В.Н.Глазков, МФТИ, 2018

Неделя 9. Электродинамика сверхпроводников. Основы микроскопики. Сверхпроводники II рода.

Оглавление

Задача Т.9.1

В сверхтекучем гелии минимум отношения $\varepsilon(p)/p$ *достигается вблизи ротонного минимума, который описывается следующими параметрами:* $\Delta/k_B = 8.6\,K$, $p_0/\hbar = 1.9\cdot 10^8\,см^{-1}$ *. Пользуясь критерием Ландау, найти критическую скорость* $v_{кр}$ *, ниже которой гелий должен течь без трения.*

Решение:

В сверхтекучем гелии спектр элементарных возбуждений необычен: зависимость переданной энергии от переданного импульса немонотонна, линейна на малых импульсах и имеет локальный минимум, называемый исторически ротонным (рисунок 1). Для нашего курса такой спектр возбуждений является экспериментальным фактом, он может быть измерен например в опыте по неупругому рассеянию нейтронов: оказывается, что неупруго рассеянные в сверхтекучем гелии нейтроны меняют свою энергию совершенно однозначным образом для данного угла рассеяния — что свидетельствует о том, что процесс неупругого рассеяния может быть рассмотрен как двухчастичный процесс с рождением или поглощением элементарного возбуждения квантовой жидкости.

Критерий Ландау является фундаментальным рассуждением, определяющим момент наступления неустойчивости системы с заданным спектром возбуждений к самопроизвольному рождению квазичастиц с ненулевым импульсом. Это равносильно в нашем случае возникновению увлечения жидкости стенками — то есть возникновению трения. Критерий Ландау основан на преобразовании энергии и импульса для квазичастиц (выводились на лекциях). Можно показать, что если сверхтекучая жидкость движется относительно лабораторной системы координат со скоростью $\vec{V}$, то импульс квазичастицы является галилеевским инвариантом $\vec{p}\,' = \vec{p}$, а энергия квазичастицы преобразуется по закону $\varepsilon' = \varepsilon + \vec{p}\cdot\vec{V}$. Здесь штрихованные обозначения относятся к лабораторной системе координат, а не штрихованные — к системе покоя жидкости. Спектр возбуждений (рисунок 1) по постановке опыта известен именно в системе покоя жидкости.

Тогда (рисунок 2) существует критическая скорость (скорость Ландау), когда энергия квазичастиц вблизи ротонного минимума, расположенного в противоположном к направлению движения направлении, обратится в ноль — эти квазичастицы начнут спонтанно образовываться в большом количестве, жидкость начнёт увлекаться стенками в направлении, *противоположном движению* (тормозиться!), и сверхтекучее состояние разрушится.

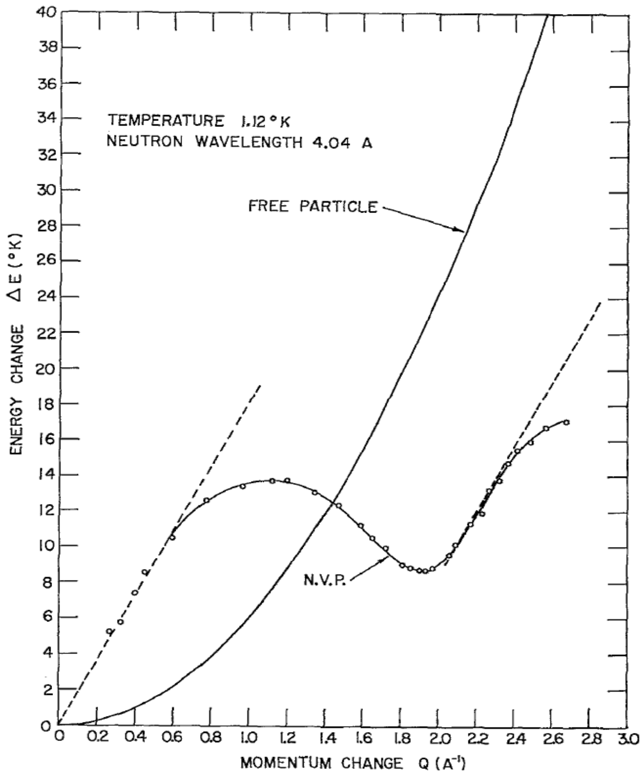


Рисунок 1: Спектр элементарных возбуждений в гелии-4 ниже лямбда-точки, определённый по неупругому рассеянию нейтронов. Температура 1.12 К, давление равно давлению насыщенных паров.

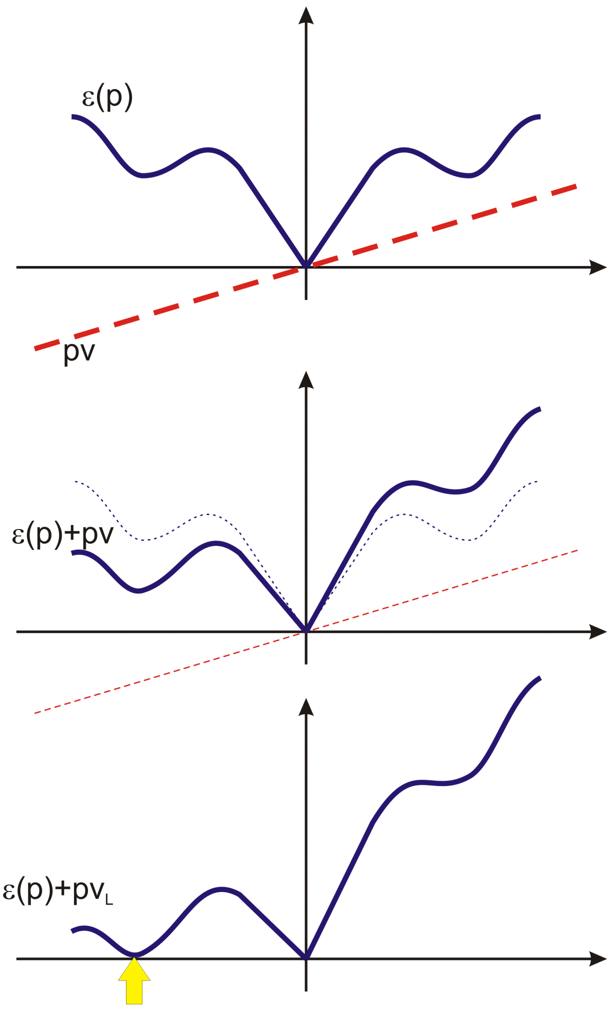


Рисунок 2: Преобразование спектра квазичастичных возбуждений при переходе в лабораторную систему координат. Верхний рисунок: спектр возбуждений в системе покоя жидкости и вклад pv для некоторой скорости меньшей критической. На среднем рисунке: спектр возбуждений в лабораторной системе координат при скорости течения меньше критической. На нижнем рисунке: спектр при критической скорости течения, стрелкой отмечен импульс при котором "конденсируются" квазичастицы.

Таким образом, применение критерия Ландау сводится к построению проходящей через ноль касательной к спектру квазичастиц. Угол наклона этой прямой и определяет максимальную скорость бездиссипативного движения системы.

Вблизи ротонного минимума спектр имеет вид $\varepsilon(p)=\Delta+\frac{(p-p_0)^2}{2\mu}$.

Учитывая малость $\delta p \equiv p - p_0$, находим, что $min\left(\frac{\varepsilon(p)}{p}\right)$ достигается при $\delta p \approx \mu \Delta / p_0$.

Откуда $v_{кр} = min\left(\frac{\varepsilon(p)}{p}\right) = \frac{\delta p}{\mu} \approx 60\, м/сек$.

Замечание. На самом деле в эксперименте критическая скорость оказывается сильно меньше. Дело в том, что мы не учли возбуждения ещё одного типа - квантовые вихри, которые нужно описывать иначе (их существование не видно из формы спектра), см. следующую задачу.

Задача Т.9.2

Для сверхтекучего гелия в цилиндрической полости $a < r < b$ возможны вихревые состояния с целым числом n квантов циркуляции. Найти энергию одноквантового ($n=1$) вихревого состояния (в расчёте на единицу длины цилиндра). Считать заданной массу атомов гелия m и их концентрацию ρ_0.

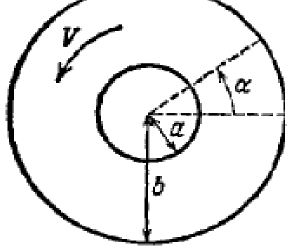


Рисунок 3: К задаче Т.9.2

В сверхтекучем состоянии атомы гелия образуют сверхтекучий конденсат, который описывается единой волновой функцией Ψ. Это комплекснозначная функция координаты. Выделим её модуль Ψ_0 и фазу Θ : $\Psi = \exp(i\theta)\Psi_0$. В однородной жидкости от координаты зависит только фаза (плотность жидкости постоянна по объёму, поэтому $|\Psi|^2 = const$)

Квантовомеханическая формула для плотности потока вероятности даёт:

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi\right) = \frac{\hbar}{m}\Psi_0^2 \nabla \Theta ,$$

а с другой стороны $\vec{j} = \Psi_0^2 \vec{v}$ (плотность вероятности умножили на скорость). Отсюда

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{m}\nabla \theta(\vec{r}) ,$$

Тот же результат может быть построен через квазиклассическую аналогию. Действие оператора импульса на волновую функцию $\hat{\vec{p}}\Psi_0 = (\hbar \vec{\nabla}\Theta)\Psi_0$ нужно сопоставить с импульсом движения частицы $m\vec{v}$. Так как речь идёт про движение при $T=0$, то это сверхтекучее движение.

Для градиента фазы в цилиндрических координатах $\vec{\nabla}\Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}\vec{e}_\alpha$, где азимутальный угол обозначен α (обозначение по рисунку 3) . По условию, течение жидкости круговое и радиальных компонент нет. В силу осевой симметрии отсюда следует сразу $\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}=const$, т. е. фаза зависит от азимутального угла линейным образом. Из условия однозначности волновой функции при обходе по замкнутому контуру возникает требование $\theta=n\alpha$, где n – целое. (Тогда при $\alpha=2\pi$, то есть при обходе по кругу, фаза изменится на $2\pi n$). Число n – это и есть число квантов циркуляции. Поэтому для поля скоростей:

$$v=\frac{\hbar n}{mr} .$$

И в результате для одноквантового вихря энергия на единицу длины:

$$E_{кин}=\frac{1}{2}\int_a^b \rho_0 m\left(\frac{\hbar}{mr}\right)^2 2\pi r\,dr=\frac{\pi\hbar^2\rho_0}{m}\ln\left(\frac{b}{a}\right) .$$

Комментарий 1: Достаточно близко к центру вихря скорость сверхтекучей жидкости превысит скорость Ландау и в центре вихря возникнет область нормальной жидкости (кор вихря). Размер этой области $r\simeq\frac{\hbar}{m v_{кр}}\sim 2.5\cdot 10^{-8}\,см$ порядка нескольких межатомных расстояний. Это значит, что для возникновения такого вихревого движения нет необходимости создавать «механическую ось» вихря, как в условии задачи. Логарифмическая зависимость энергии от радиуса сердцевины вихря достаточно медленная, так что даже при радиусе сердцевины порядка межатомного размера численно энергия вихря меняется не катастрофично

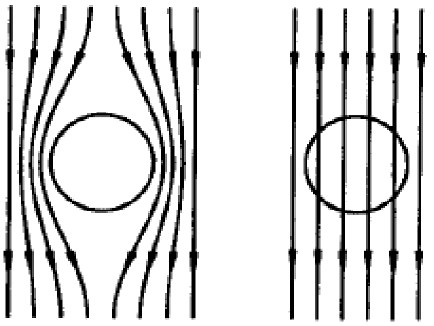
Комментарий 2: Энергия вихря конечно положительна — его создание не выгодно. Однако, как только вихрь создан он оказывается защищён от самопроизвольного исчезновения законом сохранения момента импульса. В неограниченном объёме вихрь может исчезнуть только встретившись с «антивихрем» с другим направлением циркуляции сверхтекучей скорости. То есть, число набранных квантов циркуляции в вихре является своего рода топологическим зарядом вихря и для этого заряда есть «закон сохранения».

Комментарий 3: Обратите внимание, что если вычислить эту энергию для n-квантового вихря (в котоом набег фазы равен $2\pi n$), то она окажется пропорциональна n^2 . Это означает, что такой вихрь невыгоден по отношению к распаду на n одноквантовых визхрей: энергия n одноквантовых вихрей пропорциональна n , а «закон сохранения заряда» такой распад не нарушает.

Задача Т.9.3

Как показали опыты Мейсснера и Оксенфельда, магнитная индукция $\vec{B}$ *внутри сверхпроводника равна нулю (речь идёт о сверхпроводниках первого рода). Это означает, что сверхпроводник — это не то же самое, что идеальный проводник, хотя в обоих случаях сопротивление равно нулю. Убедитесь в том, что состояние идеального проводника (который ведёт себя как идеальный диамагнетик) в магнитном поле зависит от предыстории. Для этого рассмотрите два пути перевода идеально проводящего шарика в состояние* $T<T_c$ *,* $H>0$ *: а) сначала шарик охлаждается, затем включается магнитное поле, и б)поле включается до охлаждения. Результат представьте в виде рисунка магнитных силовых линий в обоих случаях. Что будет в случае сверхпроводника?*

Решение:



а) б)

Рис. 1.2. Магнитное состояние идеального проводника при $T < T_c$**,** $H > 0$ **зависит от предыстории: а) идеальный проводник внесен в магнитное поле при** $T < T_c$**; б) то же, но при** $T > T_c$**.**

Рисунок 4: К задаче Т.9.3.

Задача разобрана в В.В. Шмидт , *Введение в физику сверхпроводников* (2000), раздел 1.4.

В гипотетическом идеальном проводнике состояние зависит от предыстории. При охлаждении через точку перехода в «идеальнопроводящее состояние» в поле — не изменится ничего. При переходе в «идеальнопроводящее состояние» в нулевом поле и последующем увеличении поля возникнут незатухающие индукционные токи, выталкивающие силовые линии магнитного поля из образца.

При выключении поля будет обратная картина: при переходе в «идеальнопроводящее состояние» в поле образец пронизывают силовые линии магнитного поля и при выключении поля возникнут незатухающие индукционные токи, поддерживающие существование этих силовых линий.

Сверхпроводник *всегда* ведёт себя как на рис.а), вне зависимости от предыстории.

Задача Т.9.4

Найти критический ток I_c *через сверхпроводящую проволоку радиуса* R *, при котором сверхпроводимость в проволоке начнёт разрушаться. Ответ записать через критическое поле* H_c *.*

Ток создаёт магнитное поле, оно максимально на поверхности проволоки: $H(R)=\frac{2I}{cR}$ (это следует из уравнений Максвелла). Когда поле на поверхности достигнет H_c , сверхпроводимость вблизи поверхности разрушится. Этот результат называют правилом Силсби.
Поэтому $I_c=cR\,H_c/2$.

Комментарий: Интересно отметить, что процесс разрушения сверхпроводимости носит лавинный характер: как только разрушится сверхпроводимость на поверхности, весь ток потечёт по более узкому сверхпроводящему каналу ближе к центру проволоки, поле на поверхности этого сверхпроводящего канала будет ещё больше и т. д. В результате, сверхпроводящая фаза должна полностью исчезнуть. Однако, как только провод станет полностью нормальным, ток потечёт по всему его сечению и поле станет равно критическому только на поверхности. Кажущаяся нестабильность связана с предположением об однородности сечения провода по длине. Реально при токе выше критического образуется промежуточное состояние, в котором сосуществуют сверхпроводящая и нормальная фазы, а сечение занятое сверхпроводящей фазой меняется вдоль провода. Подробности есть в книге Абрикосова «Теория металлов».

Задача 5.11

Найти распределение поля и тока в бесконечной пластине сверхпроводника толщиной d *, помещённой в однородное параллельное пластине магнитное поле* B_0 *.*

Решение:

Решение предполагает известной лондоновскую глубину проникновения λ .

Пусть пластина занимает область $-\frac{d}{2}< x< \frac{d}{2}$.

Направление поля выберем за ось z , тогда токи текут по y . Поле зависит только от x : $\vec{h}=(0,0,h(x))$.

Уравнение Лондонов $\vec{h}+\lambda^2 rot\,rot\,\vec{h}=0$

принимает вид

$$h-\lambda^2\frac{d^2h}{dx^2}=0 .$$

Его общее решение записывается как

$$h(x)=h_1\, ch(x/\lambda)+h_2\, sh(x/\lambda)$$.

Учитывая граничные условия $h(\pm d/2)=B_0$, получаем

$$h(x)=B_0\frac{ch(x/\lambda)}{ch(d/(2\lambda))}$$.

Из уравнения Максвелла $rot\,\vec{h}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}_s$ находим

$$j_s(x)=-\frac{c}{4\pi}\frac{dh}{dx}=-\frac{c\,B_0}{4\pi\lambda}\frac{sh(x/\lambda)}{ch(d/(2\lambda))}$$.