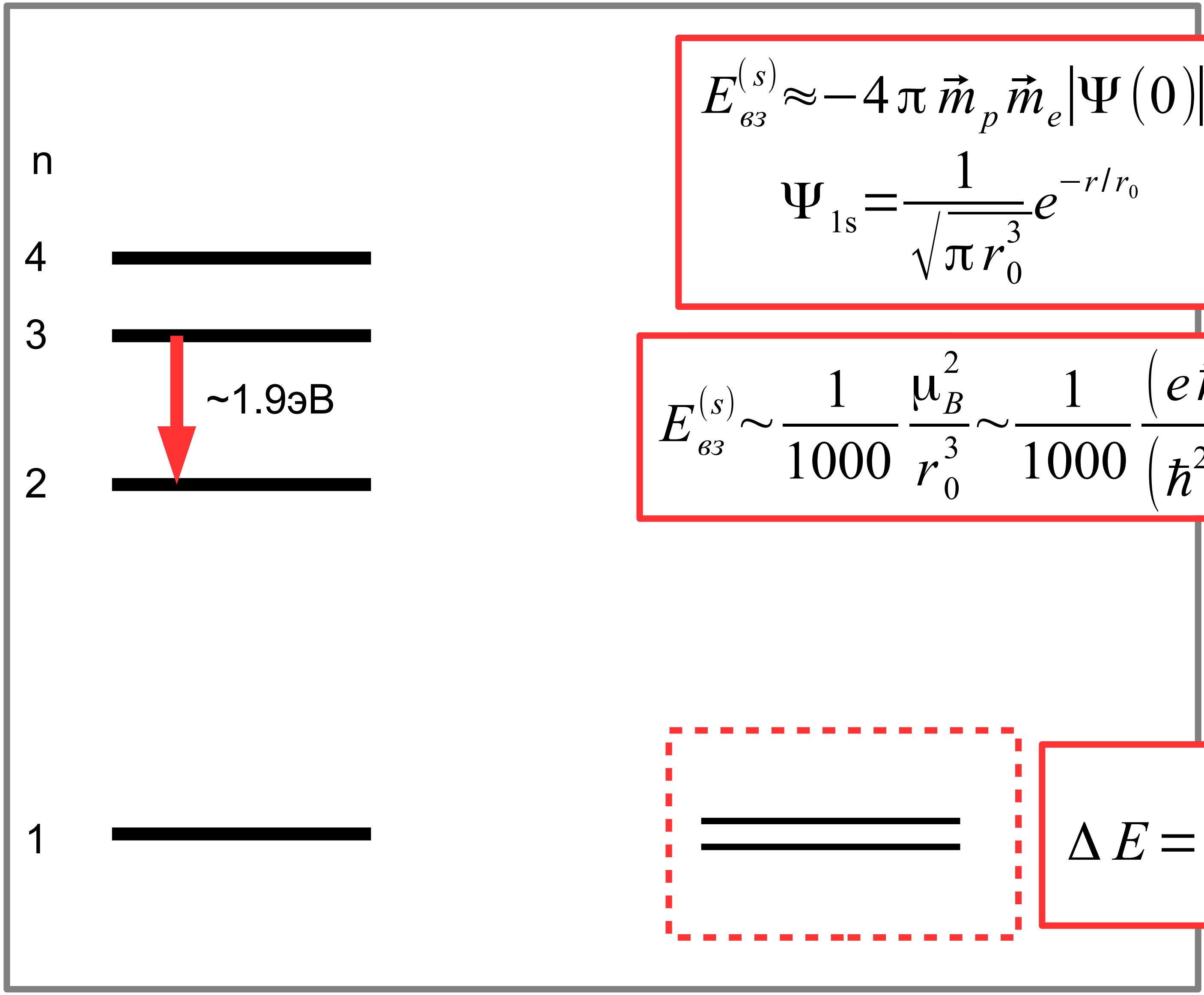
Электрон-ядерное (сверхтонкое) взаимодействие



$$\left.\begin{aligned} &E^{(s)}_{\text{вз}} \approx -4\pi \vec{m}_p \vec{m}_e \left|\Psi(0)\right|^2 \\ &\Psi_{1s} = \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} e^{-r/r_0} \end{aligned}\right\} \rightarrow E^{(s)}_{\text{вз}} = -4\frac{\vec{m}_p \vec{m}_e}{r_0^3}$$

$$E^{(s)}_{\text{вз}} \sim \frac{1}{1000}\frac{\mu_B^2}{r_0^3} \sim \frac{1}{1000}\frac{\left(e\hbar/(mc)\right)^2}{\left(\hbar^2/(me^2)\right)^3} \sim \frac{1}{1000}\alpha^2 Ry$$

Электрон-ядерное (сверхтонкое) взаимодействие

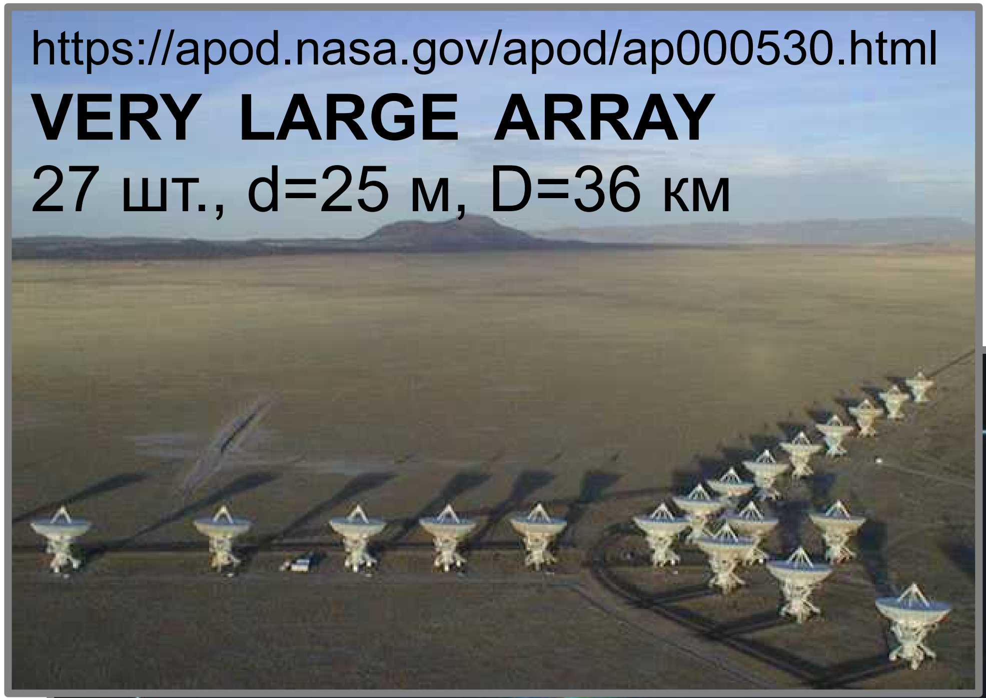


$$\left.\begin{array}{c} E_{\text{вз}}^{(s)} \approx -4\pi \vec{m}_p \vec{m}_e |\Psi(0)|^2 \\ \Psi_{1s} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} e^{-r/r_0} \end{array}\right\} \to E_{\text{вз}}^{(s)} = -4\frac{\vec{m}_p \vec{m}_e}{r_0^3}$$

$$E_{\text{вз}}^{(s)} \sim \frac{1}{1000}\frac{\mu_B^2}{r_0^3} \sim \frac{1}{1000}\frac{\left(e\hbar/(mc)\right)^2}{\left(\hbar^2/(me^2)\right)^3} \sim \frac{1}{1000}\alpha^2 Ry$$

$$\Delta E = 6\,\text{мкэВ},\ \underline{\lambda = 21\,см}$$

Радиоастрономия 21 см



https://apod.nasa.gov/apod/ap000530.html

VERY LARGE ARRAY

27 шт., d=25 м, D=36 км

...M51, also known as the "Whirlpool Galaxy". The optical image (depicted by green and yellow colors...) highlights the younger stars, as well as the dust.... The continuum radio emission (depicted by red in the image) is partly due to thermal emission from HII regions, partly to synchrotron emission from relativistic electrons moving in magnetic fields, delineating areas of high compression (i.e. the dust lanes). **The spectral-line observations of neutral atomic hydrogen (depicted by blue) gives us the distribution, as well as the kinematics, of the neutral hydrogen gas.**

http://images.nrao.edu/5

Часть 4. Сложение моментов. Полный момент импульса атома.

Сложение моментов

$$\boxed{\begin{array}{c}\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{L}}_1 + \hat{\vec{L}}_2 \\ \hat{L}_z = \hat{L}_{z1} + \hat{L}_{z2}\end{array}}$$

Сложение моментов

$$\boxed{\begin{gathered}\hat{\vec{L}}=\hat{\vec{L}}_1+\hat{\vec{L}}_2\\ \hat{L}_z=\hat{L}_{z1}+\hat{L}_{z2}\end{gathered}}$$

$$\boxed{\hat{L}_z\Psi=\left(\hat{L}_{z1}+\hat{L}_{z2}\right)\Psi=\hat{L}_{z1}\Psi+\hat{L}_{z2}\Psi=\left(m_1+m_2\right)\Psi}$$

Сложение моментов

$$\hat{\vec{L}}=\hat{\vec{L}}_1+\hat{\vec{L}}_2$$
$$\hat{L}_z=\hat{L}_{z1}+\hat{L}_{z2}$$

$$\hat{L}_z\Psi=\left(\hat{L}_{z1}+\hat{L}_{z2}\right)\Psi=\hat{L}_{z1}\Psi+\hat{L}_{z2}\Psi=\left(m_1+m_2\right)\Psi$$

$$l_1=2,l_2=3$$
$$5=2+3$$
$$4=2+2=1+3$$
$$3=2+1=0+3=1+2$$
$$2=2+0=1+1=0+2=-1+3$$
$$1=2-1=1+0=0+1=-1+2=-2+3$$
$$0=2-2=1-1=0+0=-1+1=-2+2$$

Сложение моментов

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{L}}_1 + \hat{\vec{L}}_2$$

$$\hat{L}_z = \hat{L}_{z1} + \hat{L}_{z2}$$

$$\hat{L}_z \Psi = \left(\hat{L}_{z1} + \hat{L}_{z2}\right)\Psi = \hat{L}_{z1}\Psi + \hat{L}_{z2}\Psi = \left(m_1 + m_2\right)\Psi$$

$$l_1 = 2, l_2 = 3$$

$$5 = 2 + 3$$

$$4 = 2 + 2 = 1 + 3$$

$$3 = 2 + 1 = 0 + 3 = 1 + 2$$

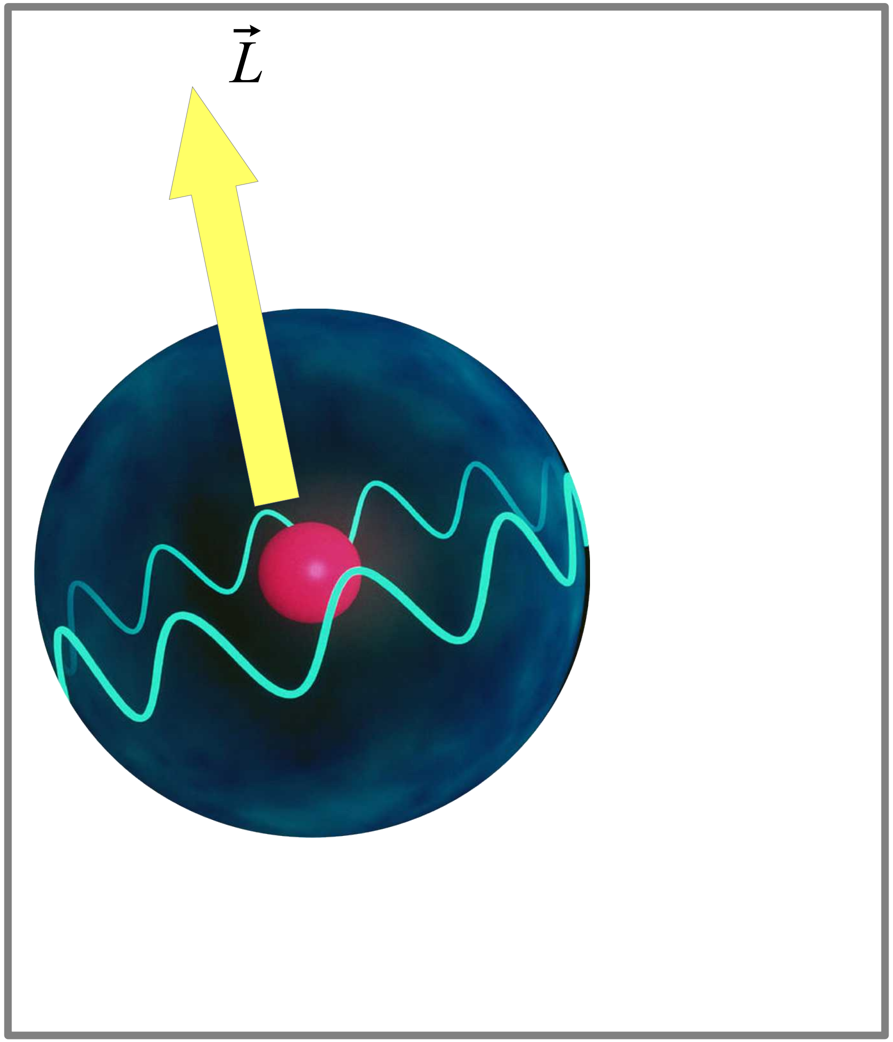
$$2 = 2 + 0 = 1 + 1 = 0 + 2 = -1 + 3$$

$$1 = 2 - 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = -1 + 2 = -2 + 3$$

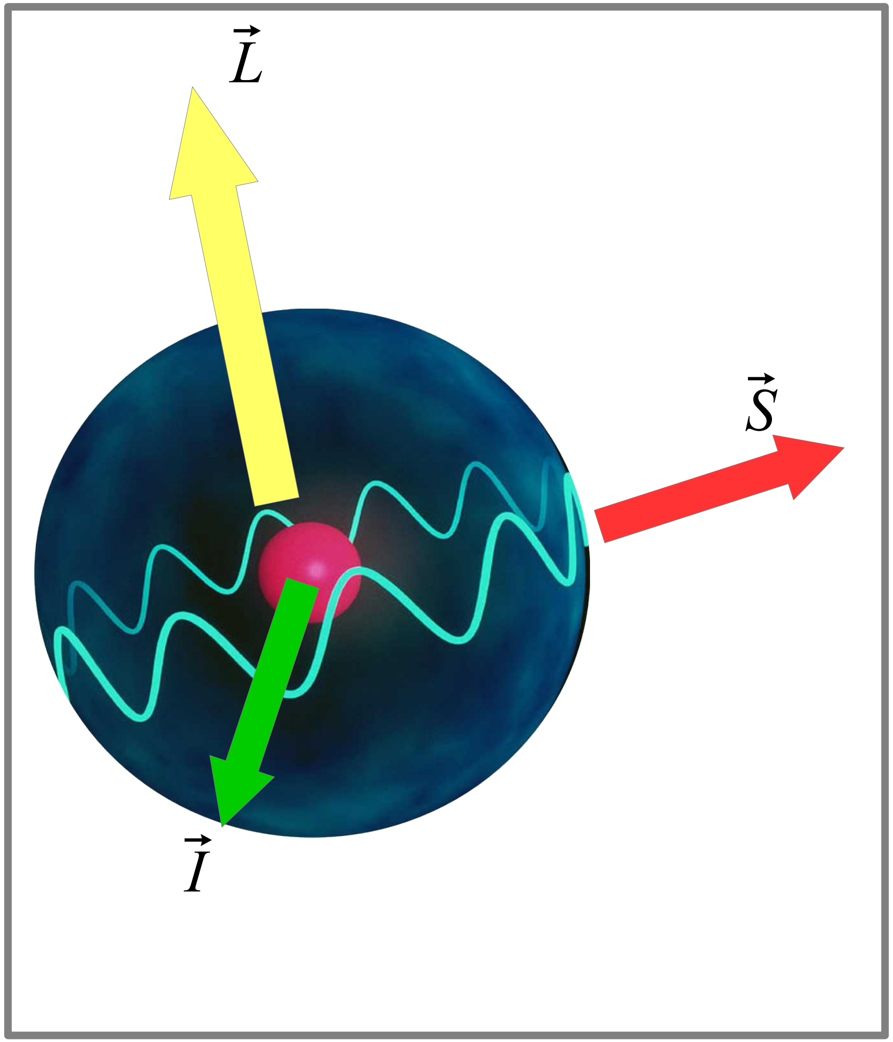
$$0 = 2 - 2 = 1 - 1 = 0 + 0 = -1 + 1 = -2 + 2$$

При сложении двух моментов l_1 и l_2 можно получить дискретный набор значений полного момента от $(l_1 + l_2)$ до $|l_1 - l_2|$

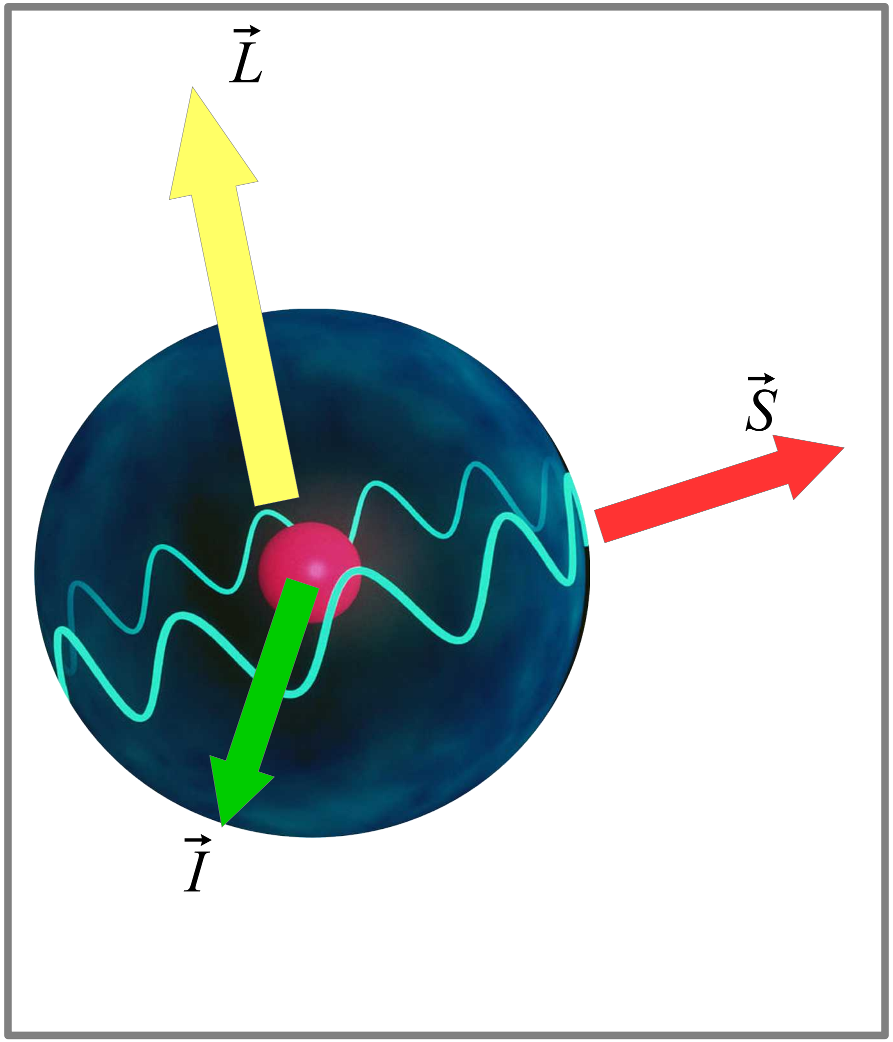
Полный момент импульса атома



Полный момент импульса атома

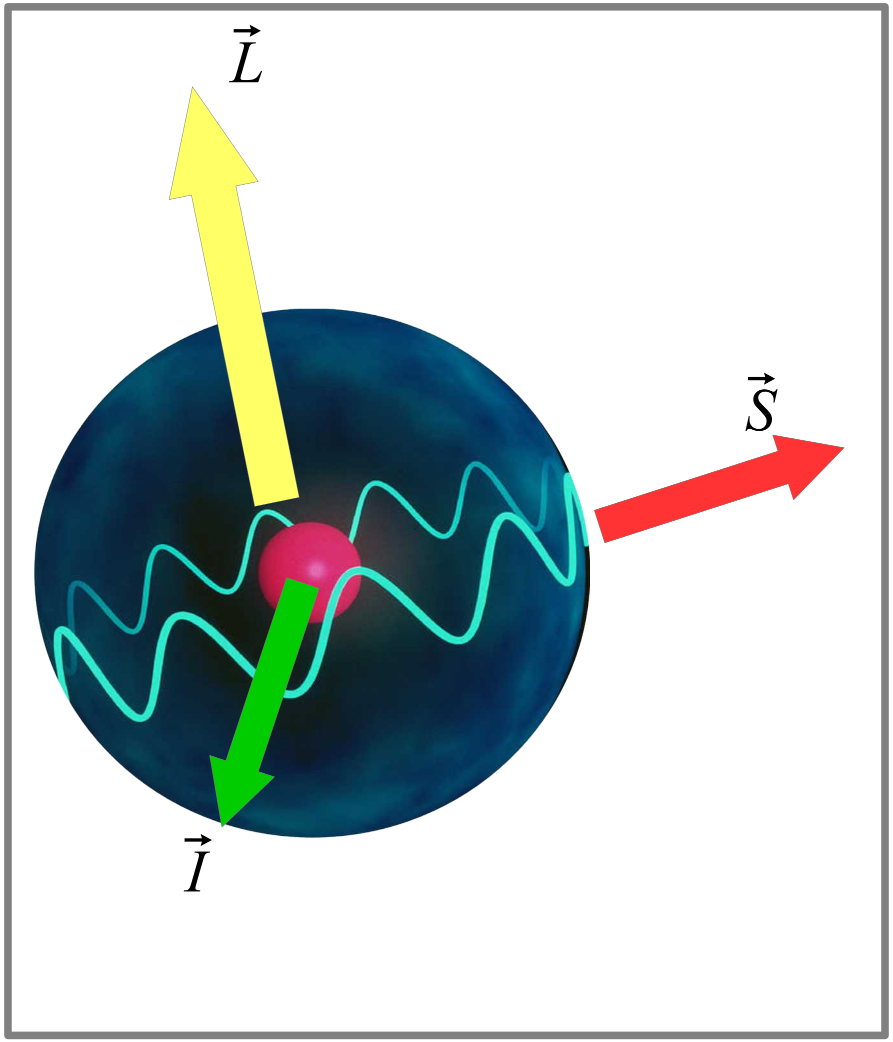


Полный момент импульса атома



$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}\\ \vec{F}=\vec{J}+\vec{I}\end{array}}$$

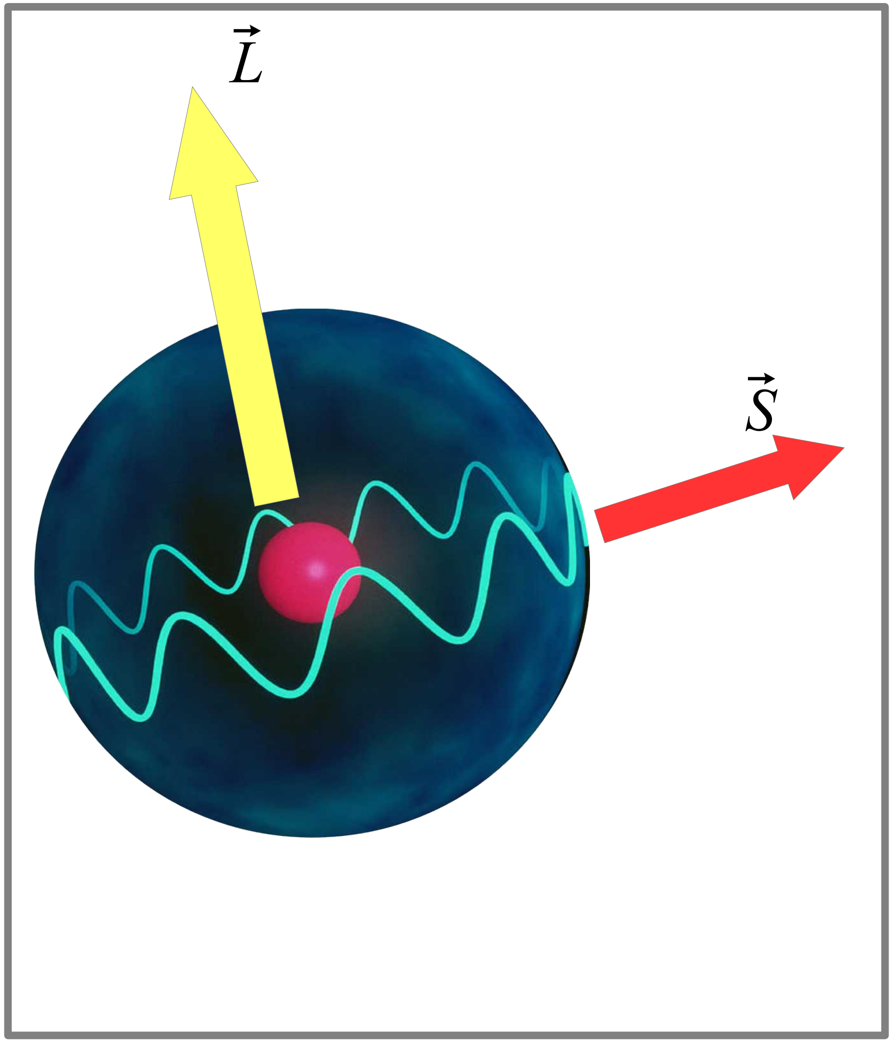
Полный момент импульса атома



$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$
$$\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$$

- В атоме водорода возможны значения полного момента $J=(L \pm 1/2)$
- Сохраняющаяся величина — именно полный момент импульса, он «важнее». В частности, для данных L и S (и I) состояния с разными J (и F) могут иметь разную энергию!

Полный момент импульса атома



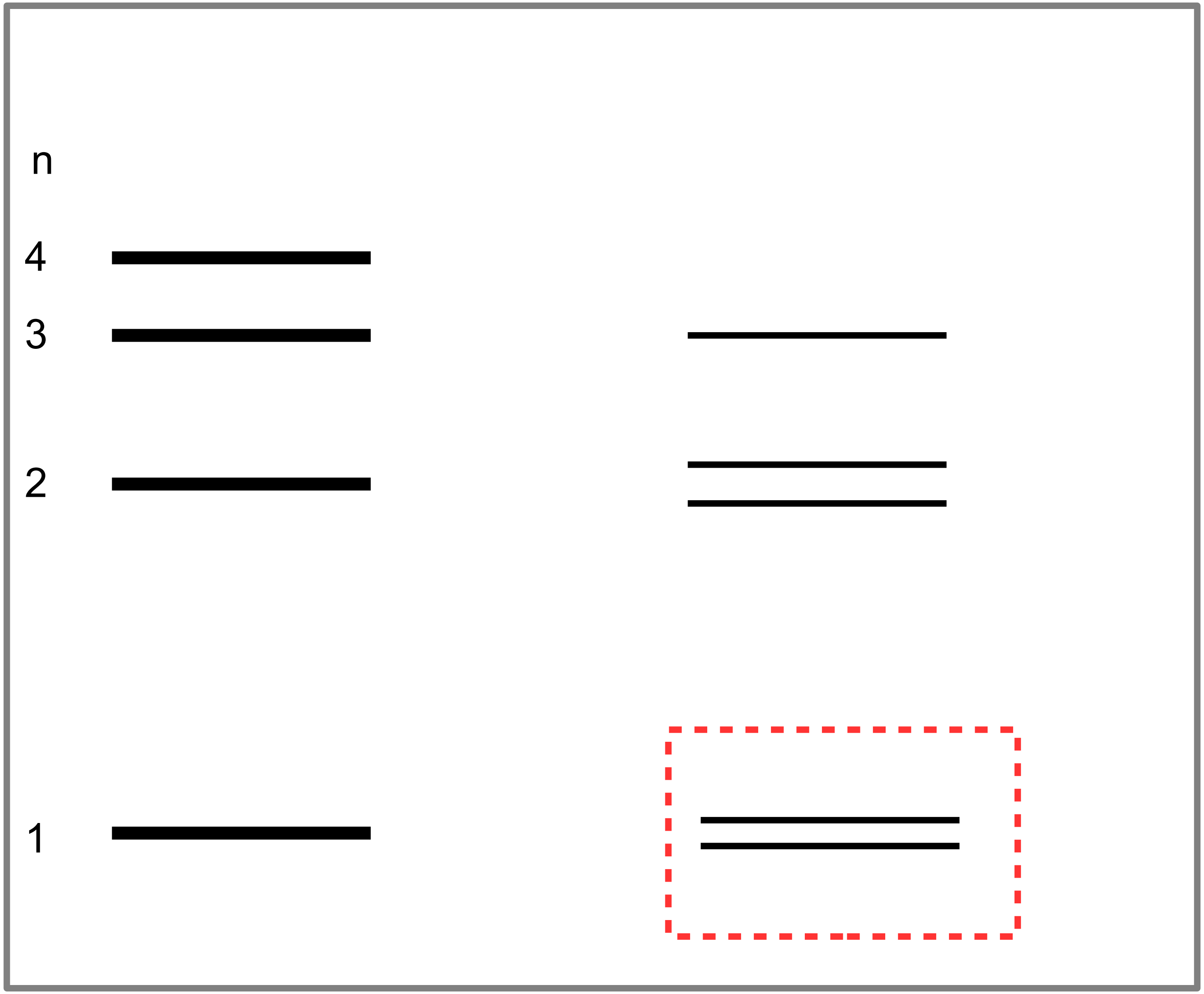
$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

...для атома водорода есть релятивистское решение, показывающее, что $E=E(n_r,j)$ ....

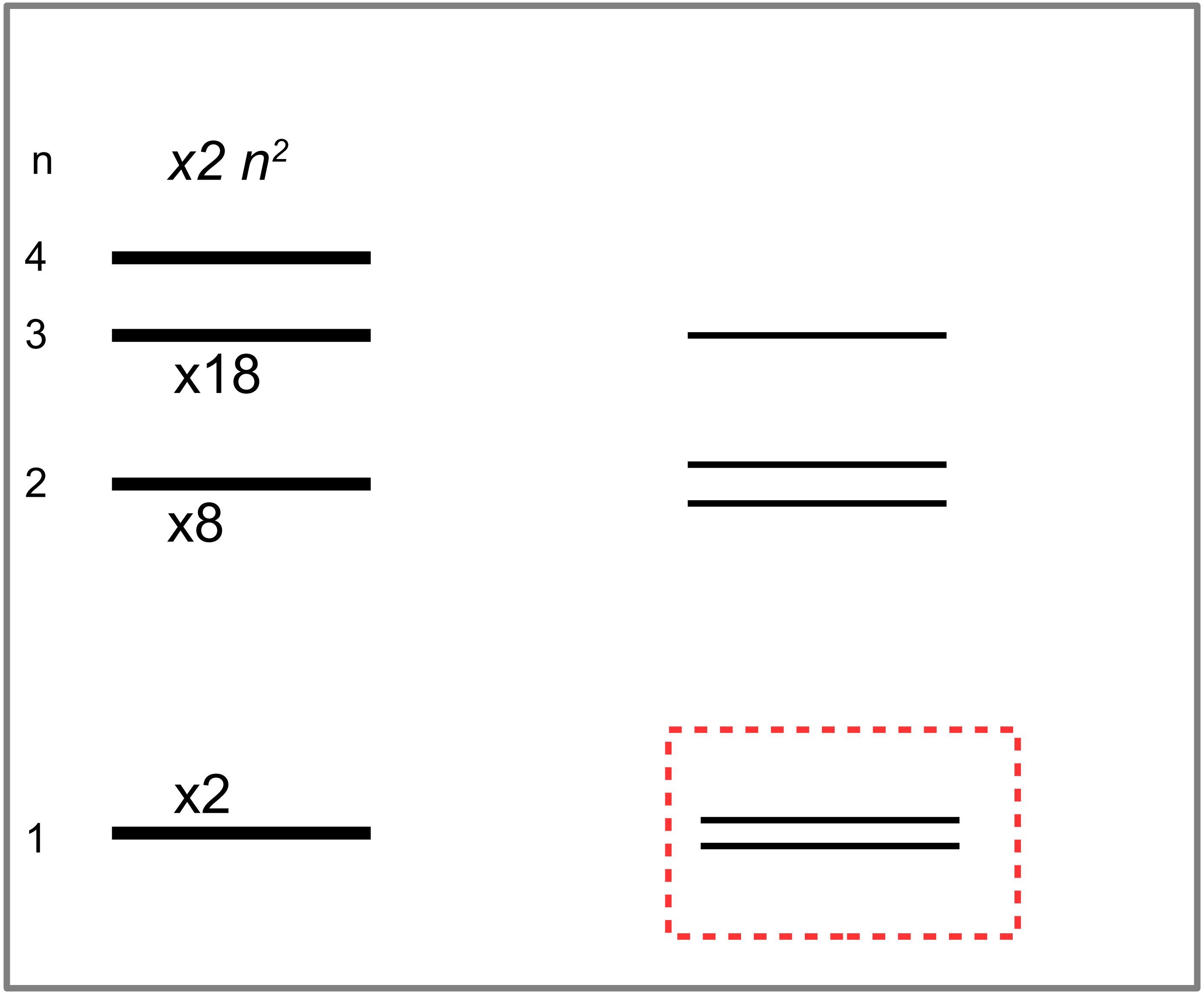
$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\left(n_r + \sqrt{\left(j+1/2\right)^2 - \alpha^2}\right)^2}}}$$

$$\alpha = e^2/(\hbar c) \approx 1/137$$

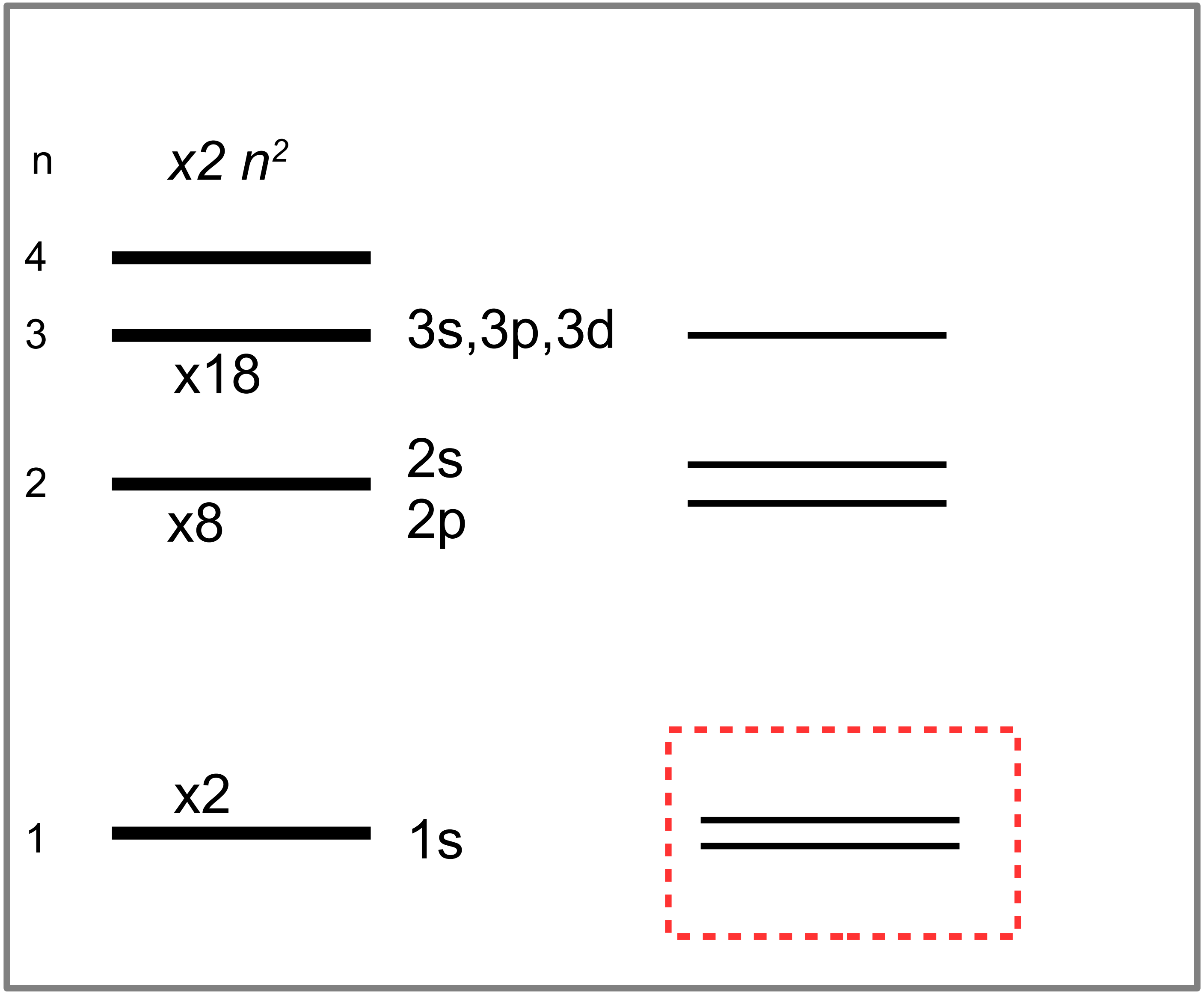
Классификация и вырождение уровней с учётом тонкой и сверхтонкой структуры



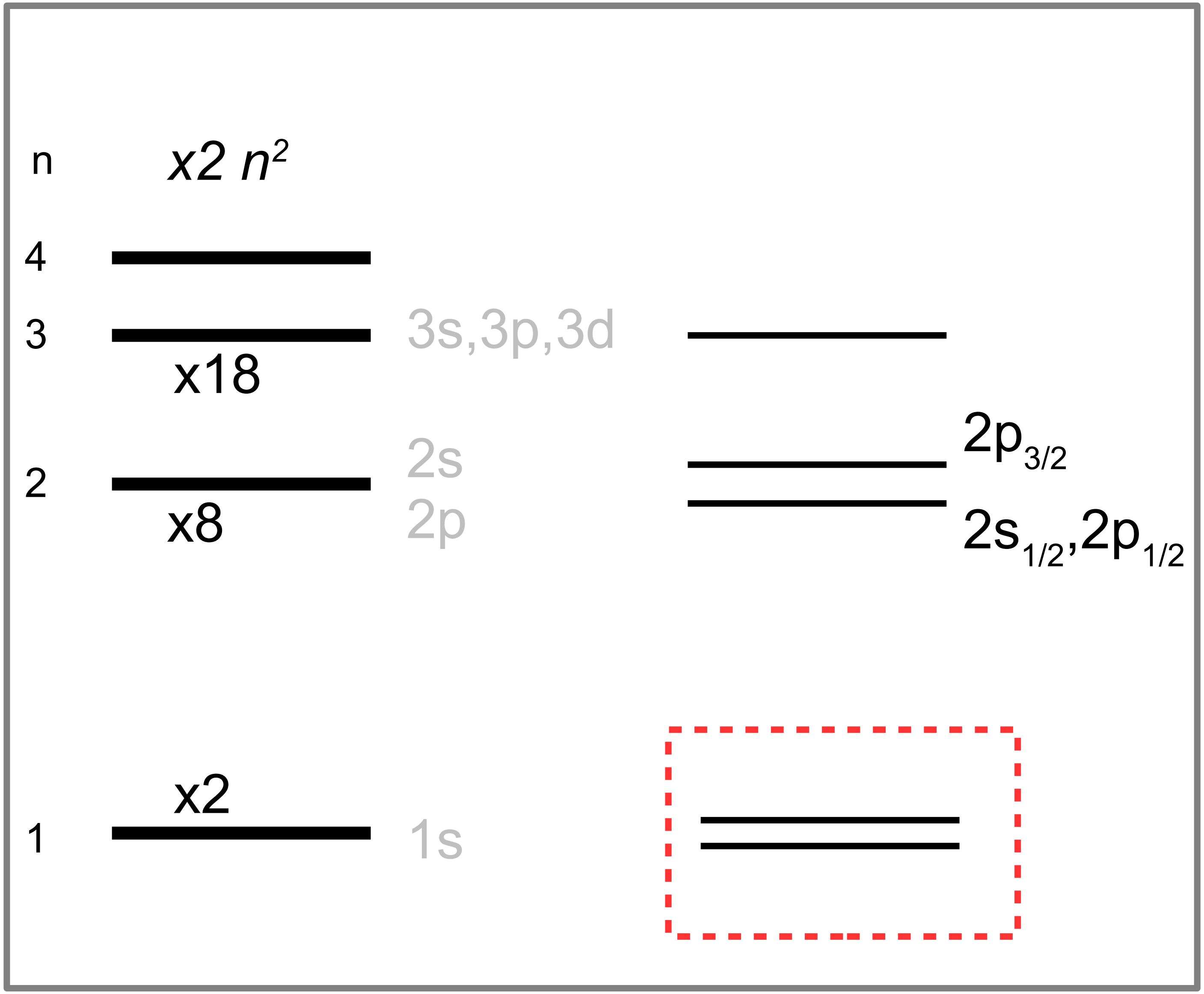
Классификация и вырождение уровней с учётом тонкой и сверхтонкой структуры



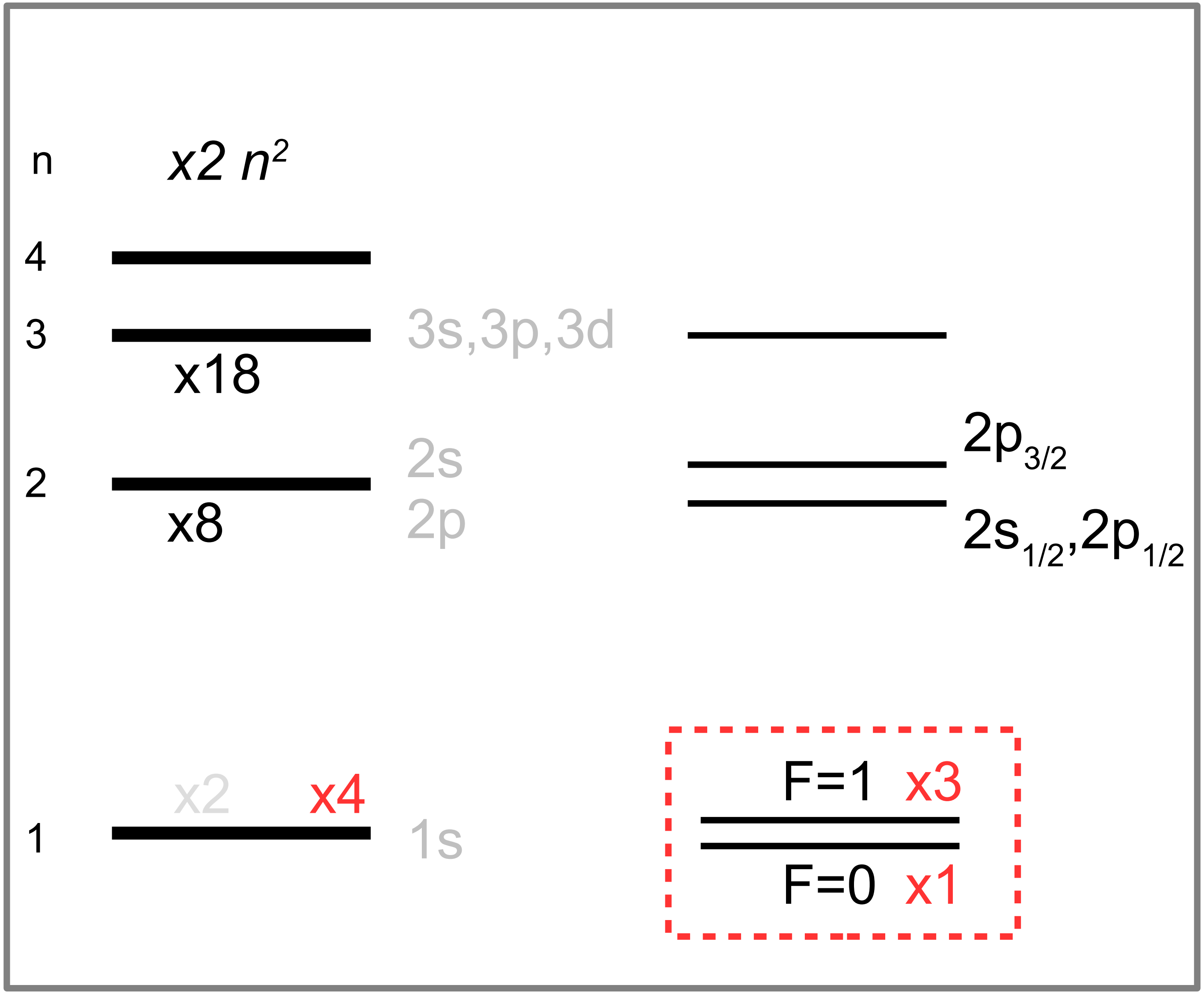
Классификация и вырождение уровней с учётом тонкой и сверхтонкой структуры



Классификация и вырождение уровней с учётом тонкой и сверхтонкой структуры



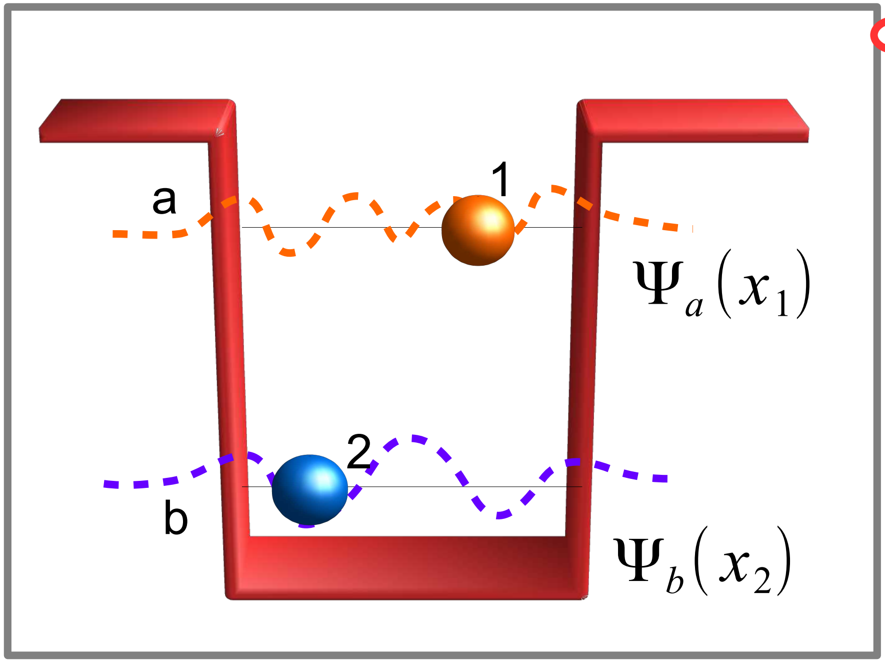
Классификация и вырождение уровней с учётом тонкой и сверхтонкой структуры



Часть 5. Первый шаг к сложному атому: Эквивалентность частиц и запрет Паули.

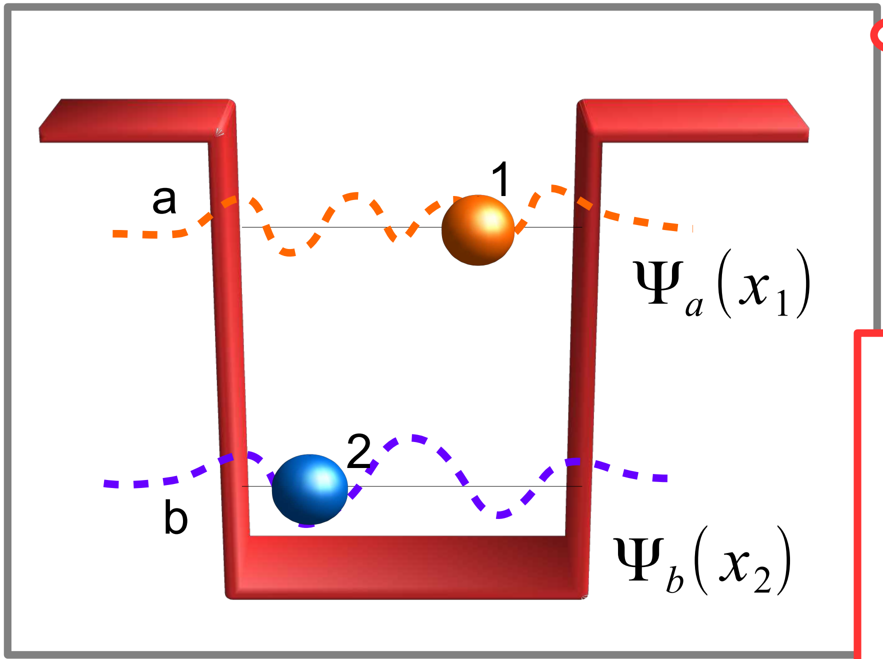
Волновая функция пары частиц.

$$\Psi_{ab}(x_1, x_2) = ???$$



Волновая функция пары частиц.

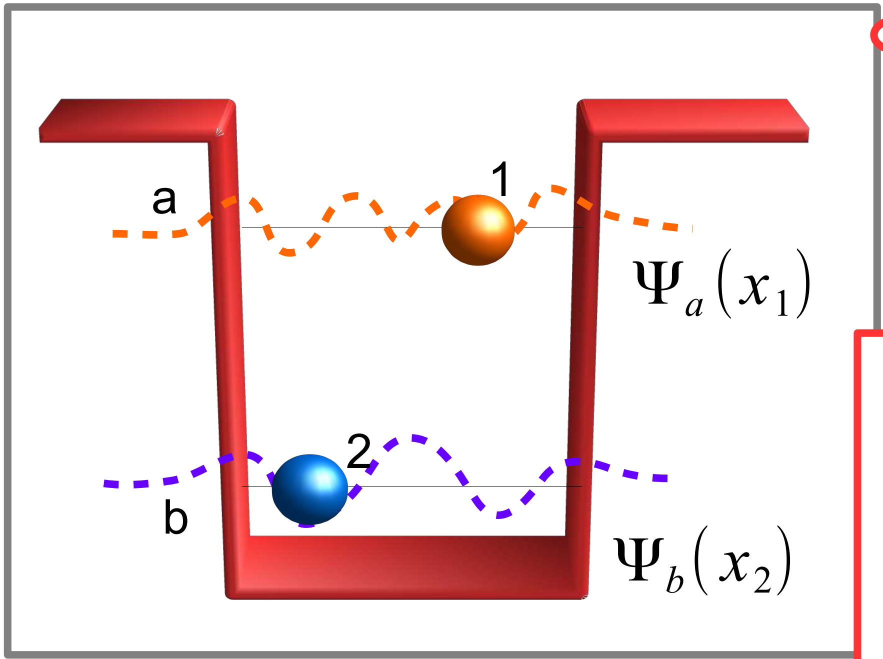
$$\Psi_{ab}(x_1, x_2) = ???$$



$$w_1 = \int_{\xi}^{\zeta} d\,x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\,x_2 \left[\Psi_{ab}^{*} \Psi_{ab}\right]$$

Волновая функция пары частиц.

$$\Psi_{ab}(x_1, x_2) = ???$$



$$w_1 = \int_{\xi}^{\zeta} d\,x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\,x_2 \left[\Psi_{ab}^{*} \Psi_{ab}\right]$$

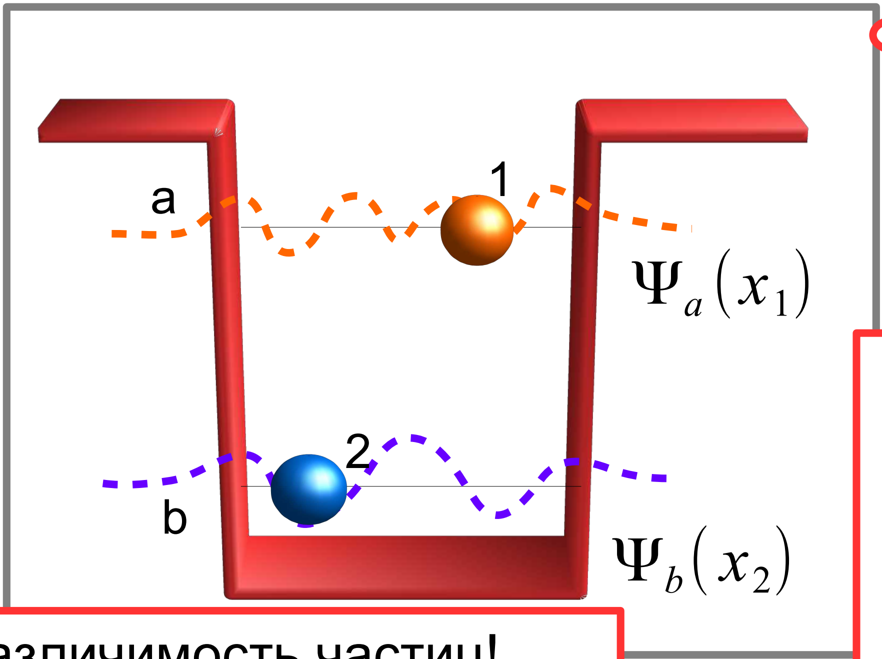
Гипотеза:

$$\Psi_{ab}^{проб}(x_1, x_2) = \Psi_a(x_1)\,\Psi_b(x_2)$$

неразличимых

Волновая функция пары частиц.

$$\Psi_{ab}(x_1, x_2) = ???$$



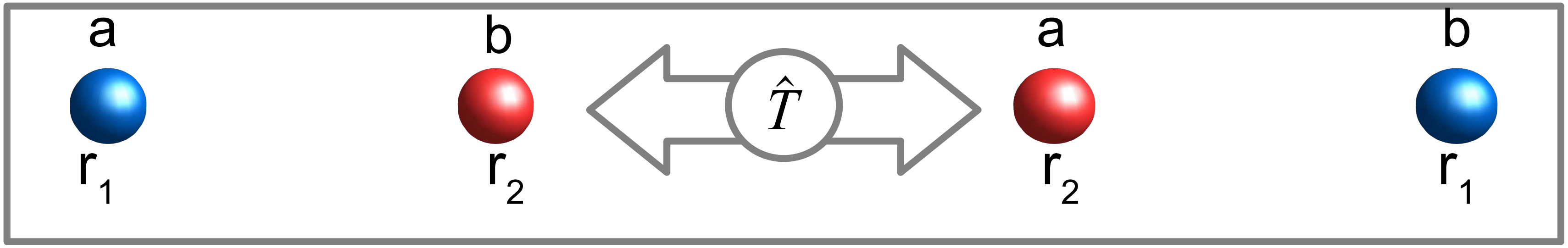
Неразличимость частиц!
Перестановка (1↔2) не должна
менять наблюдаемые

$$w_1 = \int_{\xi}^{\zeta} d\,x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\,x_2 \left[\Psi^*_{ab} \Psi_{ab}\right]$$

Гипотеза:

$$\cancel{\Psi_{ab}^{проб}(x_1, x_2) = \Psi_a(x_1)\Psi_b(x_2)}$$

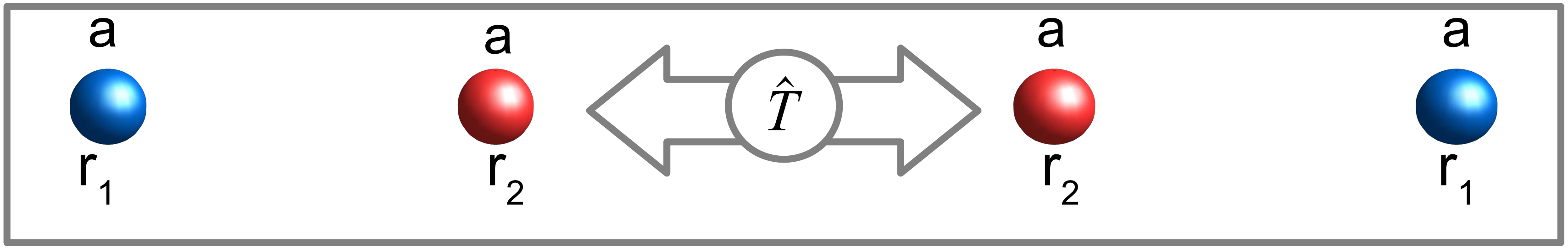
Волновая функция пары неразличимых частиц.



$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{T}\,\Psi_{ab}\left(\vec{r}_{1,}\vec{r}_{2}\right)=C\,\Psi_{ab}\left(\vec{r}_{2,}\vec{r}_{1}\right)\\&\left(\hat{T}\right)^{2}=1\Leftrightarrow C^{2}=1\Leftrightarrow C=\pm1\end{aligned}}$$

$$\boxed{\Psi_{ab}^{(\pm)}\left(\vec{r}_{1},\vec{r}_{2}\right)=C\left[\Psi_{a}\left(\vec{r}_{1}\right)\Psi_{b}\left(\vec{r}_{2}\right)\pm\Psi_{a}\left(\vec{r}_{2}\right)\Psi_{b}\left(\vec{r}_{1}\right)\right]}$$

Неразличимые частицы в одном квантовом состоянии

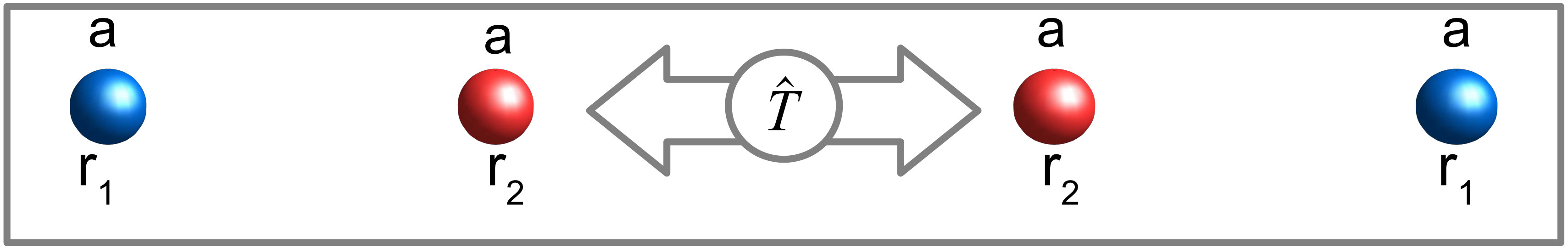


$$\Psi_{aa}^{(\pm)}\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)=C\left[\Psi_a\left(\vec{r}_1\right)\Psi_a\left(\vec{r}_2\right)\pm\Psi_a\left(\vec{r}_2\right)\Psi_a\left(\vec{r}_1\right)\right]$$

$$\Psi_{aa}^{(+)}\left(\vec{r}_{1,}\vec{r}_2\right)=\Psi_a\left(\vec{r}_1\right)\Psi_a\left(\vec{r}_2\right)$$

$$\Psi_{aa}^{(-)}\equiv 0$$

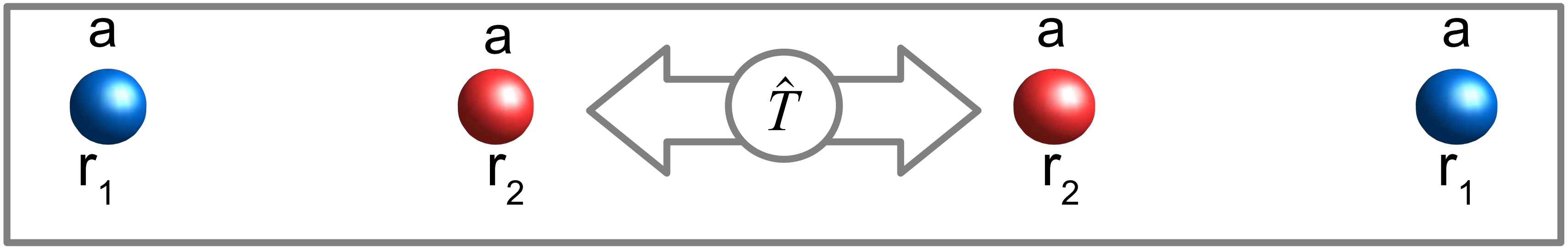
Неразличимые частицы в одном квантовом состоянии



$$\boxed{\Psi_{aa}^{(\pm)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=C\left[\Psi_a(\vec{r}_1)\Psi_a(\vec{r}_2)\pm\Psi_a(\vec{r}_2)\Psi_a(\vec{r}_1)\right]}$$

БОЗЕ-частицы	ЧЁТНЫЕ к перестановке	МОГУТ находиться в одном состоянии
ФЕРМИ-частицы	НЕЧЁТНЫЕ к перестановке	НЕ МОГУТ находиться в одном состоянии

Неразличимые частицы в одном квантовом состоянии



$$\Psi^{(\pm)}_{aa}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=C\left[\Psi_a(\vec{r}_1)\Psi_a(\vec{r}_2)\pm\Psi_a(\vec{r}_2)\Psi_a(\vec{r}_1)\right]$$

БОЗЕ-частицы	ЧЁТНЫЕ к перестановке	МОГУТ находиться в одном состоянии
ФЕРМИ-частицы	НЕЧЁТНЫЕ к перестановке	НЕ МОГУТ находиться в одном состоянии

$$S=0,1,2...$$

$$S=\frac{1}{2},\frac{3}{2}...$$