

Квантовая макрофизика.

Лекция 12: Низкоразмерные электронные СИСТЕМЫ.

Анонс семинара 20.04

В среду, 20 апреля, в 17:00 в аудитории 119 ГК состоится очередной общефизический научный семинар МФТИ «Нанопотоника и фемтосекундный магнетизм в тонких диэлектрических пленках».

Докладчик: Чернов Александр Игоревич, к.ф.-м.н., с.н.с. - зав. лаб. физики магнитных гетероструктур и спинтроники для энергосберегающих информационных технологий МФТИ. Руководитель группы «Квантовая спинтроника и низкоразмерные материалы» Российского квантового центра. В докладе будут представлены несколько научных направлений, которыми в настоящее время занимается лаборатория. Основное внимание будет уделено результатам экспериментов по возбуждению спиновых волн при помощи коротких лазерных импульсов.

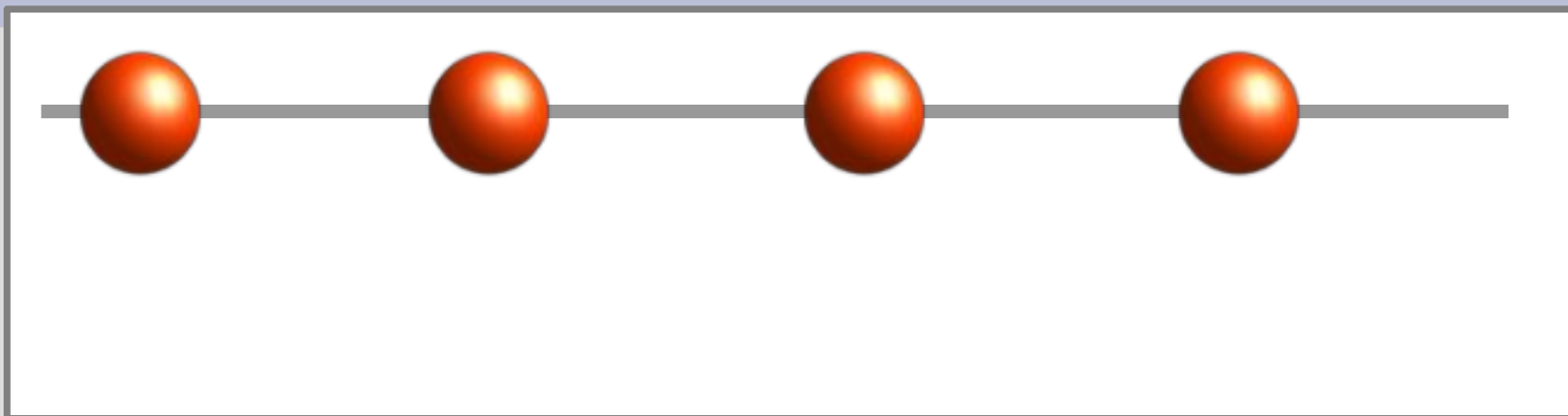
Часть 1: Общие свойства и специфика низкоразмерных систем



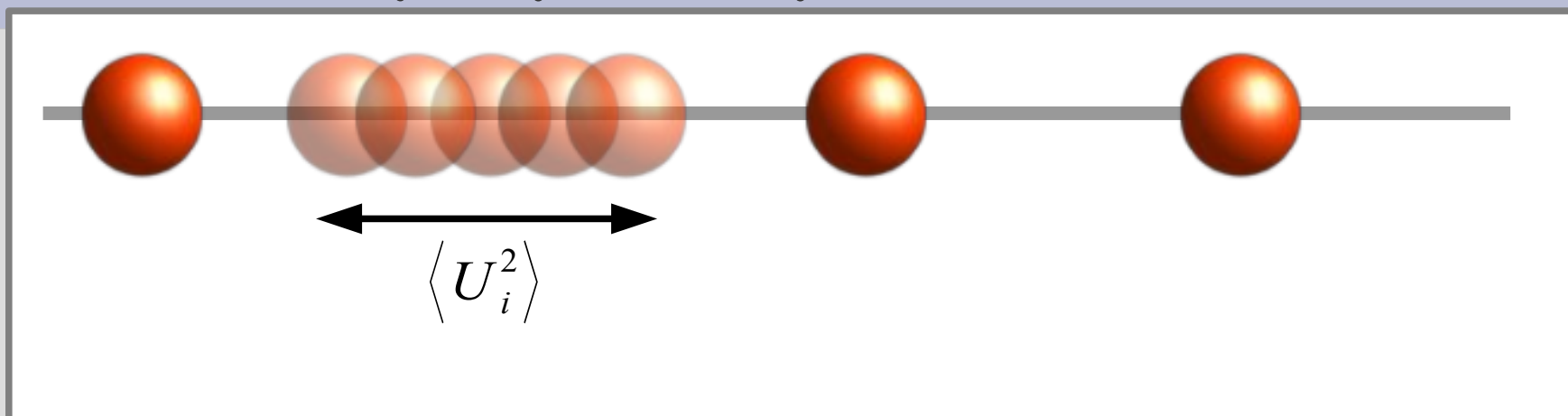
https://www.tripadvisor.com/LocationPhotoDirectLink-g190746-d188689-i146338610-West_Somerset_Railway-Minehead_Somerset_England.html

Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов

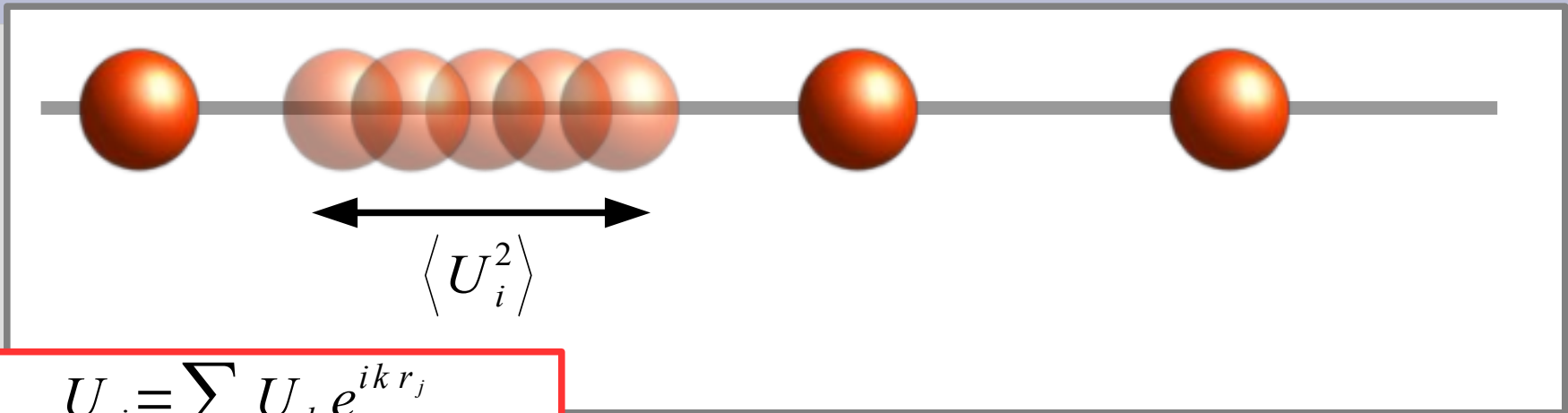
Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов



Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов

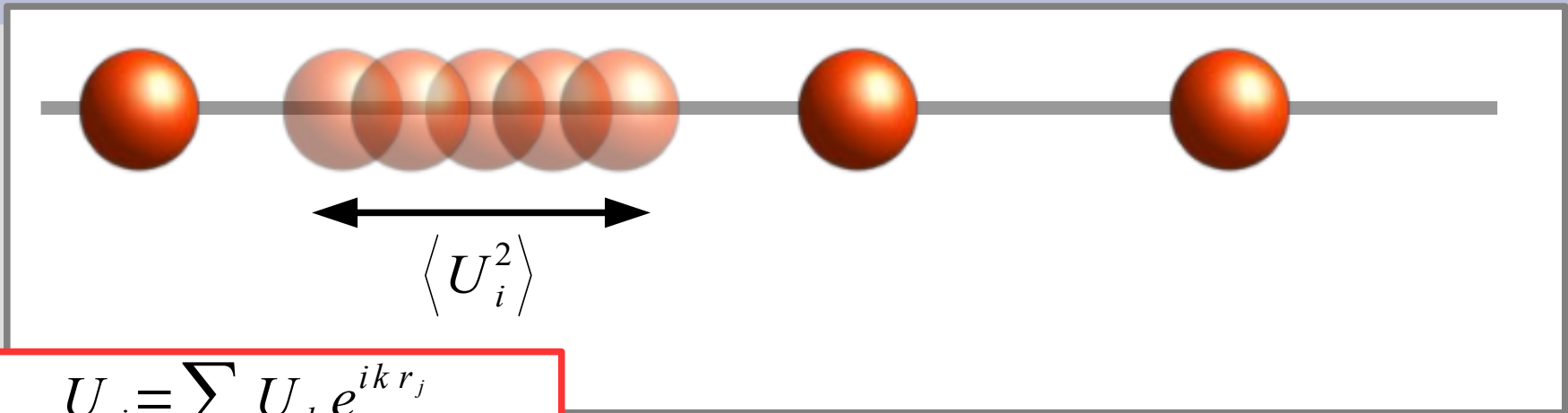


Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов



$$U_j = \sum_k U_k e^{ikr_j}$$
$$U_j^2 = \sum_{k, k'} U_k U_{k'}^* e^{i(k-k')r_j}$$
$$\langle U_j^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_j U_j^2 = \sum |U_k|^2$$

Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов



$$U_j = \sum_k U_k e^{ikr_j}$$

$$U_j^2 = \sum_{k, k'} U_k U_{k'}^* e^{i(k-k')r_j}$$

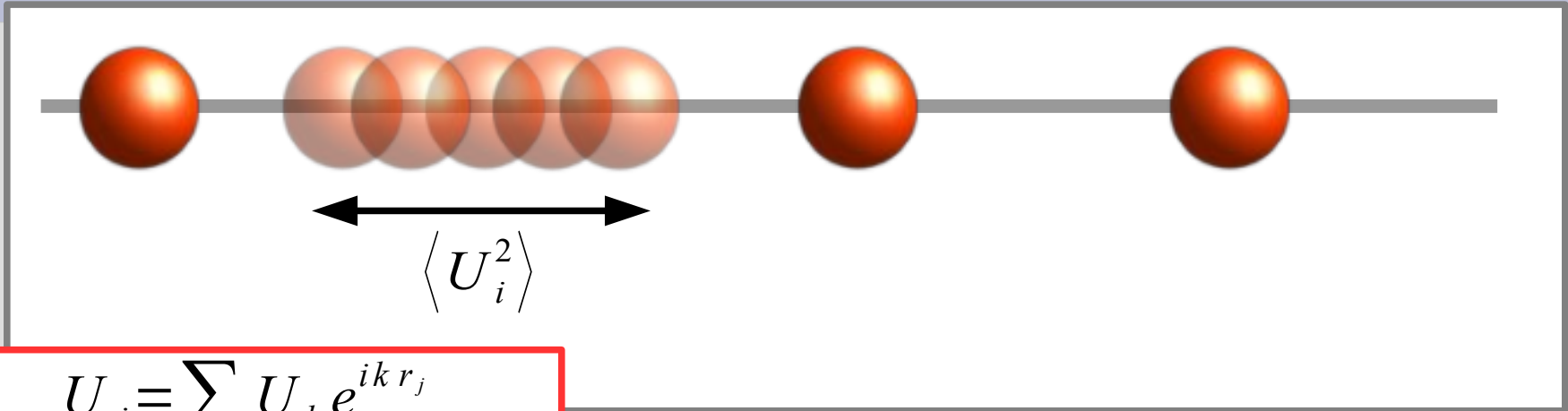
$$\langle U_j^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_j U_j^2 = \sum |U_k|^2$$

$$E_k = \langle E \rangle = 2 \left\langle \sum \frac{M \dot{U}_j^2}{2} \right\rangle = \frac{\omega_k^2 N M}{2} |U_k|^2$$

$\langle K \rangle = \langle \Pi \rangle$

$$E_k = \hbar \omega_k \left(\frac{1}{2} + n(\epsilon_k, T) \right)$$

Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов



$$U_j = \sum_k U_k e^{ikr_j}$$

$$U_j^2 = \sum_{k, k'} U_k U_{k'}^* e^{i(k-k')r_j}$$

$$\langle U_j^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_j U_j^2 = \sum |U_k|^2$$

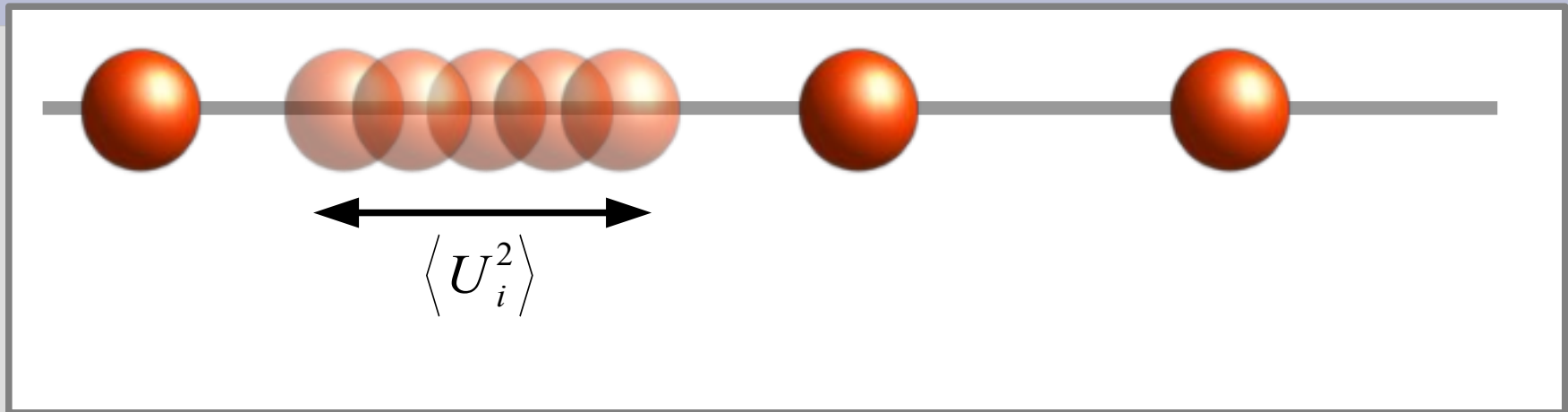
$$E_k = \langle E \rangle = 2 \left\langle \sum \frac{M \dot{U}_j^2}{2} \right\rangle = \frac{\omega_k^2 N M}{2} |U_k|^2$$

$\langle K \rangle = \langle \Pi \rangle$

$$\langle U_j^2 \rangle \propto \sum_k \frac{1}{\omega_k} \left(\frac{1}{2} + n(\epsilon_k, T) \right)$$

$$E_k = \hbar \omega_k \left(\frac{1}{2} + n(\epsilon_k, T) \right)$$

Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов

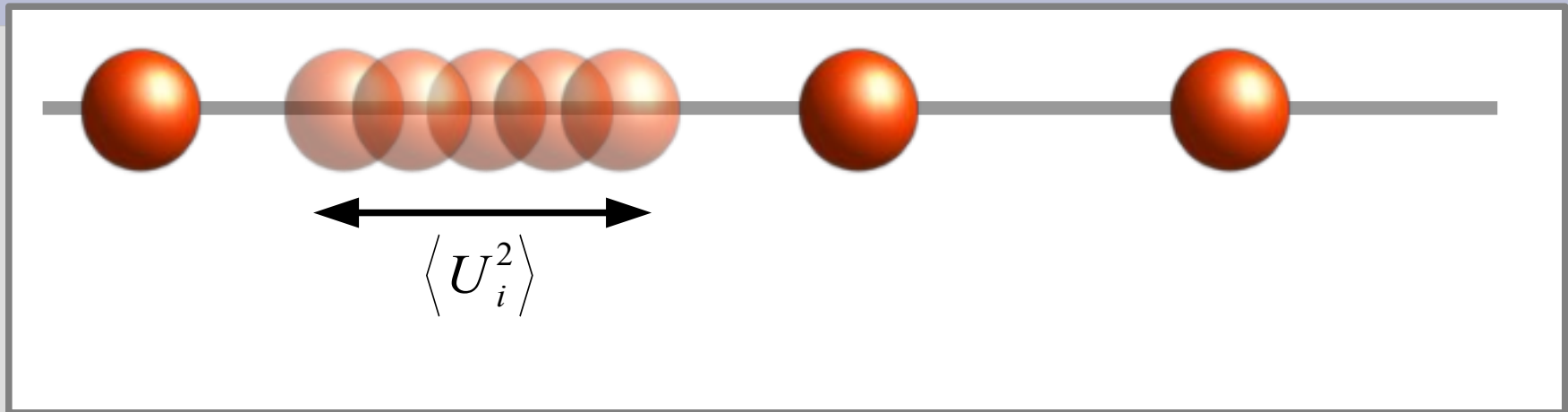


$$\langle U_j^2 \rangle \propto \sum_k \frac{1}{\omega_k} \left(\frac{1}{2} + n(\epsilon_k, T) \right)$$

T=0:

$$\langle U^2 \rangle \propto \int_0^{k_{max}} \frac{d^D k}{\omega_k} \approx \int_0^{k_{max}} \frac{d^D k}{s k} = \begin{cases} \propto \ln 0, & 1D \\ \propto k_{max}, & 2D \\ \propto k_{max}^2, & 3D \end{cases}$$

Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов



$$\langle U_j^2 \rangle \propto \sum_k \frac{1}{\omega_k} \left(\frac{1}{2} + n(\epsilon_k, T) \right)$$

$T > 0$:

$$\langle U^2 \rangle_T \propto \int_0^{k_{max}} n(T) \frac{d^D k}{\omega_k} \approx \int_0^{k_{max}} \frac{1}{e^{\hbar s k / T} - 1} \frac{d^D k}{s k} = \begin{cases} \propto \ln 0, & 2D \\ \propto k_{max}, & 3D \end{cases}$$

Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов

$T > 0$:

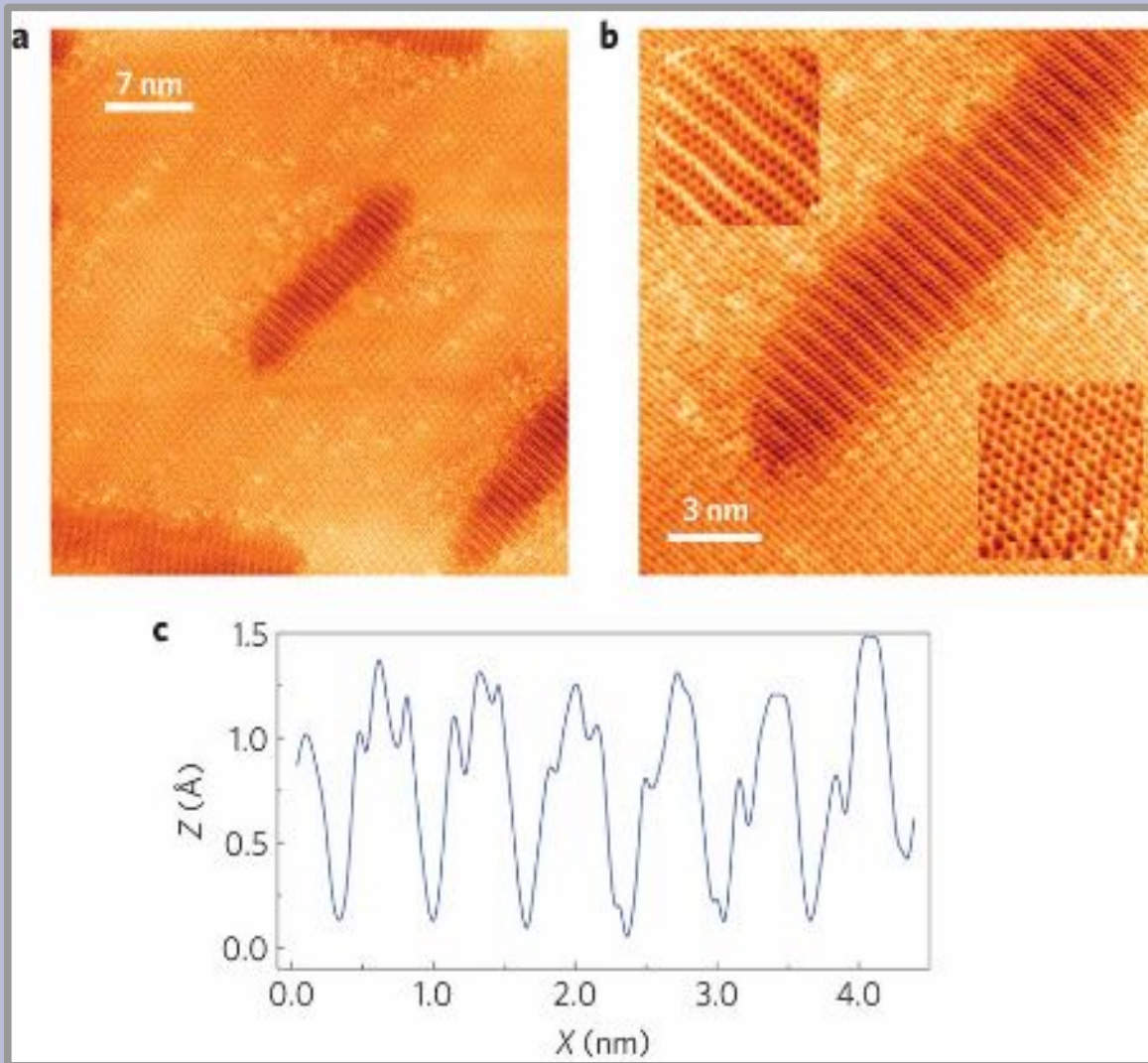
$$\langle U^2 \rangle_T \propto \int_0^{k_{max}} n(T) \frac{d^D k}{\omega_k} \approx \int_0^{k_{max}} \frac{1}{e^{\hbar s k / T} - 1} \frac{d^D k}{s k} = \begin{cases} \propto \ln 0, & 2D \\ \propto k_{max}, & 3D \end{cases}$$

$$\langle U_j^2 \rangle \propto \sum_k \frac{1}{\omega_k} \left(\frac{1}{2} + n(\epsilon_k, T) \right)$$

$T = 0$:

$$\langle U^2 \rangle \propto \int_0^{k_{max}} \frac{d^D k}{\omega_k} \approx \int_0^{k_{max}} \frac{d^D k}{s k} = \begin{cases} \propto \ln 0, & 1D \\ \propto k_{max}, & 2D \\ \propto k_{max}^2, & 3D \end{cases}$$

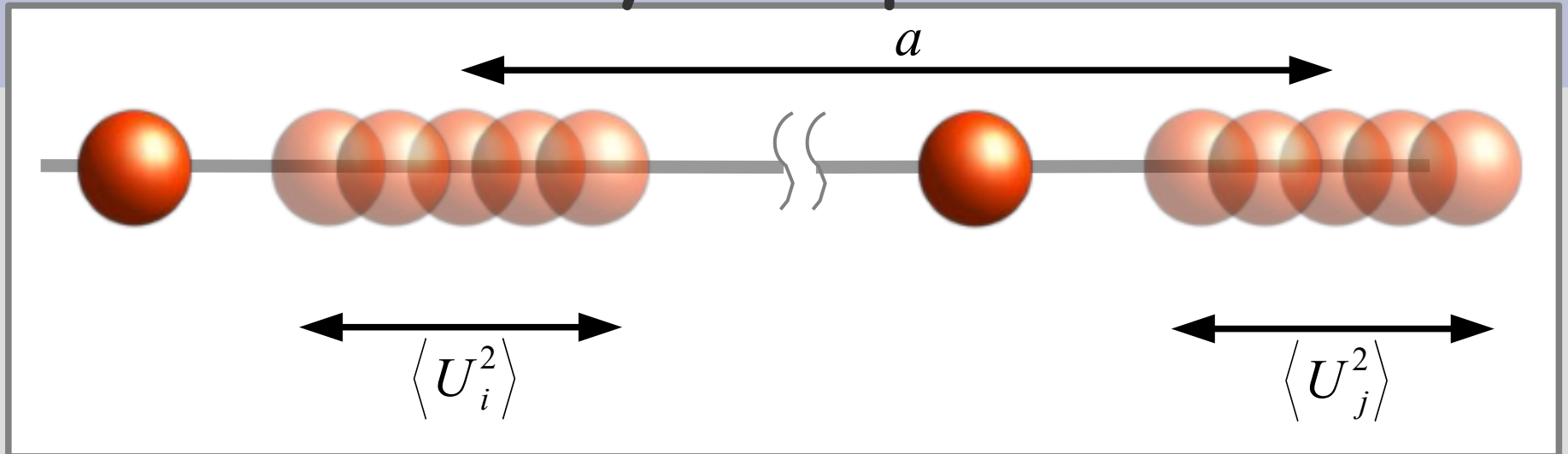
А как же графен?!



Полученное при помощи сканирующего туннельного микроскопа изображение листа графена на медной подложке. Более тёмные области соответствуют местам, где в медной подложке есть протяжённые (ширина около 5 нм, длина около 20 нм) вакансии на поверхности - «провалы» в атомно-гладкой поверхности. Над этими вакансиями фрагмент листа графена оказывается свободно подвешенным и на его поверхности возникает модуляция в поперечном направлении. На панели (b) показаны увеличенные фрагменты поверхности над «провалом» (сверху) и на гладкой поверхности (снизу). На панели (c) показан профиль поверхности вдоль «провала».

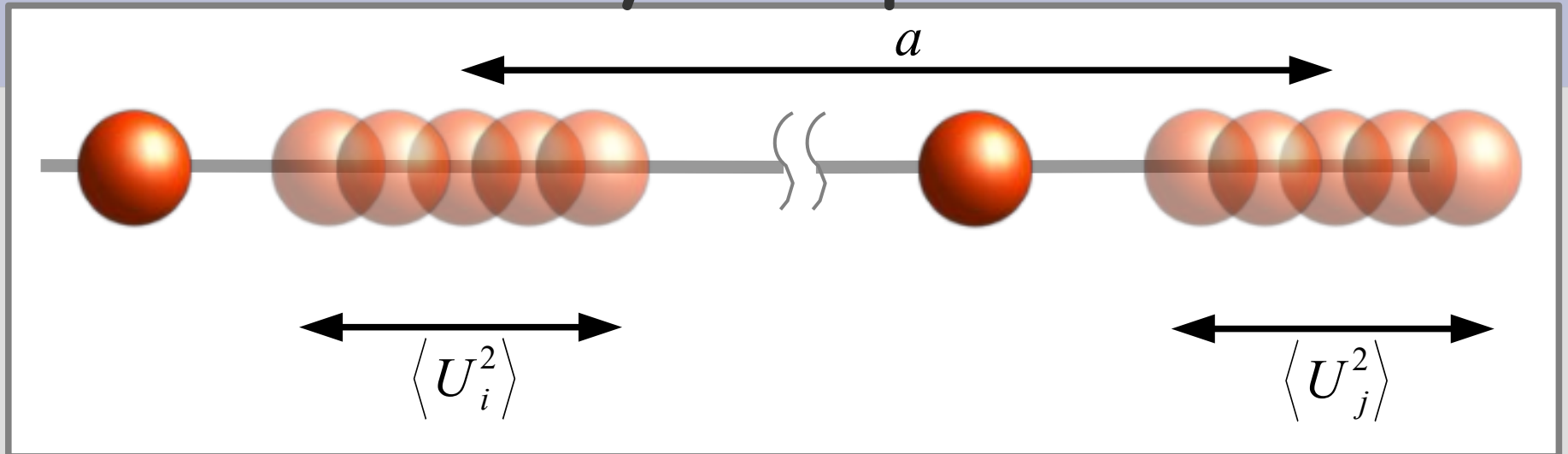
Из статьи Levente Tapasztó, Traian Dumitrică, Sung Jin Kim, Péter Nemes-Incze, Chanyong Hwang and László P. Biró, Breakdown of continuum mechanics for nanometre-wavelength rippling of graphene, Nature Physics, 8, 739(2012)

И всё чуть хитрее...



$$\begin{aligned}
 f(a) &= \left\langle \left(U(r_j) - U(r_j + a) \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_j \left(U(r_j) - U(r_j + a) \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{j, k, k'} U_k U_{k'}^* e^{i(k-k')r_j} (1 - e^{ika}) (1 - e^{-ik'a}) \propto \\
 &\propto \sum_k |U_k|^2 \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right)
 \end{aligned}$$

И всё чуть хитрее...



$$f(a) = \langle (U(r_j) - U(r_j + a))^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_j (U(r_j) - U(r_j + a))^2 =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j, k, k'} U_k U_{k'}^* e^{i(k-k')r_j} (1 - e^{ika}) (1 - e^{-ik'a}) \propto$$

$$\propto \sum_k |U_k|^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

1D, T=0:

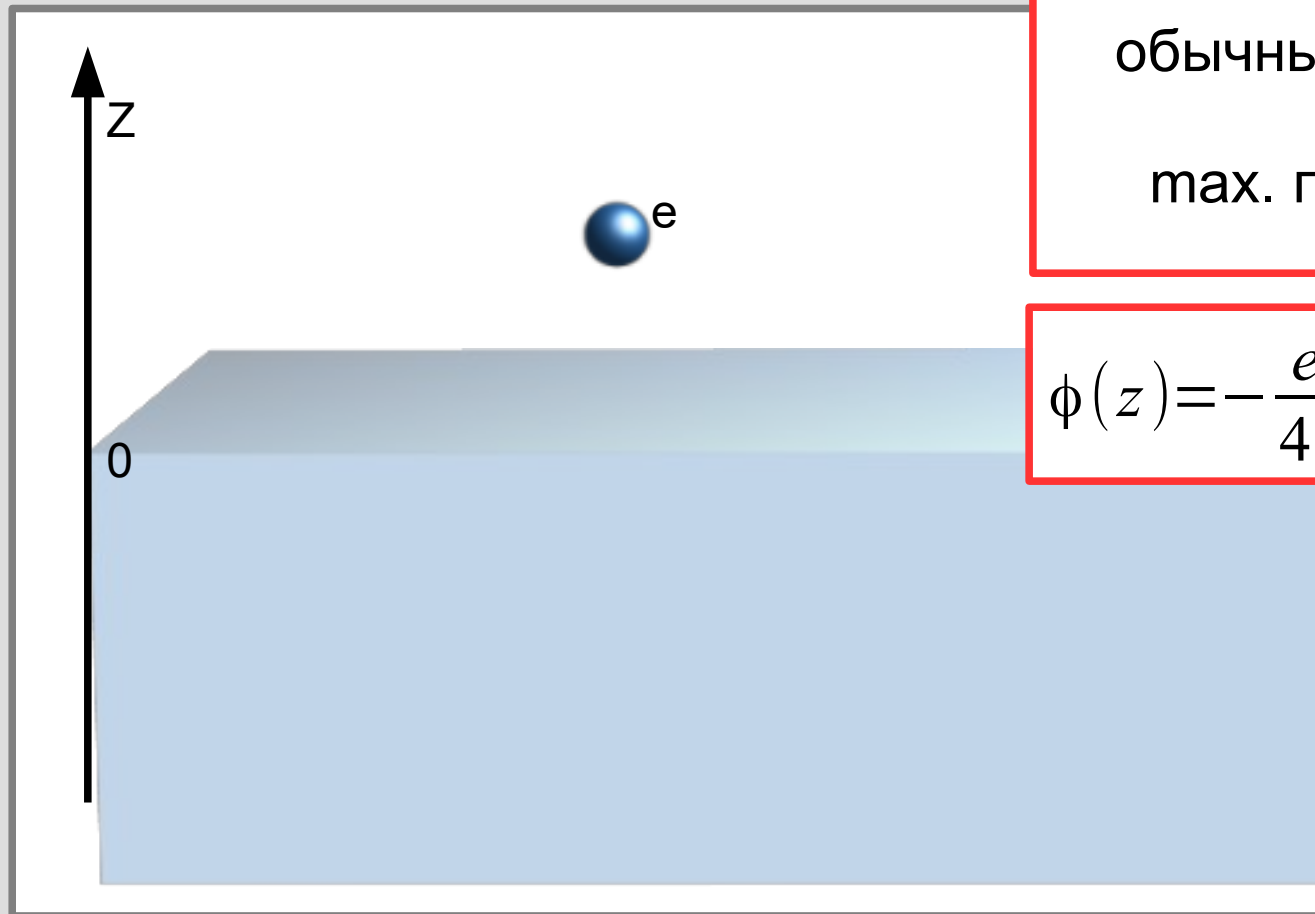
$$f(a) \propto \int_0^{k_{\max}} \frac{\sin^2(ka/2)}{sk} dk$$

Промежуточный вывод

- ИДЕАЛЬНЫЕ одномерные и двумерные кристаллы термодинамически неустойчивы.
- РЕАЛЬНО ИЗУЧАЮТСЯ квази-низкоразмерные системы (понижение размерности имеет место с некоторой точностью и по некоторым категориям)

Задача 2. Двумерный и одномерный электронный газ.

Электроны над поверхностью жидкого гелия.



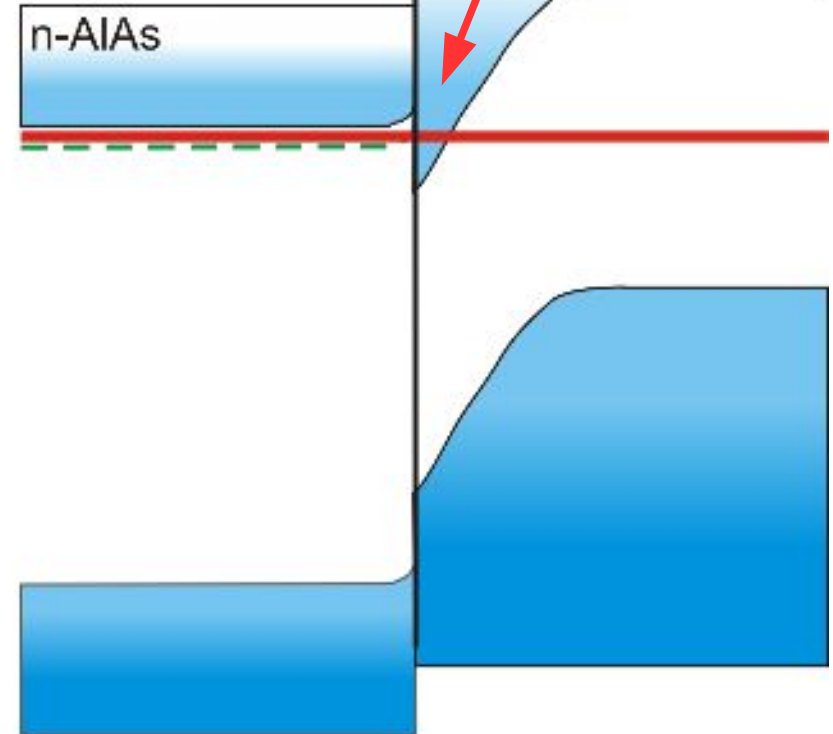
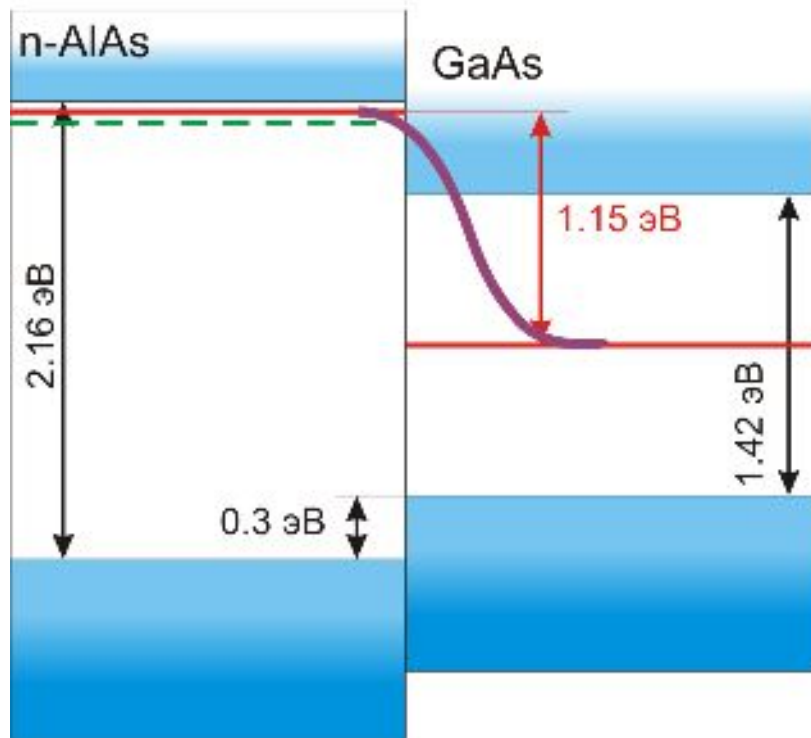
обычные температуры $\sim 1\text{K}$

max. плотность 10^9 1/см^2

$$\phi(z) = -\frac{e^2(\epsilon - 1)}{4(\epsilon + 1)z}$$

Двумерный электронный газ в гетероструктуре.

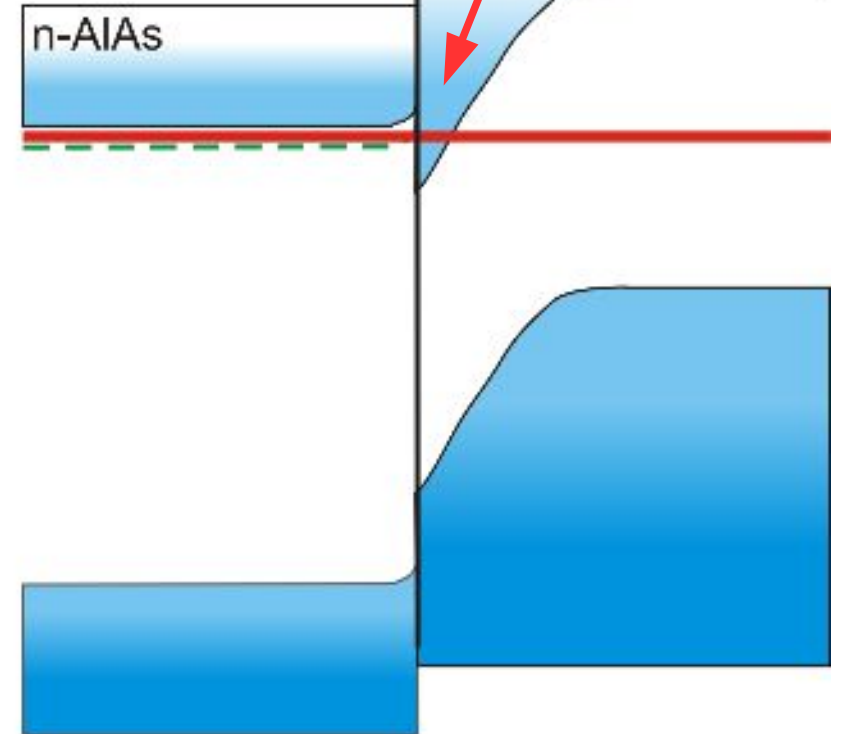
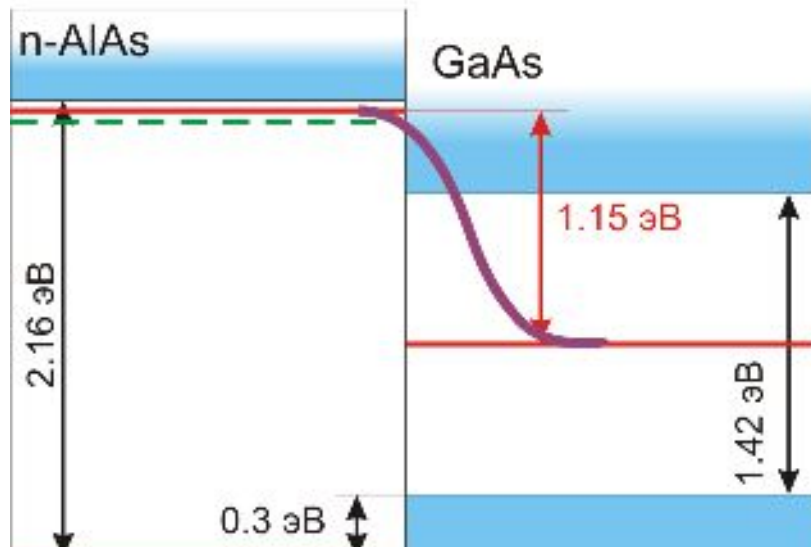
$$U(z) = \begin{cases} +\infty, & z < 0 \\ kz, & z > 0 \end{cases}$$



Построение энергетической диаграммы для гетероперехода между сильно легированным n-AlAs и чистым GaAs. Ширина запрещённой зоны и разрывы зон показаны в масштабе.

Двумерный электронный газ в гетероструктуре.

$$U(z) = \begin{cases} +\infty, & z < 0 \\ kz, & z > 0 \end{cases}$$

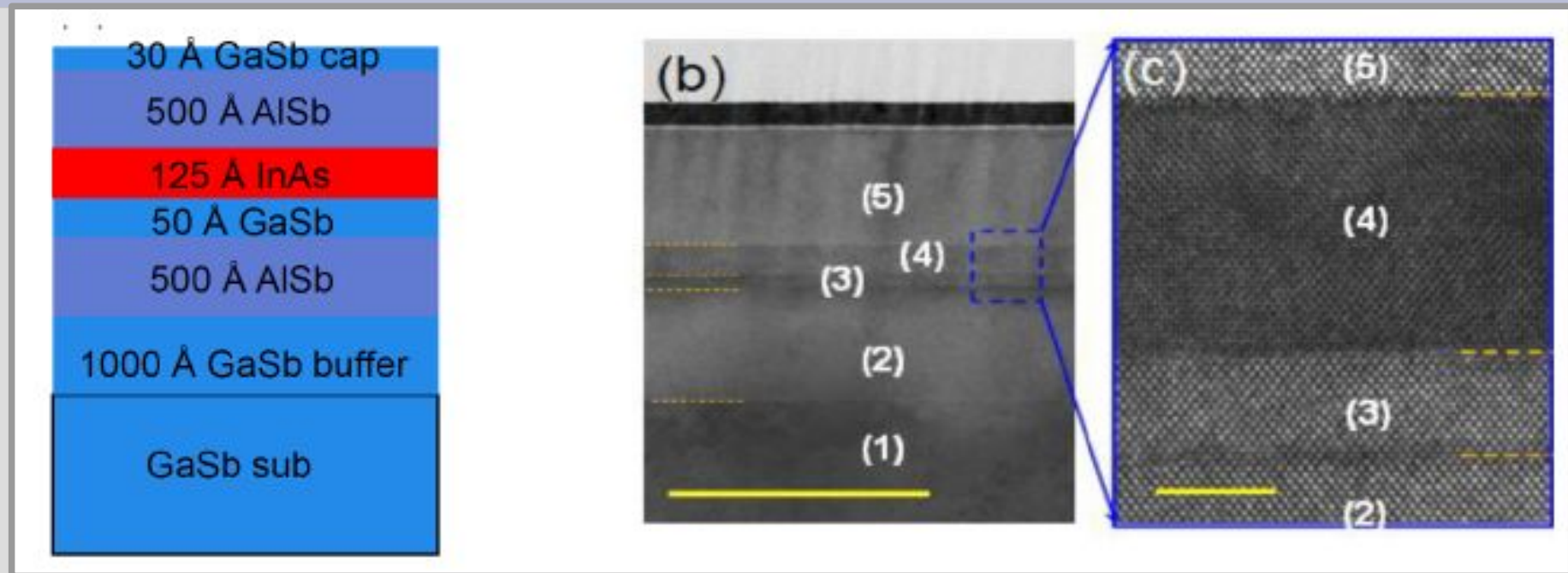


температуры до ~ 100 мК

max. плотность $\sim 10^{12}$ 1/см²

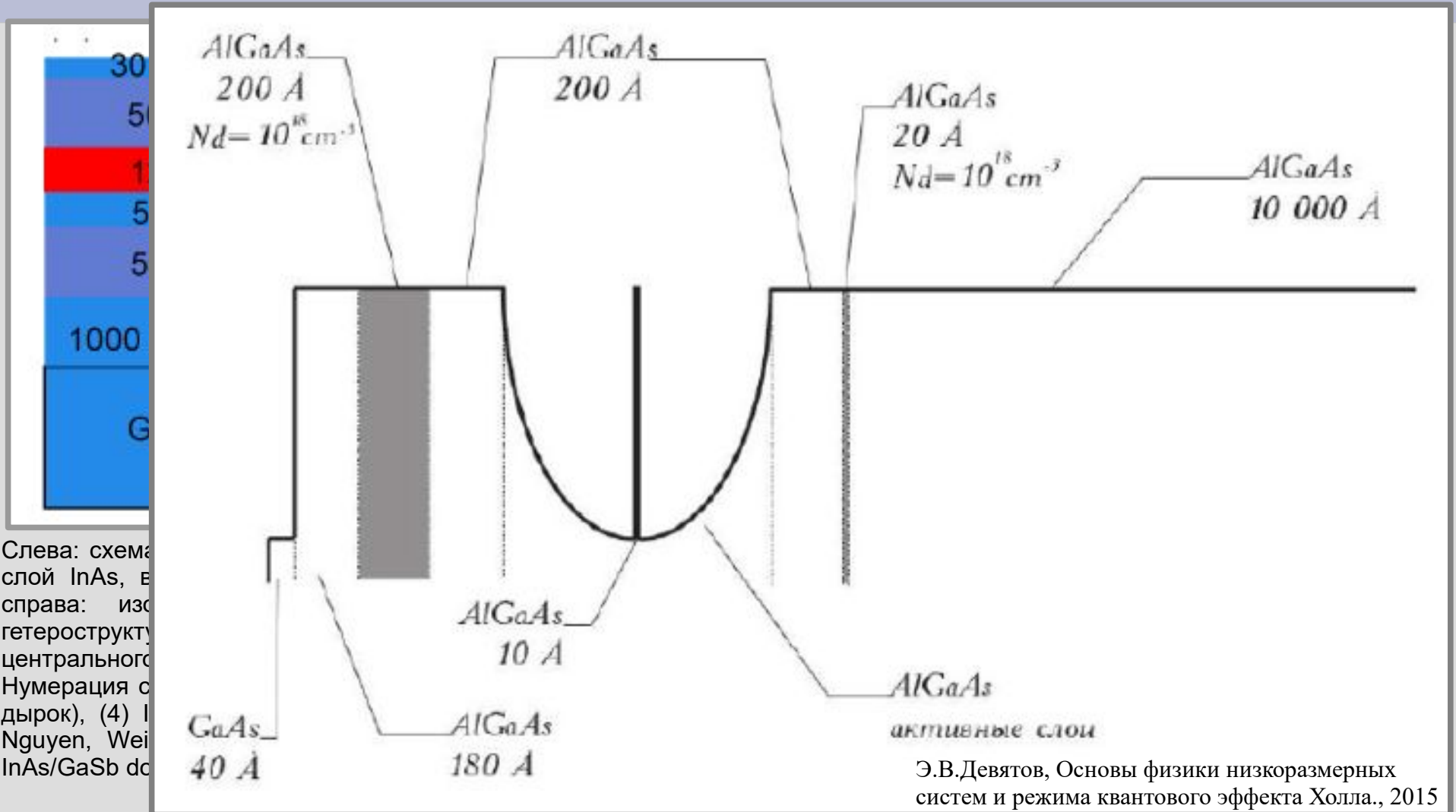
ильно легированным n-AlAs и чистым GaAs. Ширина

Технологии: Эпитаксиальный рост гетероструктур



Слева: схема чередования слоёв в сложной гетероструктуре. Красным цветом выделен слой InAs, в котором формируется потенциальная яма для электронов. В центре и справа: изображения (туннельная электронная микроскопия) среза реальной гетероструктуры. Горизонтальная жёлтая линия задаёт масштаб, она равна 100 нм для центрального рисунка и 5 нм для правого. Жёлтый пунктир показывает границы слоёв. Нумерация слоёв: (1) буферный слой GaSb, (2) AlSb, (3) GaSb (потенциальная яма для дырок), (4) InAs (потенциальная яма для электронов), (5) AlSb. Из работы Binh-Minh Nguyen, Wei Yi, Ramsey Noah, Jacob Thorp, Marko Sokolich, High mobility backgated InAs/GaSb double quantum well grown on GaSb substrate, HRL Laboratories Report, (2014)

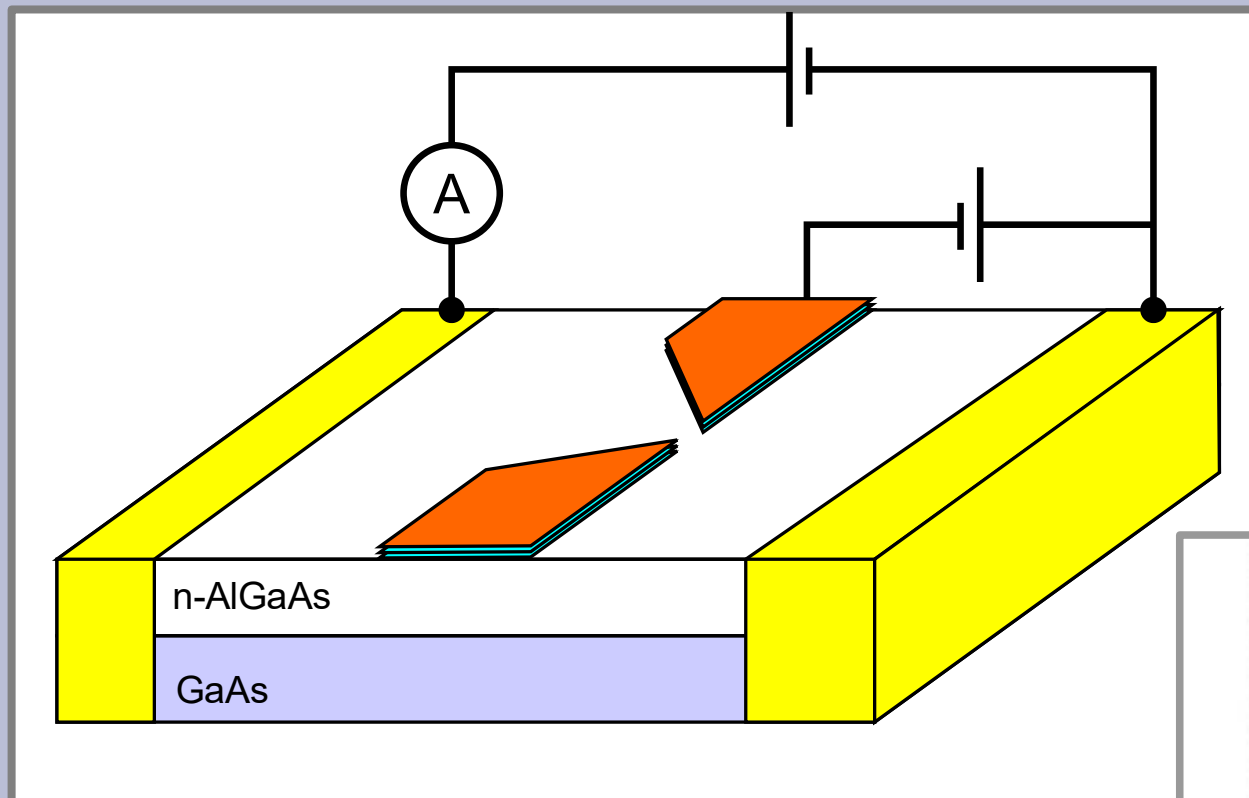
Технологии: Эпитаксиальный рост гетероструктур



Слева: схема
 слой InAs, в
 справа: изо
 гетерострукту
 центрального
 Нумерация с
 дырок), (4) I
 Nguyen, Wei
 InAs/GaSb do

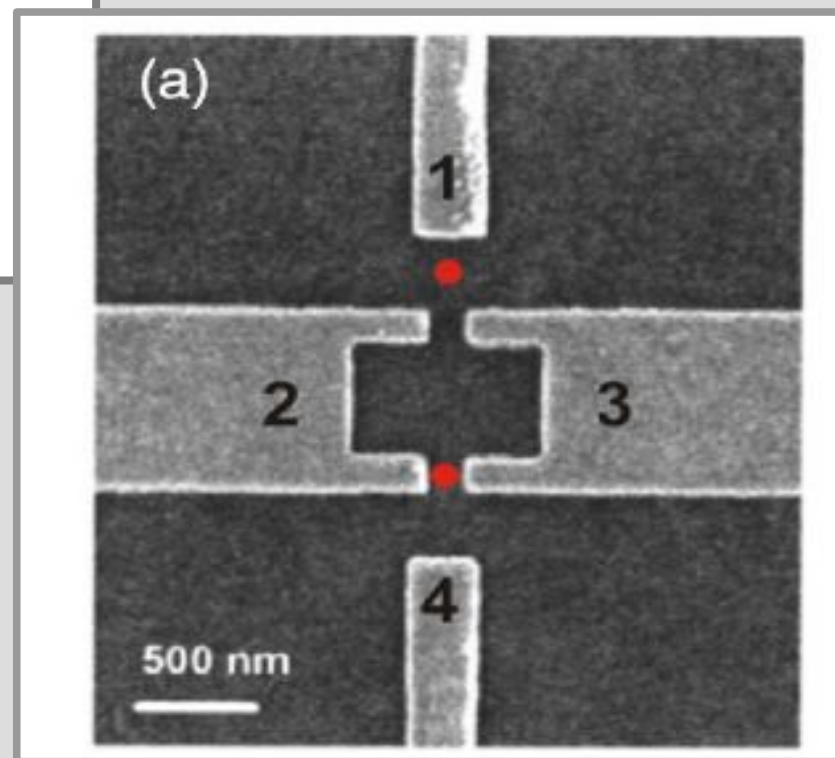
Э.В.Девятов, Основы физики низкоразмерных систем и режима квантового эффекта Холла., 2015

Технологии: «Игра электродов»

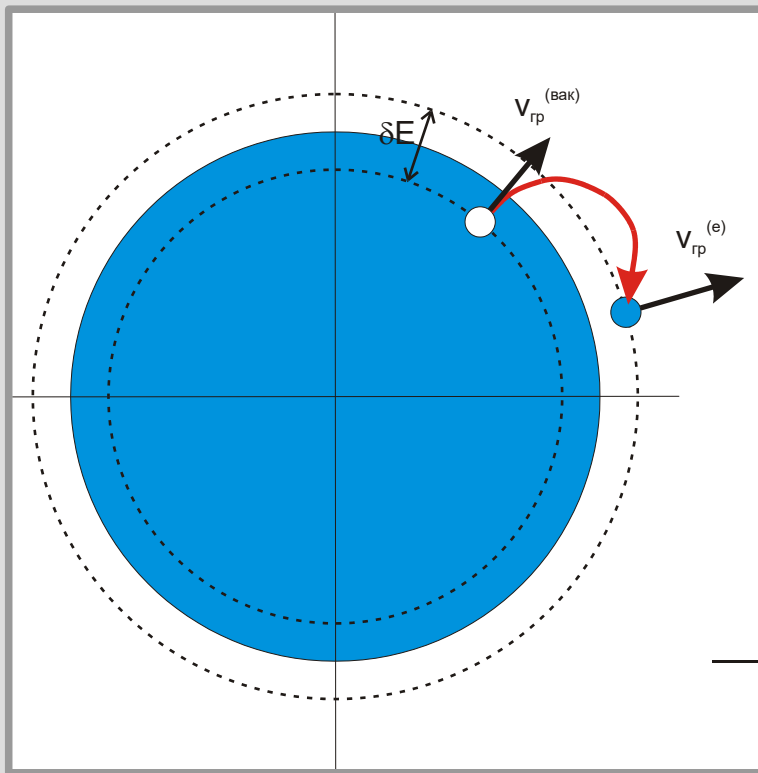


Квантовый микромостик, на основе рис. из книги
В.Я.Демиховского

Электронная микрофотография затворов из работы
A. P. Micolich, What lurks below the last plateau:
experimental studies of the $0.7 \times 2e^2/h$ conductance anomaly
in one-dimensional systems, Journal of Physics: Condensed
Matter, 23, 443201 (2011)



Температура вырождения двумерного электронного газа

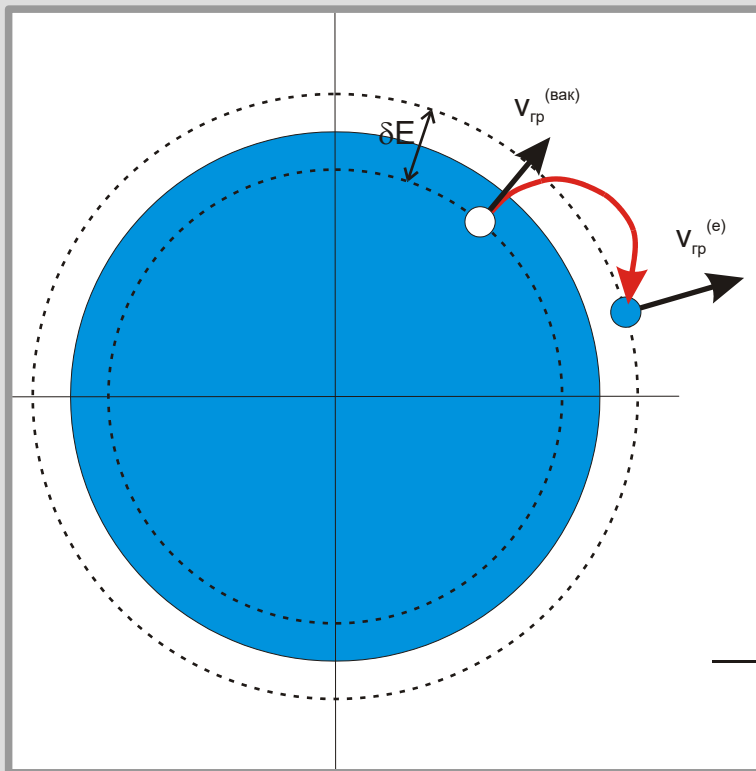


$$\pi k_F^2 = \frac{N}{2} \frac{(2\pi)^2}{S}$$

$$k_F^2 = 2\pi n_S$$

$$E_F = \frac{\pi \hbar^2 n_S}{m^*}$$

Температура вырождения двумерного электронного газа



$$\pi k_F^2 = \frac{N}{2} \frac{(2\pi)^2}{S}$$

$$k_F^2 = 2\pi n_S$$

$$E_F = \frac{\pi \hbar^2 n_S}{m^*}$$

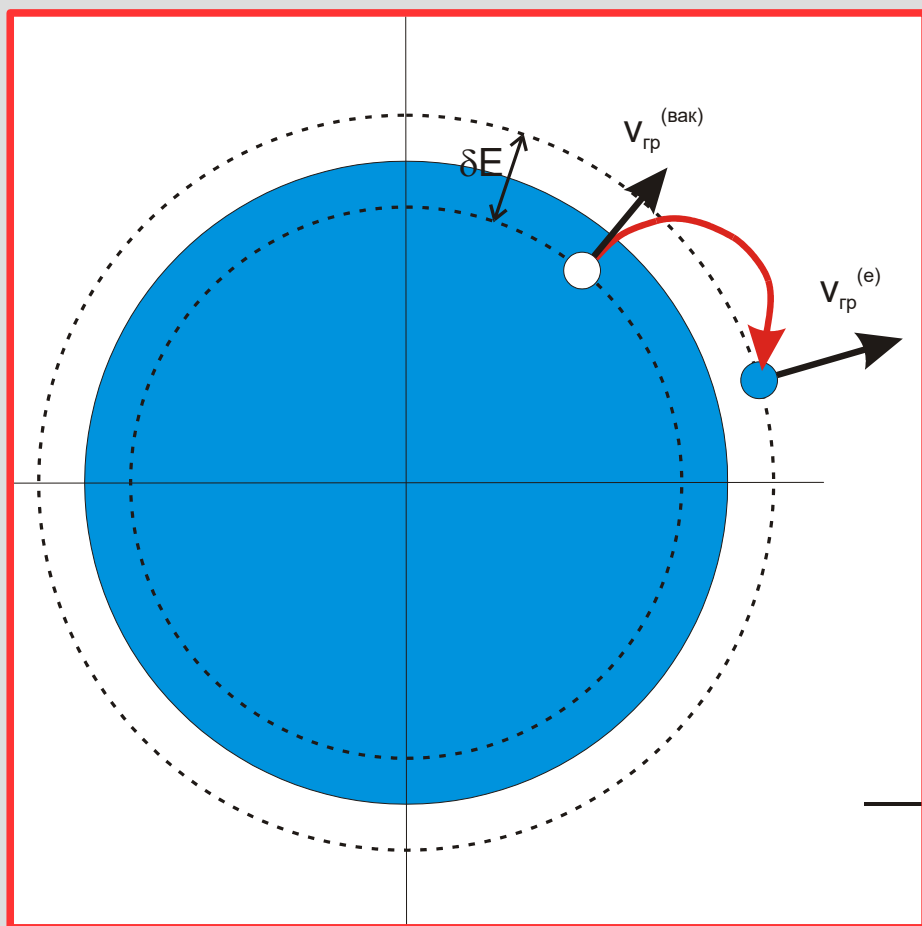
Электроны над гелием (10^9 1/см²)

$$E_F \simeq 20 \text{ мК}$$

Электроны в гетероструктуре
(10^{12} 1/см², $m^* = 0.1m_0$)

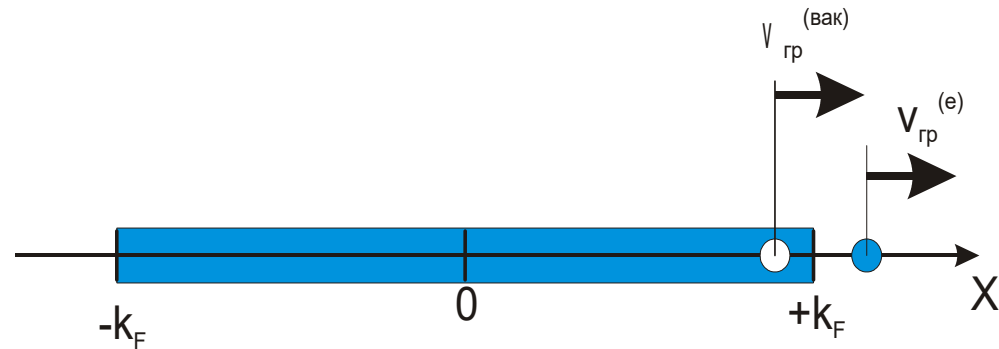
$$E_F \simeq 200 \text{ К}$$

Возбуждения в двумерном газе с взаимодействием.



Одномерные электронные системы. Импульс и энергия Ферми, возбуждения.

$$n = 2 \frac{2k_F}{2\pi}$$
$$k_F = \frac{\pi}{2} n$$
$$\varepsilon_F = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m} n^2$$

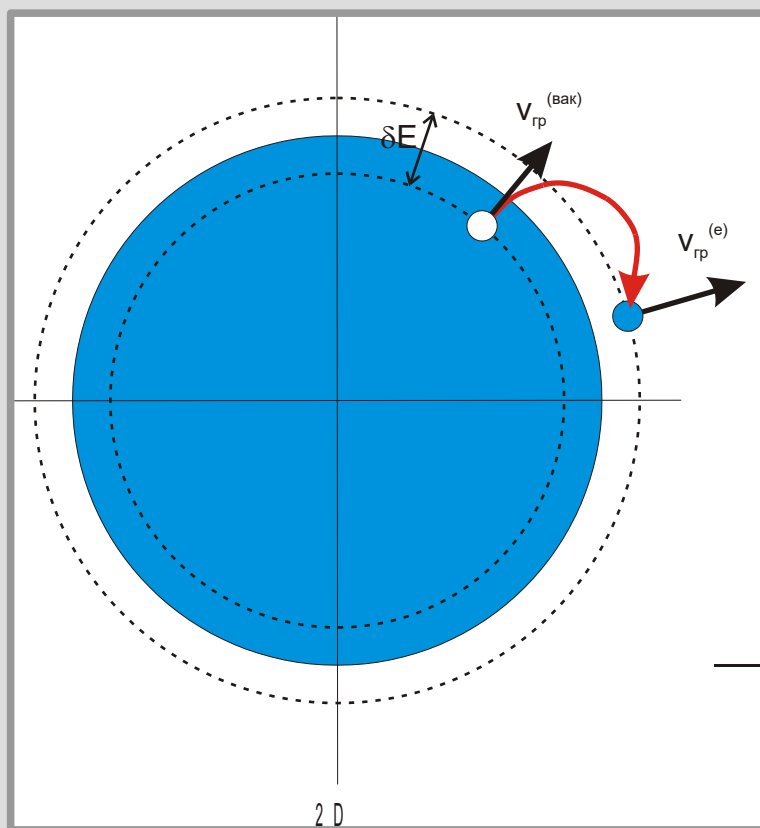


Промежуточный вывод

- можно получать «практически» одномерные и двумерные электронные системы
- для одномерных ферми-систем с взаимодействием заведомо не сработают «обычные» подходы

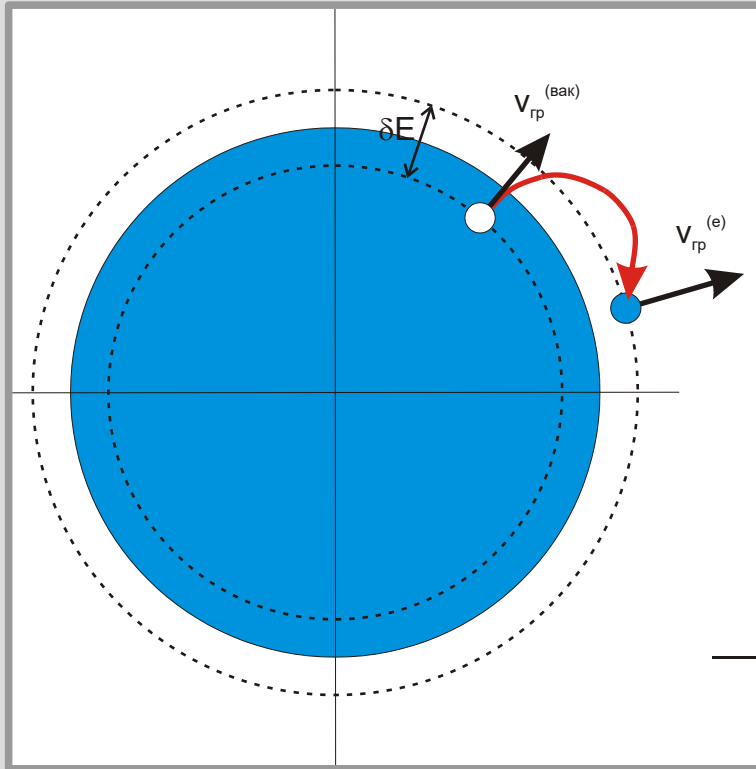
Задача 3. Состояние вигнеровского кристалла в двумерном электронном газе.

Двумерный электронный газ: Роль взаимодействия электронов.



$$\Pi \sim \frac{e^2 \sqrt{n_s}}{\epsilon} \quad \text{vs.} \quad K \simeq \begin{cases} E_F \\ T \end{cases}$$

Двумерный электронный газ: Роль взаимодействия электронов.



$$\Pi \sim \frac{e^2 \sqrt{n_s}}{\epsilon} \quad \text{vs.} \quad K \simeq \begin{cases} E_F \\ T \end{cases}$$

«кристаллизация» при

$$\Gamma = \frac{\Pi}{K} \sim 100 \dots 150$$

$$\zeta(\vec{R}) = \langle (\vec{r}(\vec{R} + \vec{a}) - \vec{r}(\vec{R})) \cdot (\vec{r}(\vec{a}) - \vec{r}(0)) \rangle$$

Холодное и горячее плавление двумерного «кристалла».

$$\Pi \sim \frac{e^2 \sqrt{n_s}}{\varepsilon} \quad \text{vs.} \quad K \simeq \begin{cases} E_F \\ T \end{cases}$$

вырожденный ферми-газ

невырожденный ферми-газ

Холодное и горячее плавление двумерного «кристалла».

$$\Pi \sim \frac{e^2 \sqrt{n_s}}{\varepsilon} \quad \text{vs.} \quad K \simeq \begin{cases} E_F \\ T \end{cases}$$

вырожденный ферми-газ

невырожденный ферми-газ

$$\Gamma = \frac{\Pi}{K} \simeq \frac{e^2 \sqrt{n_s} m^*}{\varepsilon \hbar^2 \pi n_s}$$
$$n_s^{(c)} \simeq \left(\frac{e^2 m^*}{\varepsilon \Gamma \hbar^2} \right)^2 \simeq 10^8 \frac{1}{\text{см}^2}$$

Холодное и горячее плавление двумерного «кристалла».

$$\Pi \sim \frac{e^2 \sqrt{n_s}}{\varepsilon} \quad \text{vs.} \quad K \simeq \begin{cases} E_F \\ T \end{cases}$$

вырожденный ферми-газ

$$\Gamma = \frac{\Pi}{K} \simeq \frac{e^2 \sqrt{n_s} m^*}{\varepsilon \hbar^2 \pi n_s}$$
$$n_s^{(c)} \simeq \left(\frac{e^2 m^*}{\varepsilon \Gamma \hbar^2} \right)^2 \simeq 10^8 \frac{1}{\text{см}^2}$$

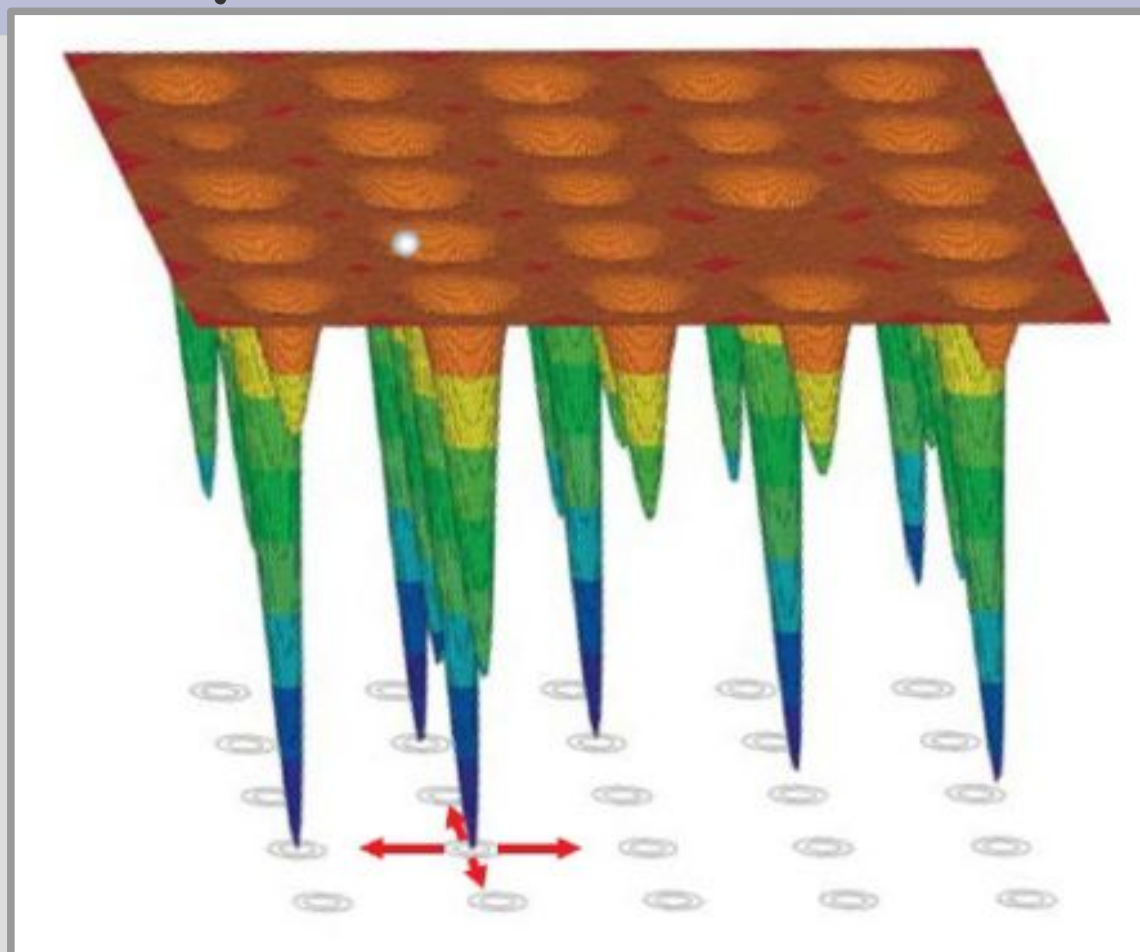
невырожденный ферми-газ

$$\Gamma = \frac{\Pi}{K} \simeq \frac{e^2 \sqrt{n_s}}{k_B T}$$
$$T_c \simeq \frac{e^2 \sqrt{n_s}}{\Gamma k_B} \simeq 1 \text{ К}$$

Промежуточный вывод

- существуют необычные формы упорядочения в низкоразмерных системах

Задача 4. Локализация квазичастиц в случайном потенциале.



Схематическое представление случайной модуляции потенциала для электрона в кристалле.

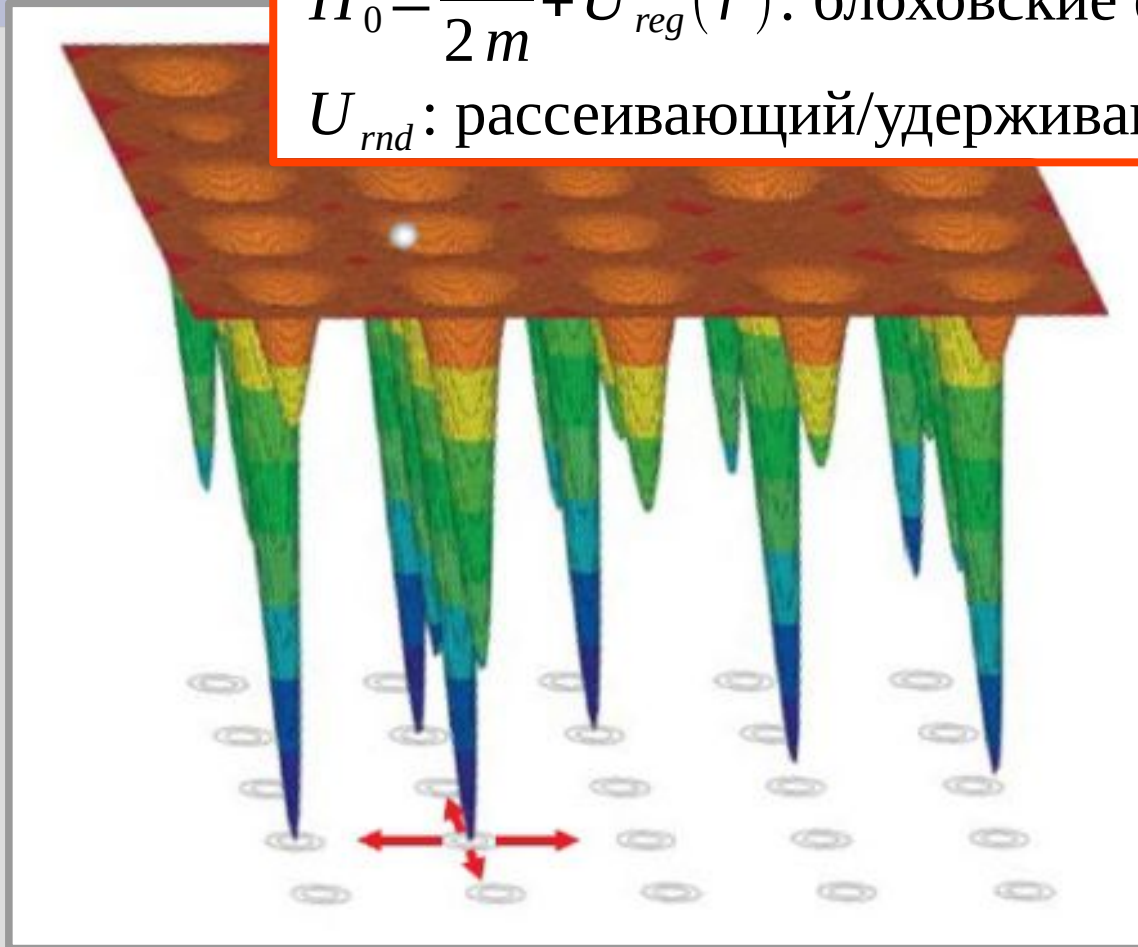
Из статьи Ad Lagendijk, Bart van Tiggelen and Diederik S. Wiersma, Fifty years of Anderson localization, Physics Today, 62, 24 (2009)

Задача 4. Периодический потенциал случайная модюляция

$$U(\vec{r}) = U_{reg}(\vec{r}) + U_{rnd}(\vec{r})$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U_{reg}(\vec{r}): \text{блоховские функции}$$

U_{rnd} : рассеивающий/удерживающий потенциал



Схематическое представление случайной модуляции потенциала для электрона в кристалле.

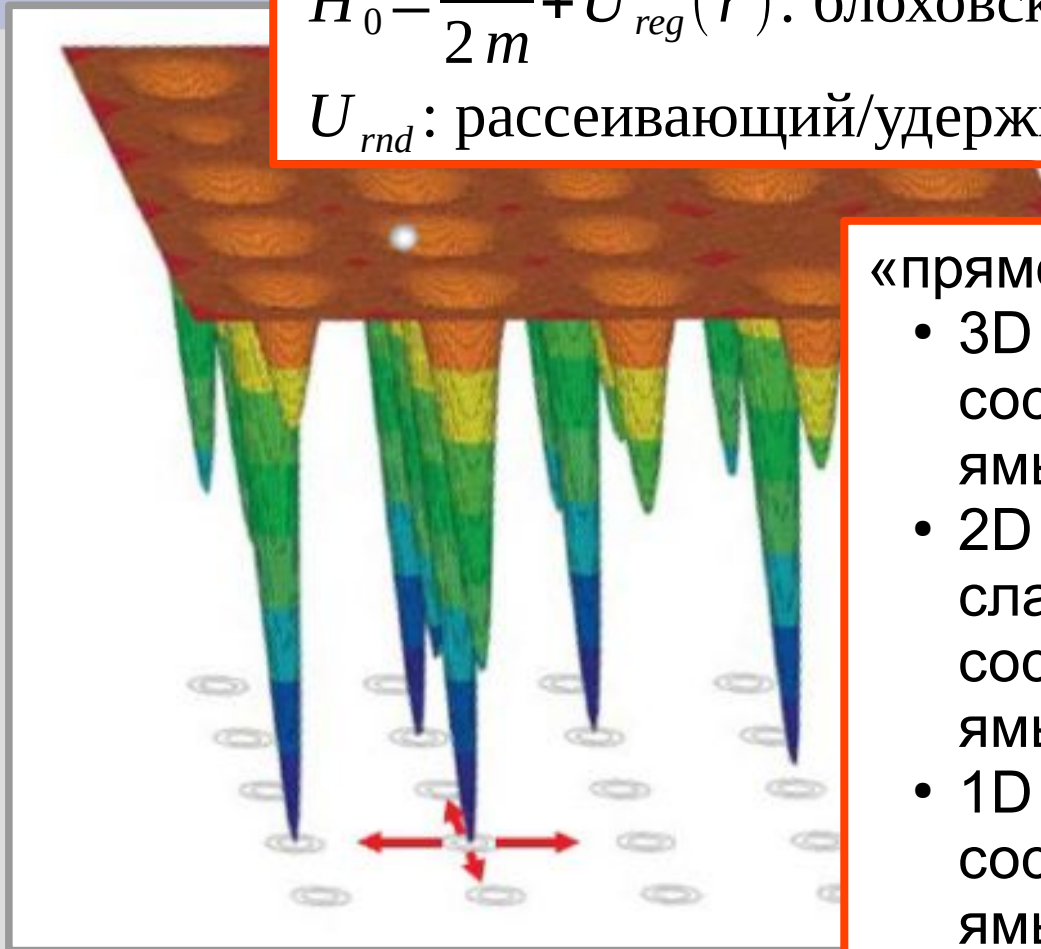
Из статьи Ad Lagendijk, Bart van Tiggelen and Diederik S. Wiersma, Fifty years of Anderson localization, Physics Today, 62, 24 (2009)

Задача 4. Диффузия в случайном потенциале

$$U(\vec{r}) = U_{reg}(\vec{r}) + U_{rnd}(\vec{r})$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U_{reg}(\vec{r}): \text{блховские функции}$$

U_{rnd} : рассеивающий/удерживающий потенциал



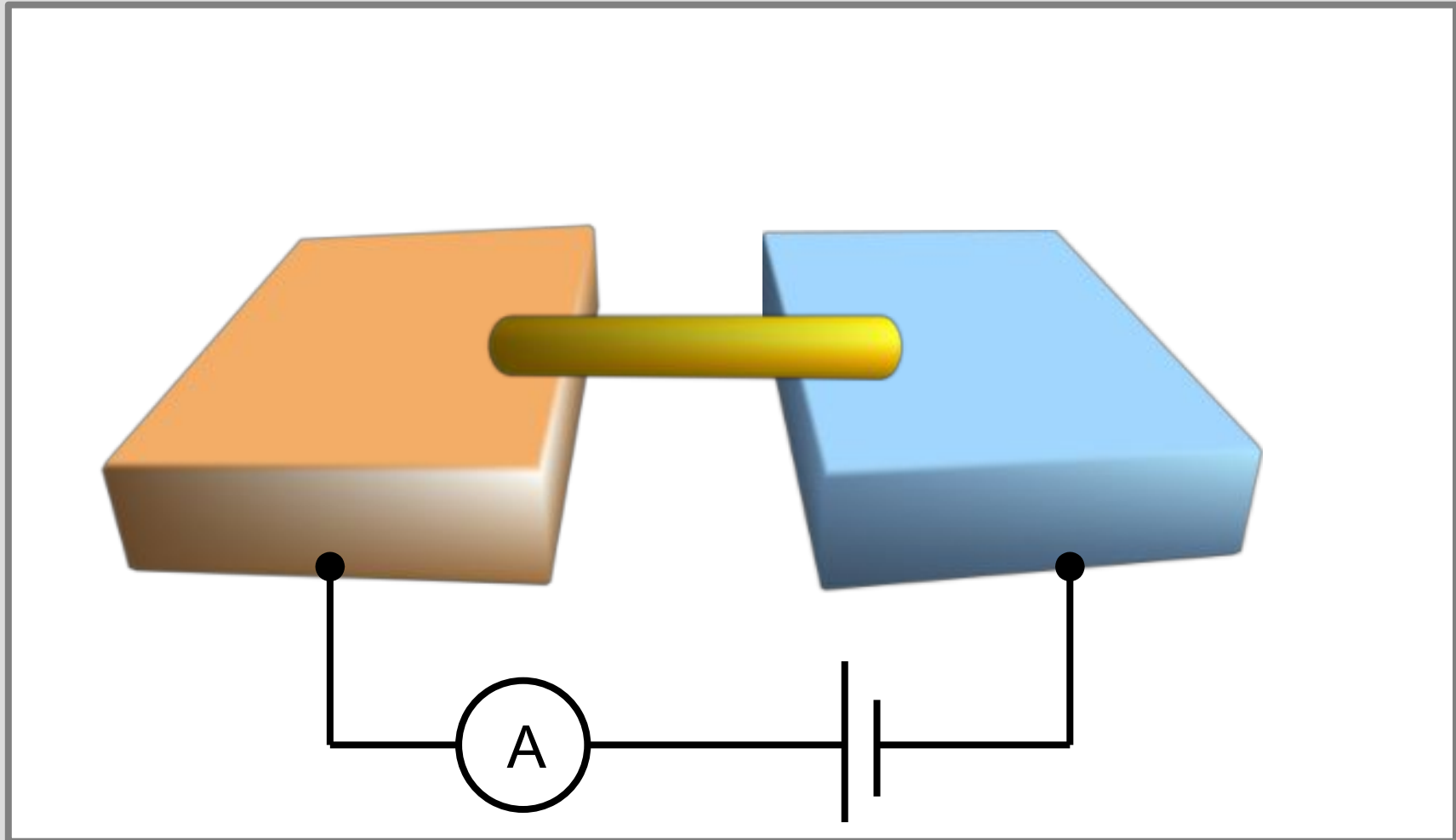
«прямоугольные ямы»:

- 3D — связанное состояние для мощной ямы
- 2D — экспоненциально слабо связанное состояние для любой ямы
- 1D — связанное состояние для любой ямы

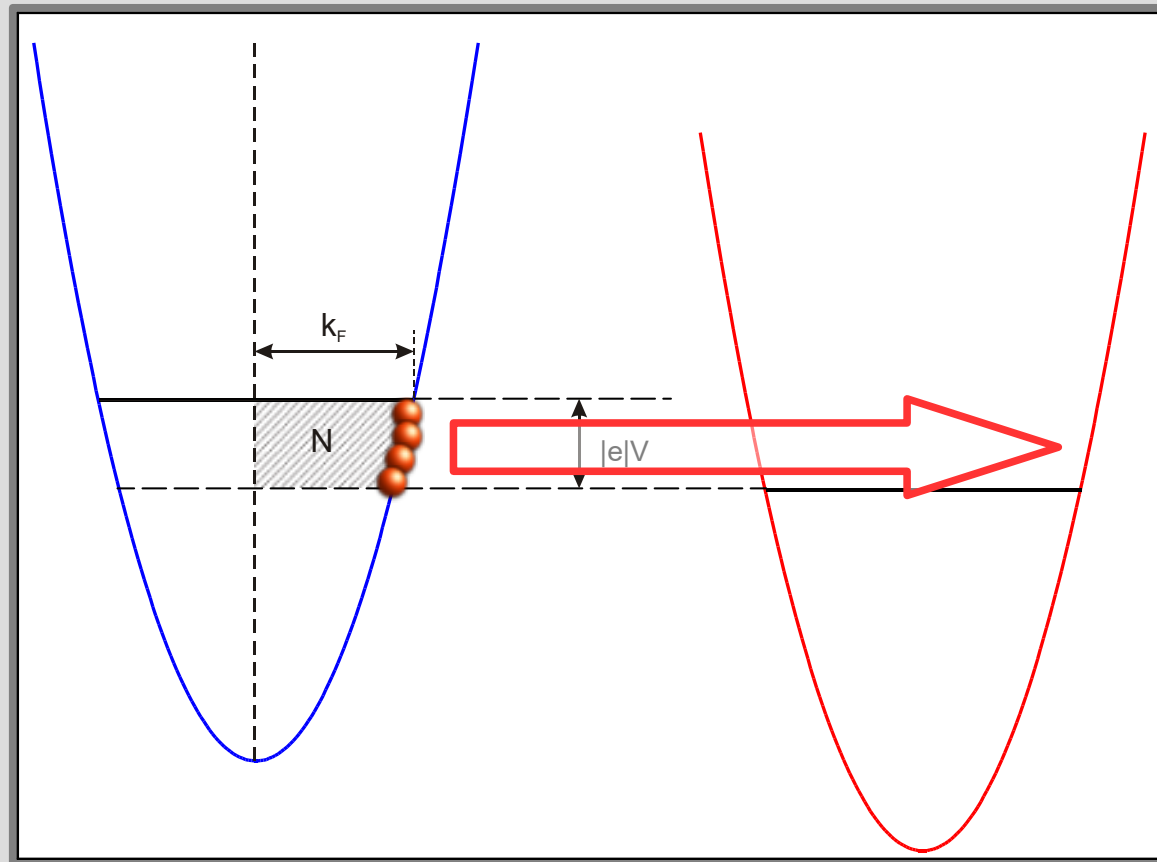
Схематическое представление случайной модуляции потенциала для электрона в кристалле.

Из статьи Ad Lagendijk, Bart van Tiggelen and Diederik S. Wiersma, Fifty years of Anderson localization, Physics Today, 62, 24 (2009)

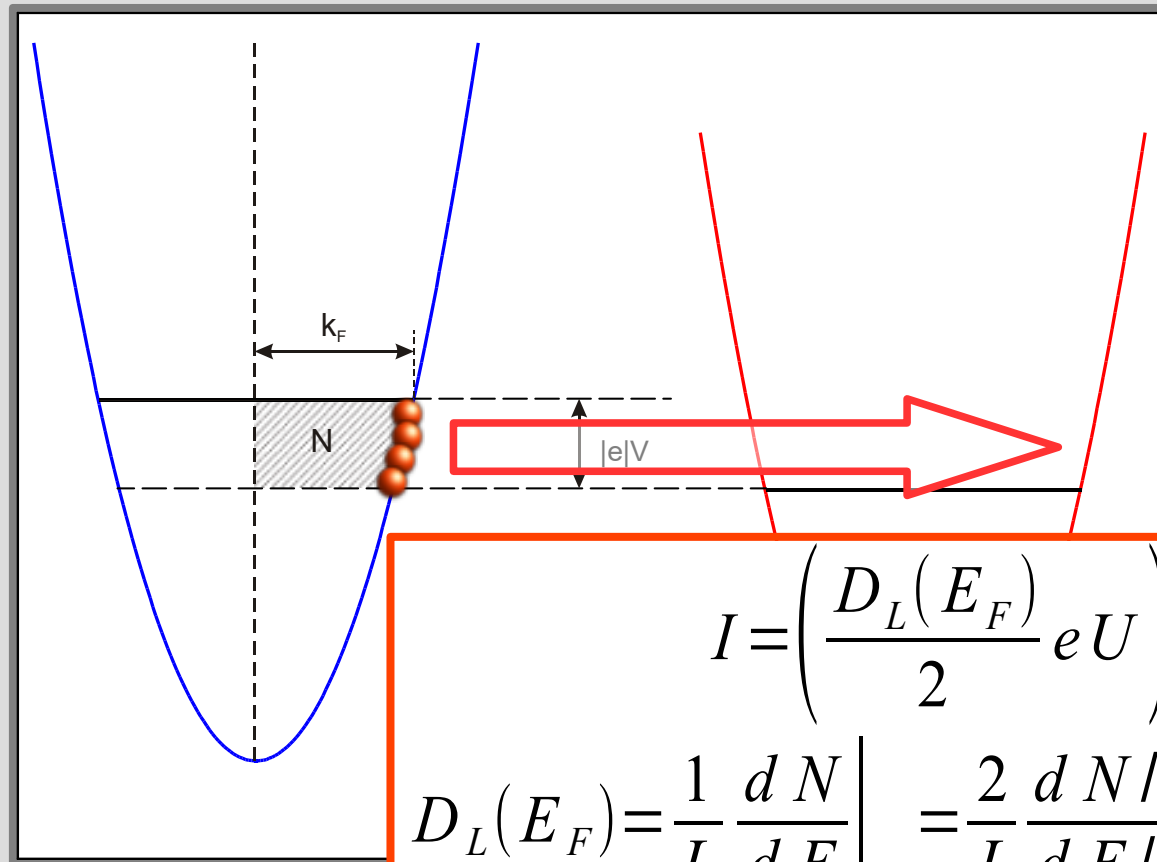
Задача 5. Квантование проводимости одномерного проводника в баллистическом режиме.



Квантование проводимости одномерного проводника в баллистическом режиме.

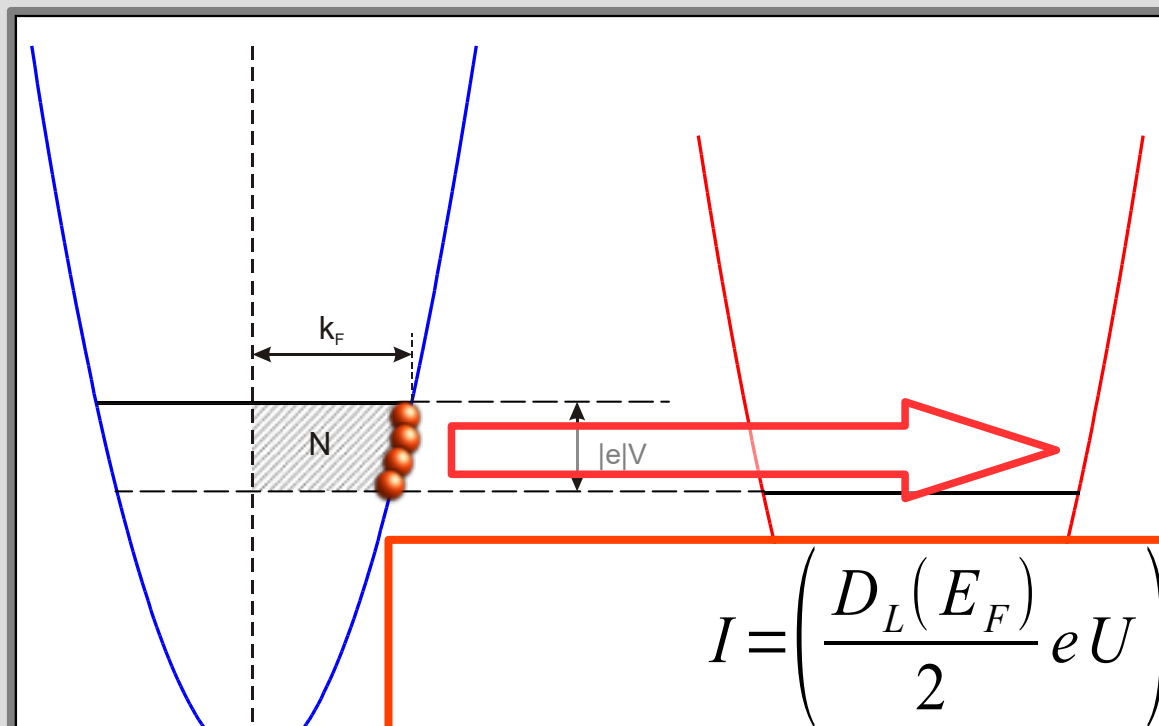


Квантование проводимости одномерного проводника в баллистическом режиме.



$$I = \left(\frac{D_L(E_F)}{2} eU \right) eV_F$$
$$D_L(E_F) = \frac{1}{L} \frac{dN}{dE} \Big|_{E_F} = \frac{2}{L} \frac{dN/dk}{dE/dk} = \frac{2 \times 2l(2\pi)}{\hbar V_F}$$
$$I = \frac{e^2}{\pi \hbar} U$$

Квантование проводимости одномерного проводника в баллистическом режиме.



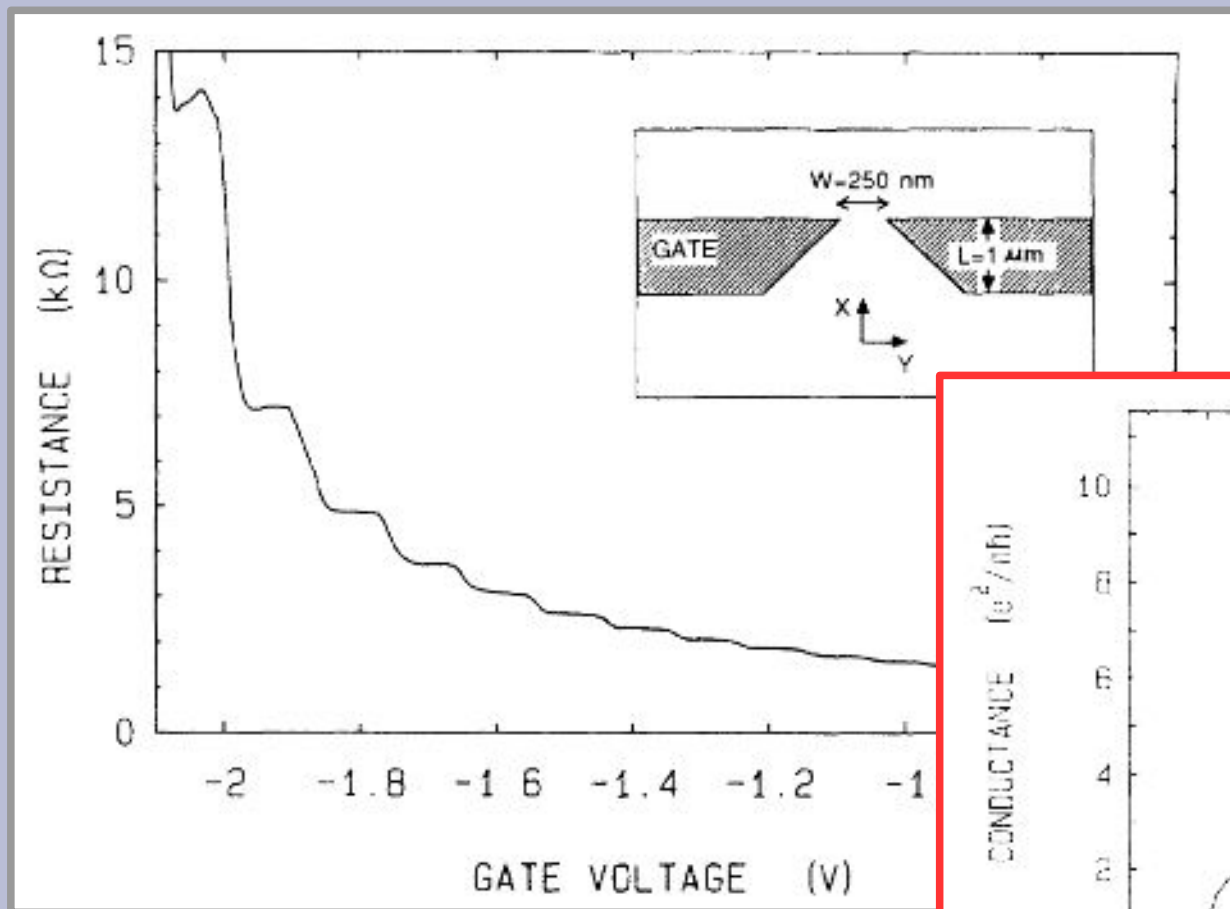
$$R = \frac{h}{2e^2} = \frac{1}{2G_0} \approx 12.9 \text{ кОм}$$

$$D_L(E_F) = \frac{1}{L} \frac{dN}{dE} \Big|_{E_F} = \frac{2}{L} \frac{dN/dk}{dE/dk} = \frac{2 \times 2l(2\pi)}{\hbar V_F}$$

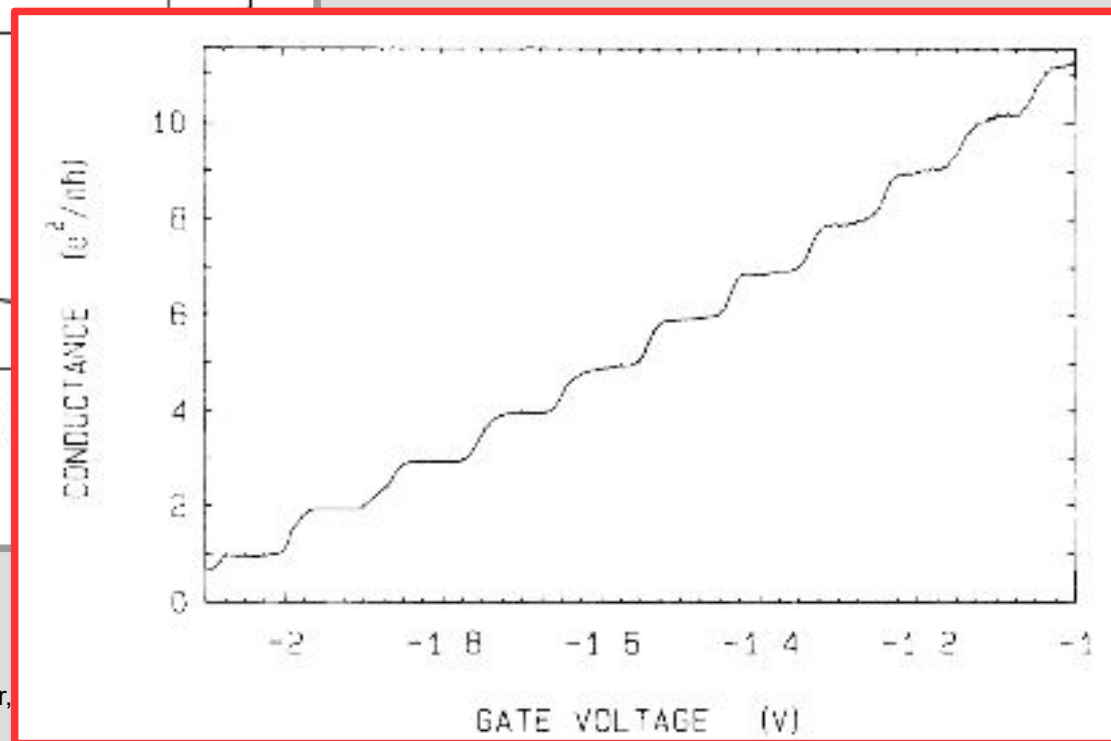
$$I = \frac{e^2}{\pi \hbar} U$$

$$I = \left(\frac{D_L(E_F)}{2} eU \right) eV_F$$

Проводимость одномерного проводника: эксперимент.



эффективная ширина
канала 0...360 нм,



Слева: зависимость сопротивления точечного контакта от напряжения на затворе, на вставке показана схема точечного контакта. Справа: квантование проводимости как функция напряжения на затворе. Температура опыта 0.6К. В. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C. T. Foxon, Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas, Physical Review Letters, 60, 848(1988)

Промежуточный вывод

- Некоторые из наблюдаемых явлений могут иметь метрологическую ценность: измеряемые величины зависят только от фундаментальных констант.

Часть 2: Двумерные электроны в
квантующем магнитном поле.
Квантовый эффект Холла.

Шаг 1. Тензор проводимости и тензор сопротивления в магнитном поле.

Классический эффект Холла.

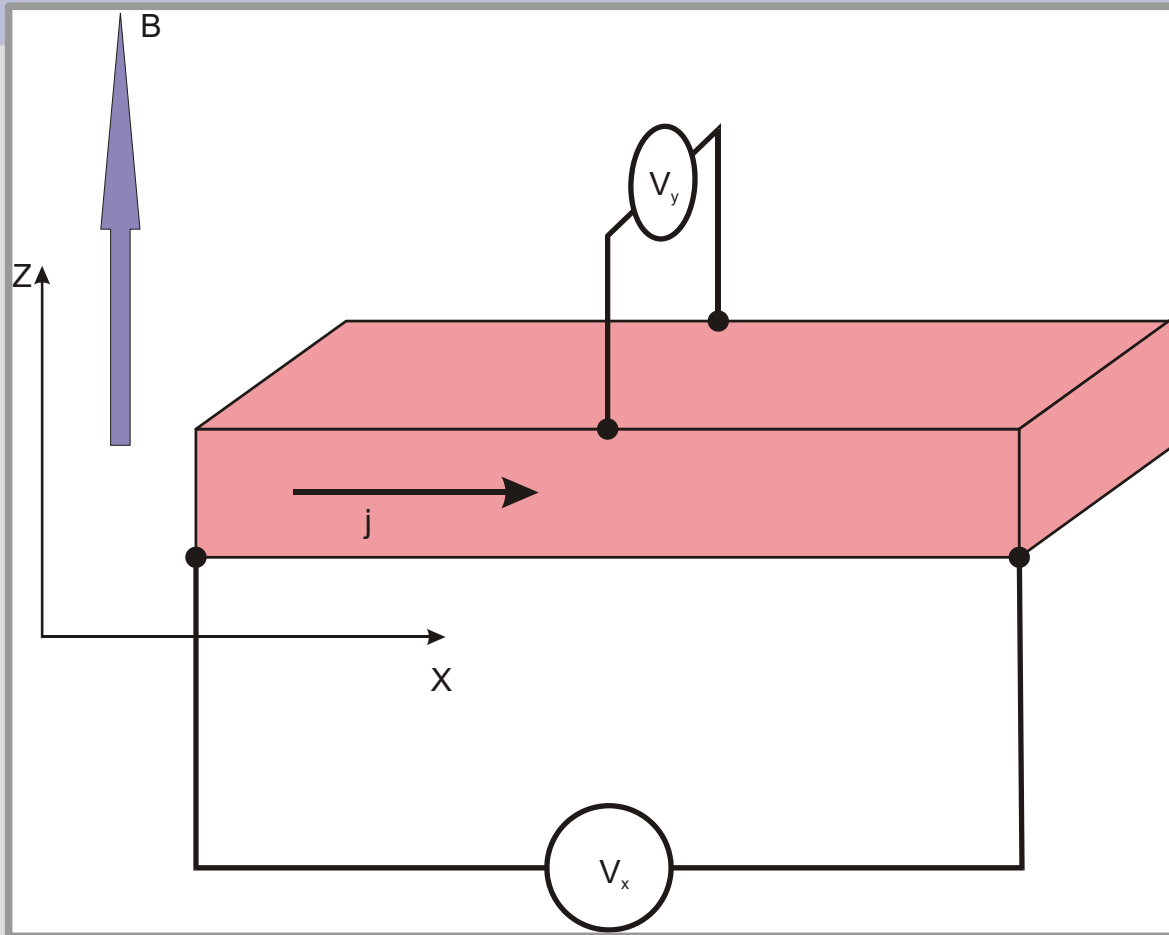


Схема опыта по измерению эффекта Холла.

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = q \vec{E} + \frac{q}{c} \vec{V} \times \vec{B}$$

$$\vec{V}_{\text{др}} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V}_{\text{др}} \times \vec{B} \right) \frac{\tau}{m}$$

Тензор проводимости и сопротивления.

$$\vec{V}_{dp} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V}_{dp} \times \vec{B} \right) \frac{\tau}{m}$$

$$\vec{j} = ne \vec{V}_d = \frac{ne^2 \tau}{m} \vec{E} + \frac{e \tau}{mc} \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \sigma_0 \vec{E} + \omega_c \tau \begin{pmatrix} j_y \\ -j_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E} \quad \vec{E} = \hat{\rho} \vec{j}$$

$$\sigma_0 = \frac{ne^2 \tau}{m}$$

$$\omega_c = \frac{eB}{mc}$$

Тензор проводимости и сопротивления.

$$\vec{V}_{dp} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V}_{dp} \times \vec{B} \right) \frac{\tau}{m}$$

$$\vec{j} = ne \vec{V}_d = \frac{ne^2 \tau}{m} \vec{E} + \frac{e \tau}{mc} \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \sigma_0 \vec{E} + \omega_c \tau \begin{pmatrix} j_y \\ -j_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E} \quad \vec{E} = \hat{\rho} \vec{j}$$

$$\sigma_0 = \frac{ne^2 \tau}{m}$$

$$\omega_c = \frac{eB}{mc}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}$$

Тензор проводимости и сопротивления.

$$\vec{V}_{dp} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V}_{dp} \times \vec{B} \right) \frac{\tau}{m}$$

$$\vec{j} = ne \vec{V}_d = \frac{ne^2 \tau}{m} \vec{E} + \frac{e \tau}{mc} \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \sigma_0 \vec{E} + \omega_c \tau \begin{pmatrix} j_y \\ -j_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E} \quad \vec{E} = \hat{\rho} \vec{j}$$

$$\sigma_0 = \frac{ne^2 \tau}{m}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}$$

Тензор проводимости и сопротивления.

$$\vec{V}_{dp} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V}_{dp} \times \vec{B} \right) \frac{\tau}{m}$$

$$\vec{j} = ne \vec{V}_d = \frac{ne^2 \tau}{m} \vec{E} + \frac{e \tau}{mc} \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \sigma_0 \vec{E} + \omega_c \tau \begin{pmatrix} j_y \\ -j_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E} \quad \vec{E} = \hat{\rho} \vec{j}$$

$$\sigma_0 = \frac{ne^2 \tau}{m}$$

$$\omega_c = \frac{eB}{mc}$$

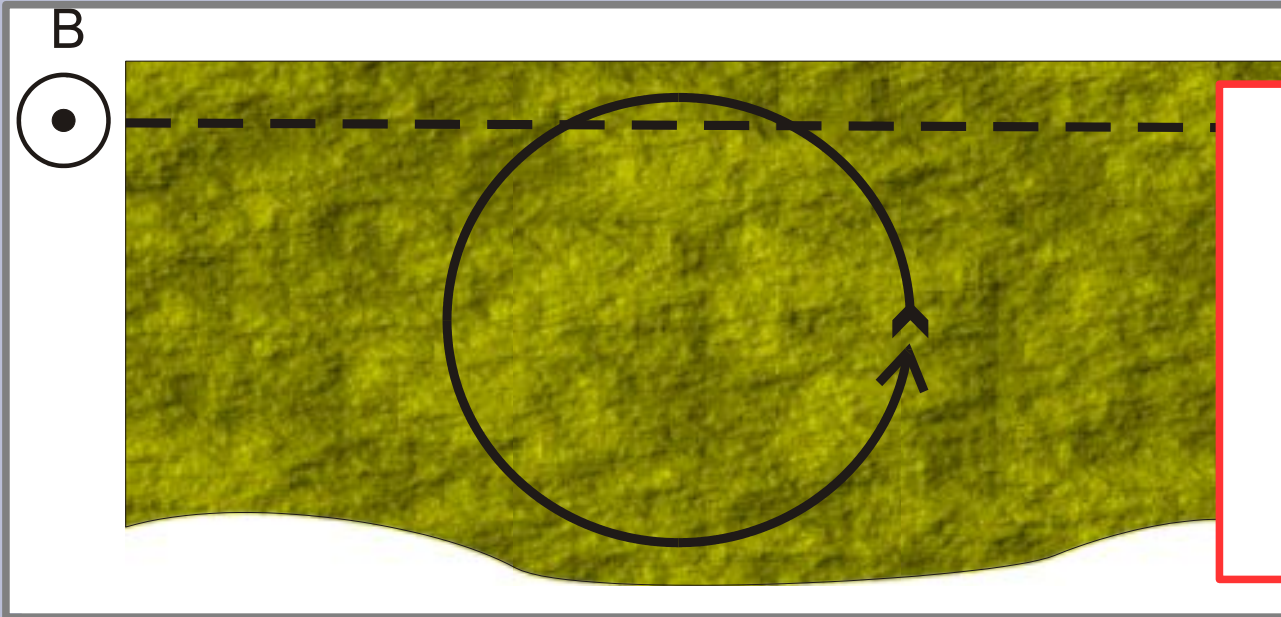
$$\hat{\rho} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma_0}{(\sigma_0^2 + \omega_c^2 \tau^2)} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_H = \frac{\omega_c \tau}{\sigma_0} = \frac{B}{nec}$$

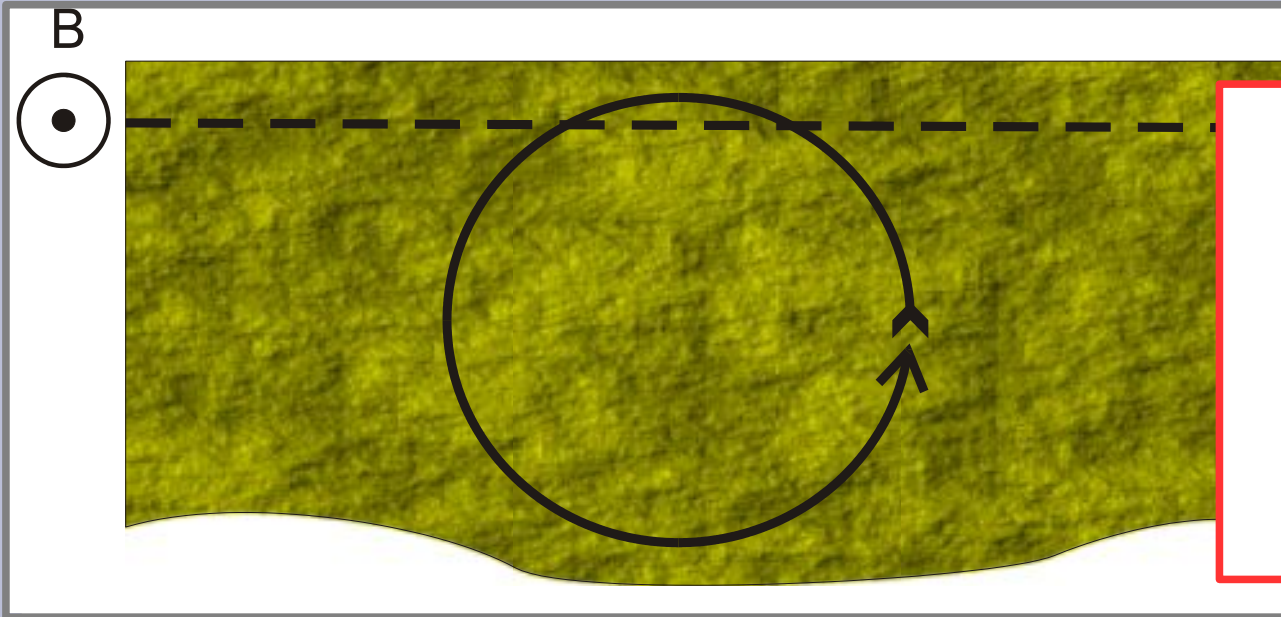
Шаг 2. Квантование движения двумерного электрона в магнитном поле. Уровни Ландау.

Циклотронное движение свободного эдектрона



$$m \omega^2 R = \frac{e}{c} \omega R B$$
$$\omega_c = \frac{e B}{m c}$$

Циклотронное движение свободного эдектрона



$$m \omega^2 R = \frac{e}{c} \omega R B$$
$$\omega_c = \frac{e B}{m c}$$

$$\oint \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) d \vec{l} = n h$$

$$2 \pi r m \omega_c r - \frac{e}{c} B \pi r^2 = n h$$

$$\pi \frac{e B}{c} r^2 = n h \Rightarrow r_n^2 = \frac{2 n \hbar c}{e B} \Rightarrow E_n = \frac{p^2}{2 m} = \frac{m}{2} \omega_c^2 r_n^2 = n \hbar \omega_c$$

Уровни Ландау в двумерном случае. Строгий результат.

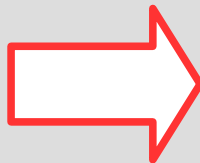
$$\vec{A} = (0, Bx, 0)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\hat{p}_x^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{e}{c} B \hat{x} \right)^2 \right) \Psi(x, y) = E \Psi(x, y)$$

$$\Psi(x, y) = e^{ik_y y} \psi(x)$$

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$$

$$x_0 = \frac{\hbar c k_y}{eB} = l_B^2 k_y$$



$$-\psi'' + \frac{(x-x_0)^2}{l_B^4} \psi = \varepsilon \psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + \frac{e^2 B^2}{m c^2} \frac{(x-x_0)^2}{2} \psi = E \psi$$

Уровни Ландау в двумерном случае. Строгий результат.

$$\vec{A} = (0, \dots)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\hat{p}_x^2 + \dots \right)$$

эквивалентная задача о гармоническом осцилляторе

x_0 — координата ведущего центра

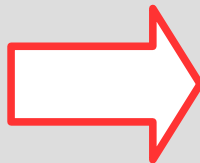
l_B — магнитная длина (в 10 Тл 80 Å)

$$\omega_c = \frac{e B}{m c}, \quad E_n = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\Psi(x, y)$$

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{e B}}$$

$$x_0 = \frac{\hbar c k_y}{e B} = l_B^2 k_y$$



$$-\psi'' + \frac{(x-x_0)^2}{l_B^4} \psi = \varepsilon \psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + \frac{e^2 B^2}{m c^2} \frac{(x-x_0)^2}{2} \psi = E \psi$$

Уровни Ландау в двумерном случае. Строгий результат.

$$\vec{A} = (0, \dots)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\hat{p}_x^2 + \dots \right)$$

эквивалентная задача о гармоническом осцилляторе

x_0 — координата ведущего центра

l_B — магнитная длина (в 10 Тл 80 Å)

$$\omega_c = \frac{e B}{m c}, \quad E_n = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\Psi(x, y)$$

в поле 10 Тл

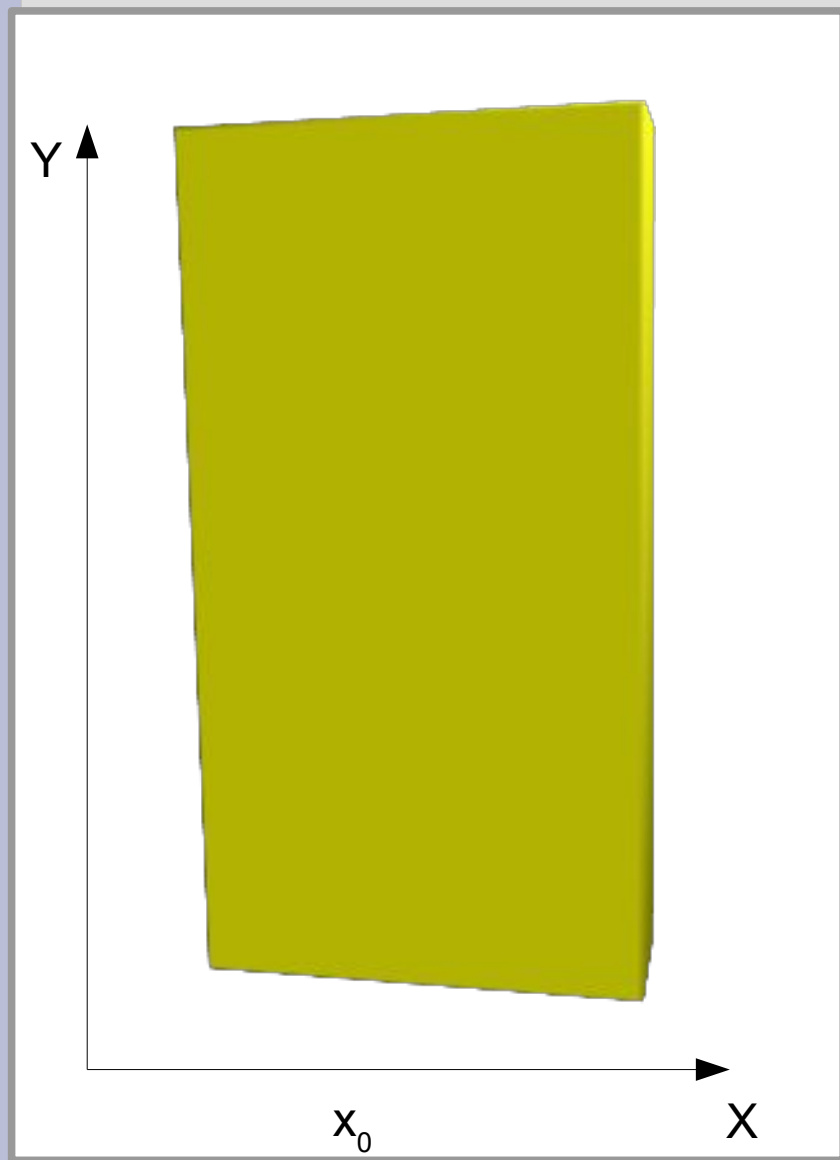
$$\frac{\hbar \omega_c}{k_B} \simeq 10 \text{ К}$$

$$-\psi'' + \frac{(x-x_0)^2}{l_B^4} \psi = \varepsilon \psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + \frac{e^2 B^2}{m c^2} \frac{(x-x_0)^2}{2} \psi = E \psi$$

Шаг 3. Кратность вырождения (ёмкость) уровней Ландау.

Уровни Ландау в двумерном случае: кратность вырождения.

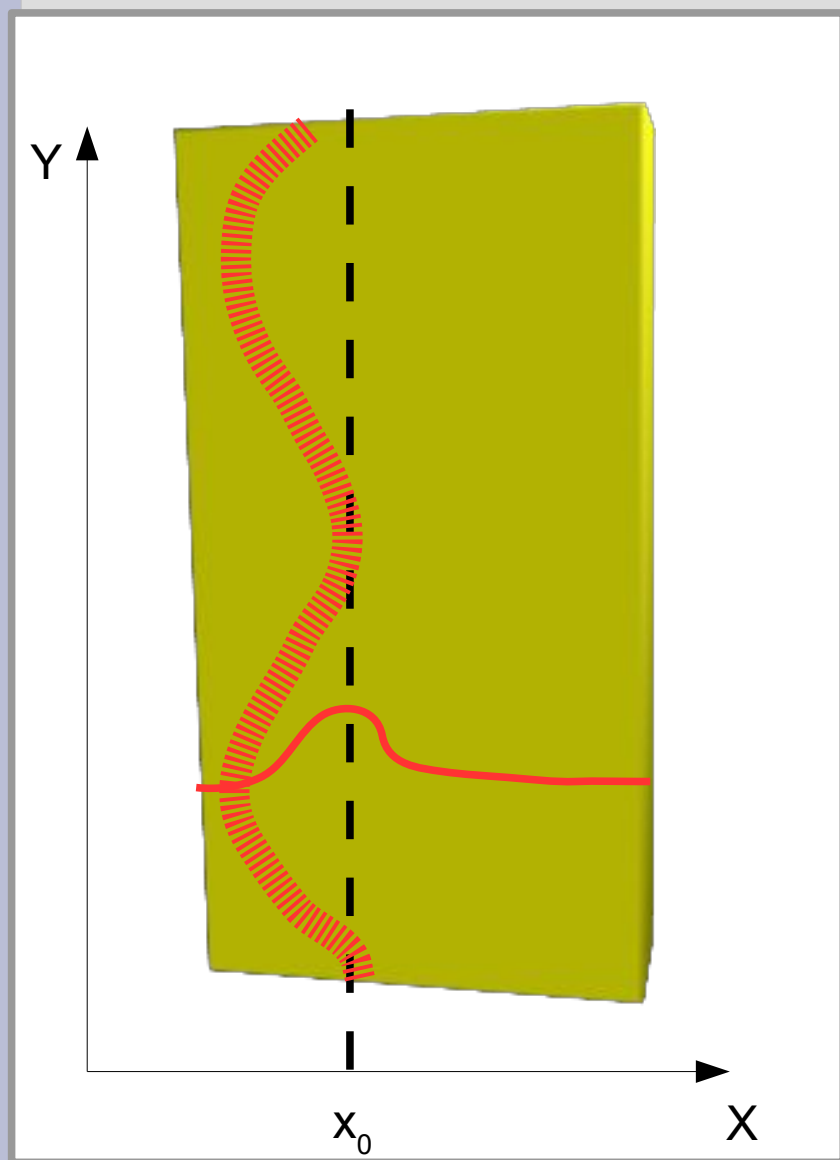


$$\Psi(x, y) = e^{ik_y y} \psi(x)$$

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{e B}}$$

$$x_0 = \frac{\hbar c k_y}{e B} = l_B^2 k_y$$

Уровни Ландау в двумерном случае: кратность вырождения.

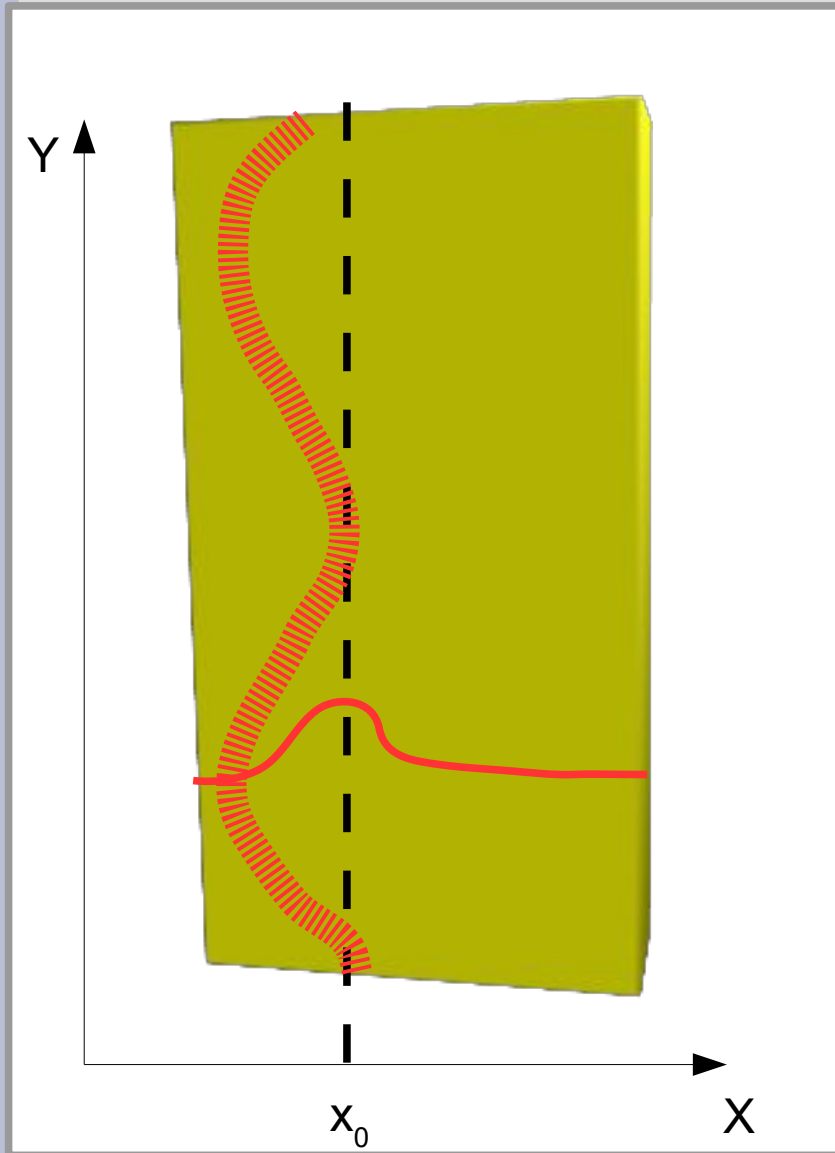


$$\Psi(x, y) = e^{ik_y y} \psi(x)$$

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{e B}}$$

$$x_0 = \frac{\hbar c k_y}{e B} = l_B^2 k_y$$

Уровни Ландау в двумерном случае: кратность вырождения.



$$\Psi(x, y) = e^{ik_y y} \psi(x)$$

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{e B}}$$

$$x_0 = \frac{\hbar c k_y}{e B} = l_B^2 k_y$$

$$0 < x_0 < L_x$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} N$$

$$N_{max} = \frac{e B}{\hbar c} L_x L_y = \frac{1}{2\pi} \frac{S}{l_B^2}$$

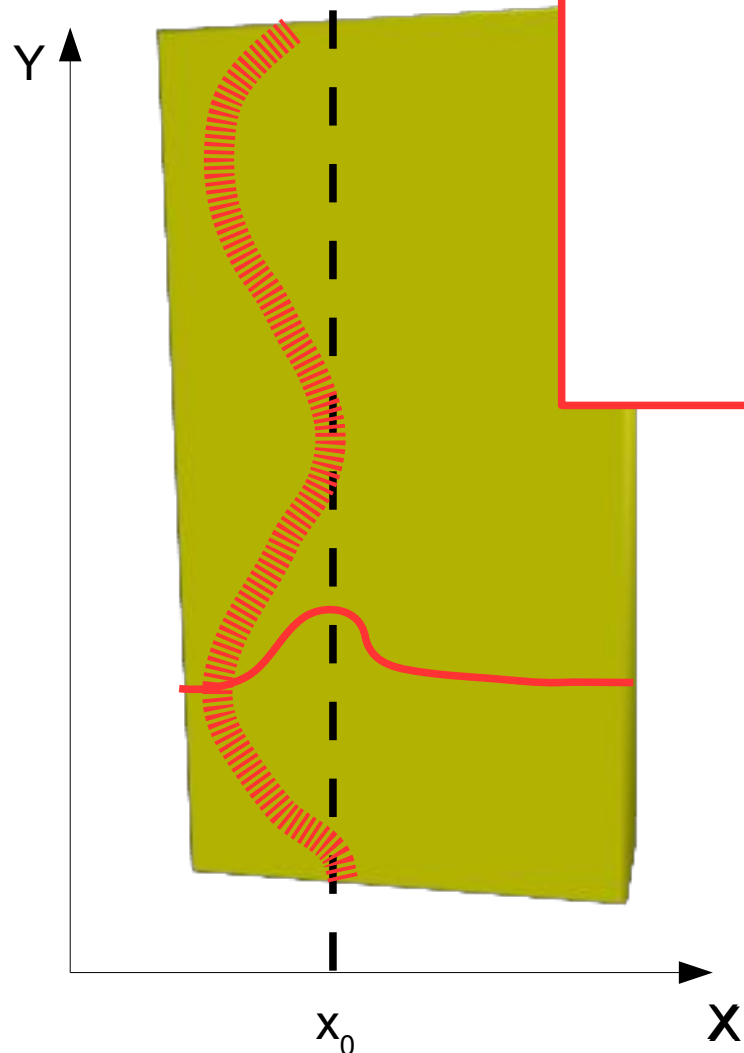
Уровни Ландау в двумерном случае:

без учёта спинового вырождения!

$$n_0 = \frac{1}{2\pi l_B^2} = \frac{eB}{hc} = \frac{B}{2\Phi_0}$$

$$\Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e} = 2.05 \cdot 10^{-7} \text{ Э} \cdot \text{см}^2$$

$$n_0(10 \text{ Тл}) \approx 5 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{см}^2}$$



eB

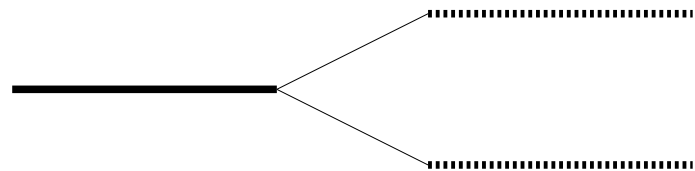
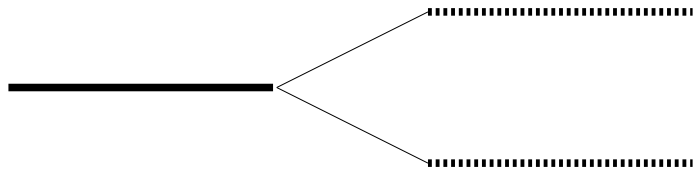
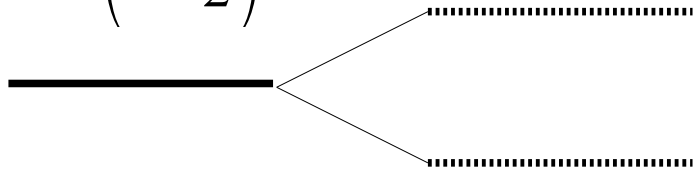
$$0 < x_0 < L_x$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} N$$

$$N_{max} = \frac{eB}{hc} L_x L_y = \frac{1}{2\pi} \frac{S}{l_B^2}$$

Спиновые подуровни уровней Ландау.

$$\hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)$$



$$E_{n, \pm} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2} g \mu_B B$$

$$\omega_c = \frac{e B}{m c}, \mu_B = \frac{e \hbar}{2 m c}$$

Шаг 4. Заполнение уровней Ландау и квантовый эффект Холла.

Положение химпотенциала при заполнении уровней Ландау в двумерном случае.

$$n_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_B^2} = \frac{eB}{hc}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Положение химпотенциала при заполнении уровней Ландау в двумерном случае.

.....

.....

.....

.....



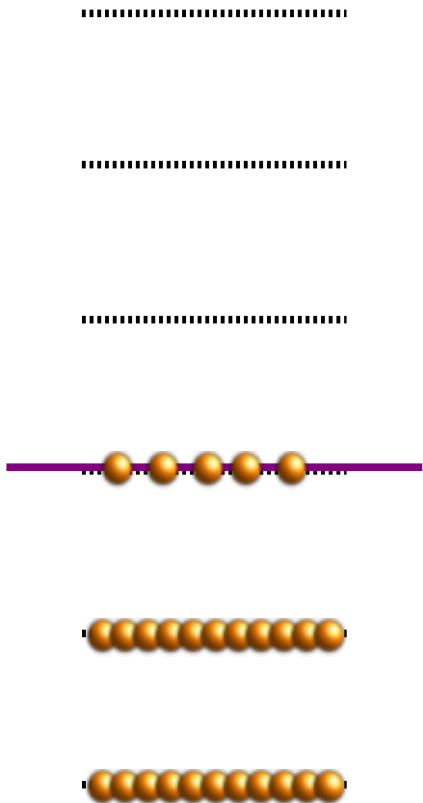
$$n_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_B^2} = \frac{eB}{hc}$$

Вариант 1:
Полностью заполнено
несколько уровней.

Положение химпотенциала при заполнении уровней Ландау в двумерном случае.

$$n_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_B^2} = \frac{eB}{hc}$$

Вариант 2:
Один уровень частично
заполнен.



Холловское сопротивление при полном заполнении уровней Ландау

.....

.....

.....

.....



$$n_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_B^2} = \frac{eB}{hc}$$

$$\vec{E} = \hat{\rho} \vec{j}$$
$$\rho_H = \frac{B}{nec}$$

Холловское сопротивление при полном заполнении уровней Ландау

.....

.....

.....

.....



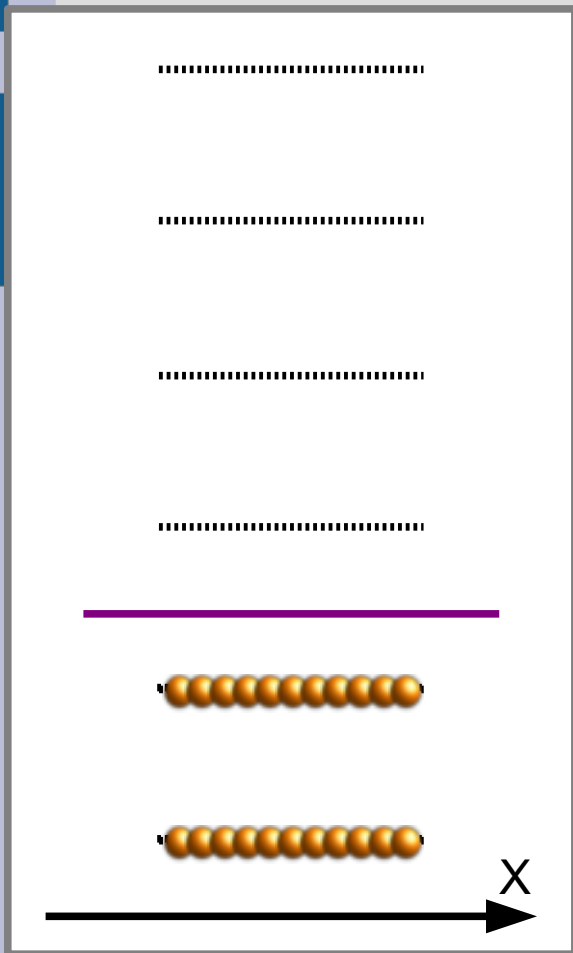
$$n_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_B^2} = \frac{eB}{hc}$$

$$\vec{E} = \hat{\rho} \vec{j}$$
$$\rho_H = \frac{B}{ne c}$$



$$n = N n_0 \Rightarrow \rho_H^{(2D)} = \frac{1}{N} \frac{h}{e^2}$$

Холловское сопротивление при полном заполнении уровней Ландау



$$n_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_B^2} = \frac{eB}{hc}$$

$$\vec{E} = \hat{\rho} \vec{j}$$
$$\rho_H = \frac{B}{nec}$$

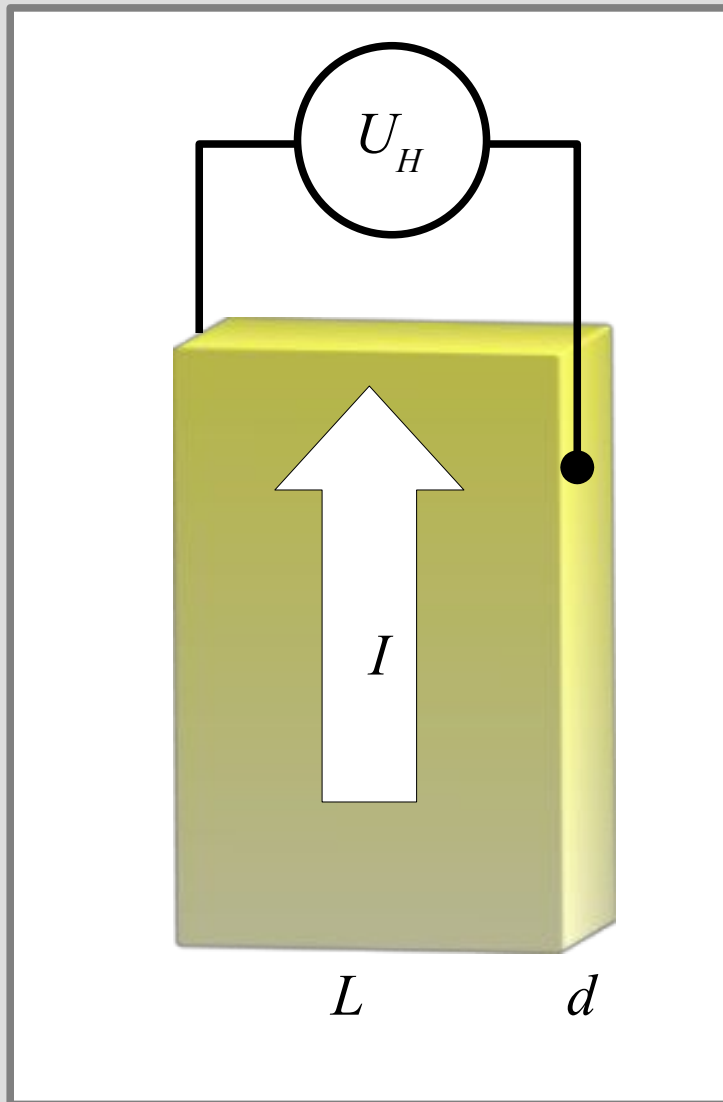


$$n = N n_0 \Rightarrow \rho_H^{(2D)} = \frac{1}{N} \frac{h}{e^2}$$

$$\sigma_{xx} = 0$$

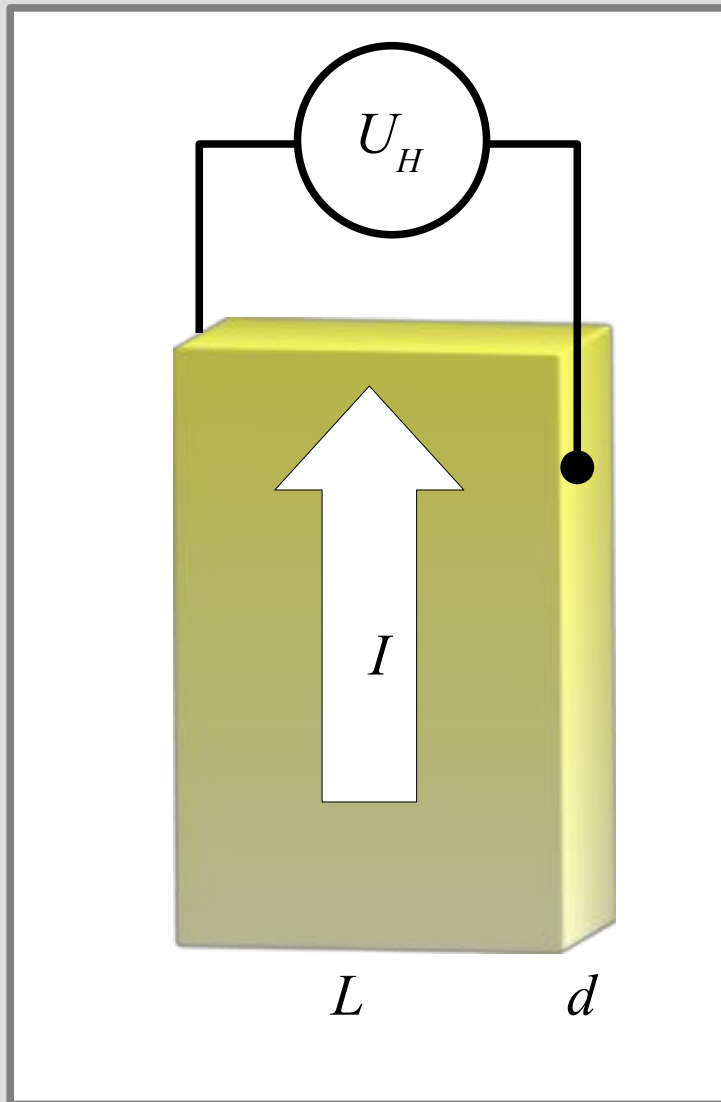
Шаг 5. Наблюдение квантового эффекта Холла

Холловское сопротивление



$$R_H = \frac{U}{I} = \frac{E \times L}{j_S(L \times d)} = \frac{E}{j_S d} = \frac{E}{j_L} = \rho_H^{(2D)}$$

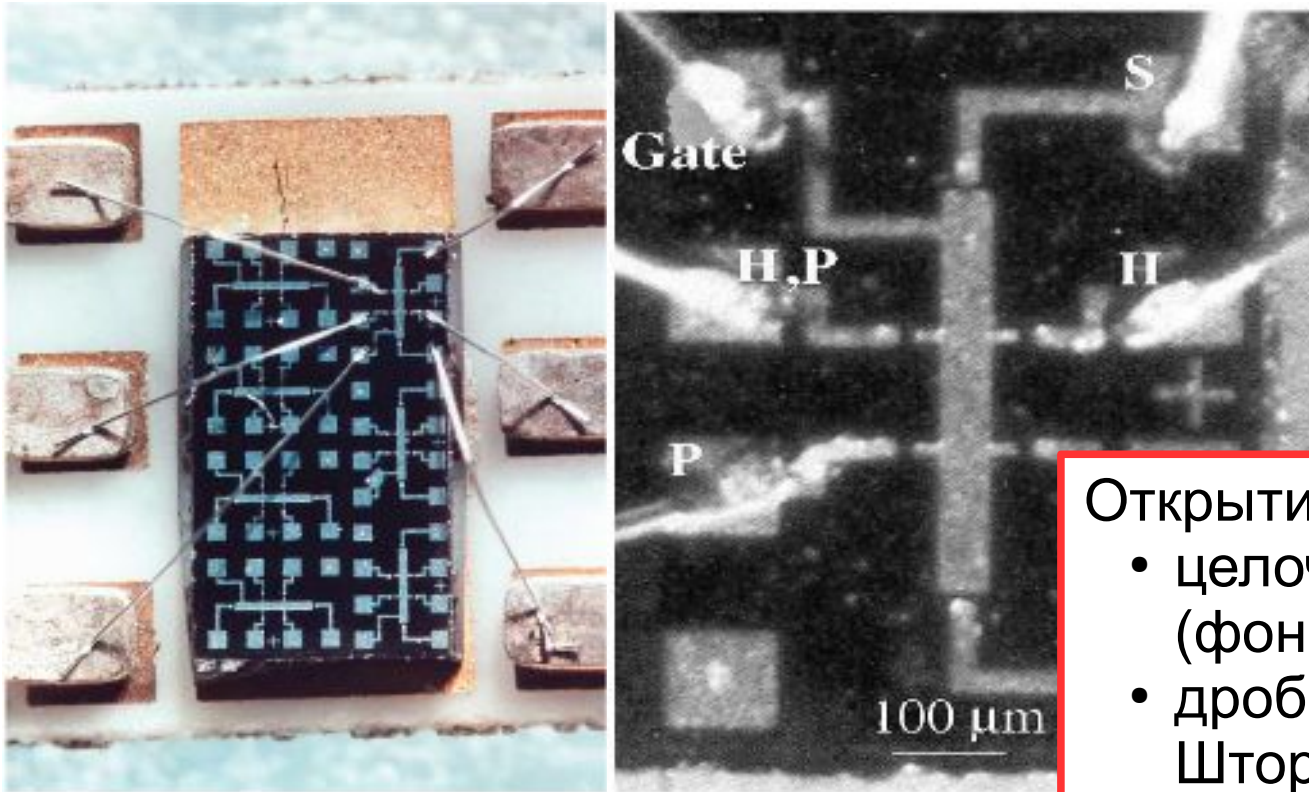
Холловское сопротивление



$$R_H = \frac{U}{I} = \frac{E \times L}{j_S(L \times d)} = \frac{E}{j_S d} = \frac{E}{j_L} = \rho_H^{(2D)}$$

$$n = N n_0 \Rightarrow \rho_H^{(2D)} = \frac{1}{N} \frac{h}{e^2}$$

История открытия КЭХ.



Открытие:

- целочисленный эффект (фон Клитцинг) 1980;
- дробный эффект (Цуи, Штормер, Госсард) 1982.

Нобелевские премии:

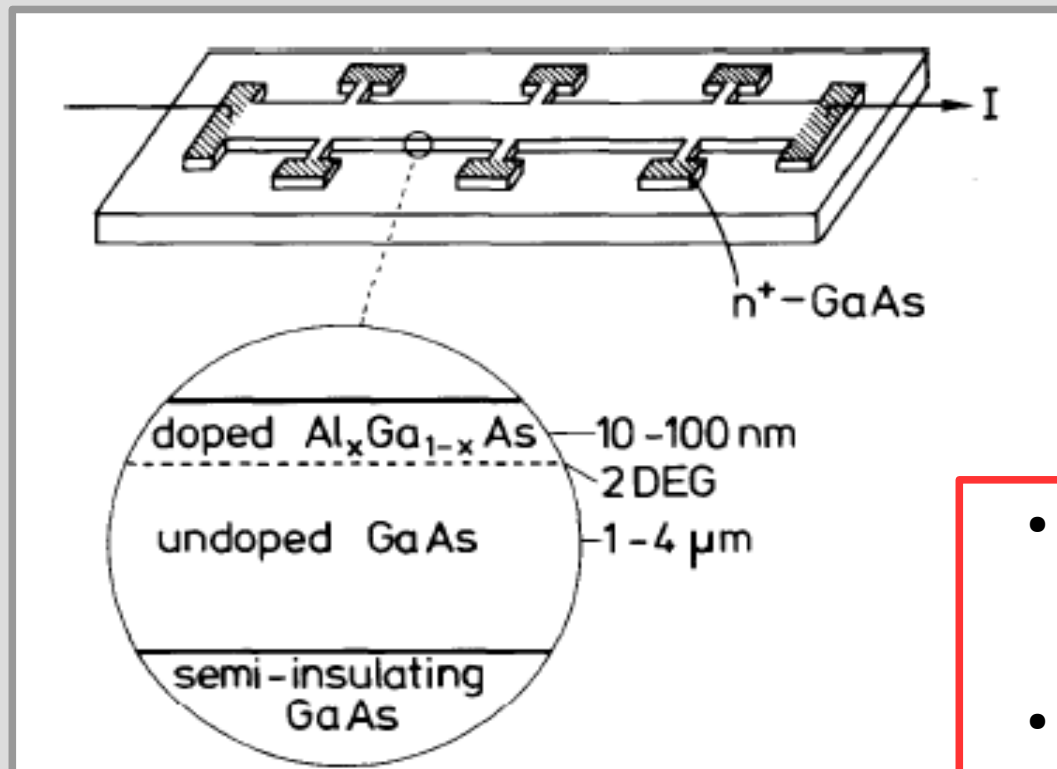
- фон Клитцинг - 1985
- Цуи, Штормер, Лаглин - 1998.

Слева: чип с кремниевыми МОП транзисторами, используемый в опытах по квантовому Холлу. Справа: увеличенное изображение одного из транзисторов с обозначением электродов (H – измерение холловского напряжения, P — измерение продольного сопротивления, Gate — затвор, S — исток, source, D — исток, drain).

Klaus von Klitzing, 25 Years of Quantum Hall Effect (QHE): A Personal View on the Discovery, Physics and Applications of this Quantum Effect, Seminaire Poincare, 2, 1(2005)

Klaus von Klitzing, Developments in the quantum Hall effect, Philosophical Transactions of the Royal Society A, 363, 2203(2005)

Условия наблюдения эффекта.



- Размерное квантование (обычно требует гелиевых температур $<4\text{K}$)
- Квантующее магнитное поле (обычно $\sim 10\text{ Тл}$)
- Для дробного эффекта дополнительно - высокая подвижность носителей и ещё более низкие температуры.

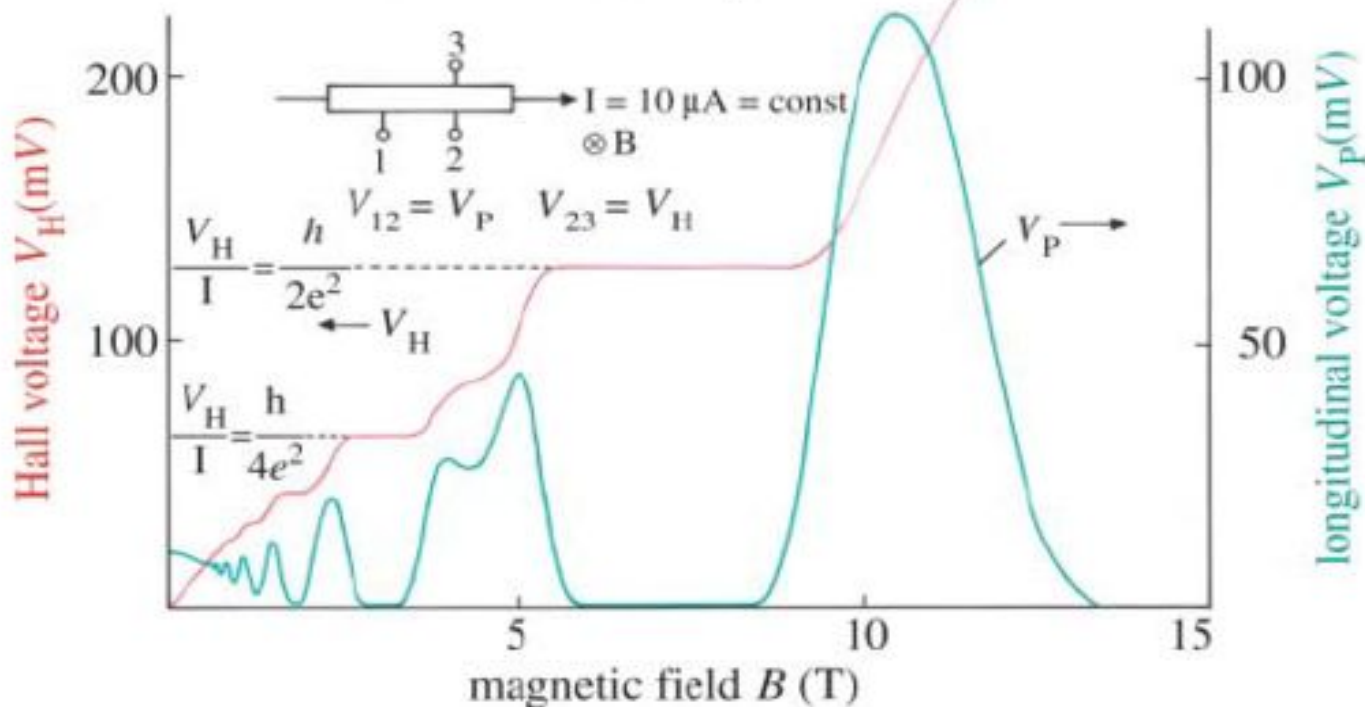
Форма и характерные размеры GaAs-AlGaAs гетероструктуры, используемой в опытах по квантовому эффекту Холла

Klaus von Klitzing, The Quantized hall effect, Nobel Prize Lecture, (1985)

Целочисленный квантовый эффект Холла: наблюдаемые факты.

$$R = \frac{U_H}{I} = \frac{1}{n} \frac{h}{e^2}$$

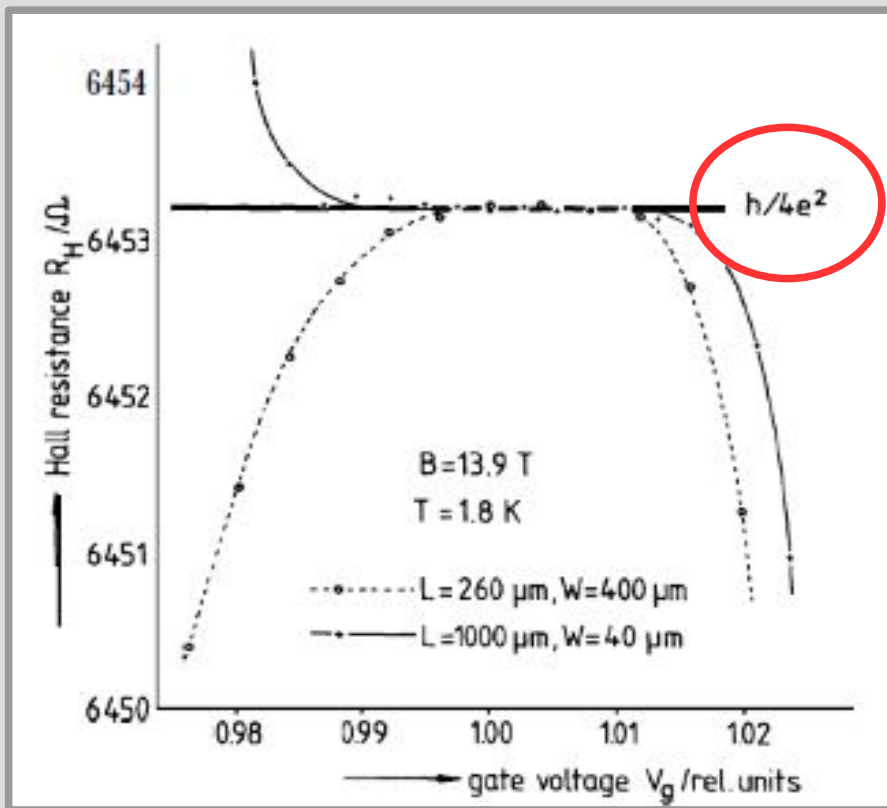
$$\frac{V_H}{I} = \frac{h}{e^2}$$



Зависимости от магнитного поля продольного и холловского напряжений на гетероструктуре GaAs-AlGaAs при токе 10 мкА. $T=1.6\text{K}$

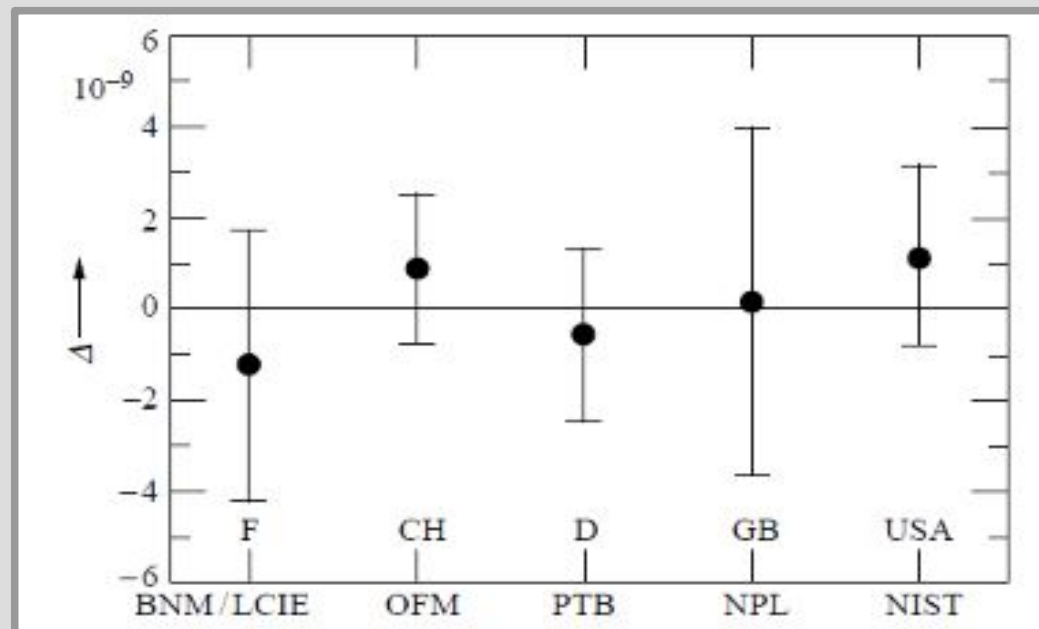
Klaus von Klitzing, Developments in the quantum Hall effect, Philosophical Transaction of the Royal Society A, 363, 2203(2005)

Целочисленный КЭХ: метрологическая ценность.



Сравнение плато Холловского сопротивления для образцов разной формы (L - длина, W - ширина). На графике изображена зависимость холловского сопротивления от напряжения на затворе МОП-структуры, контролирующего концентрацию электронов в двумерном газе.

Klaus von Klitzing, The Quantized hall effect , Nobel Prize Lecture, (1985)



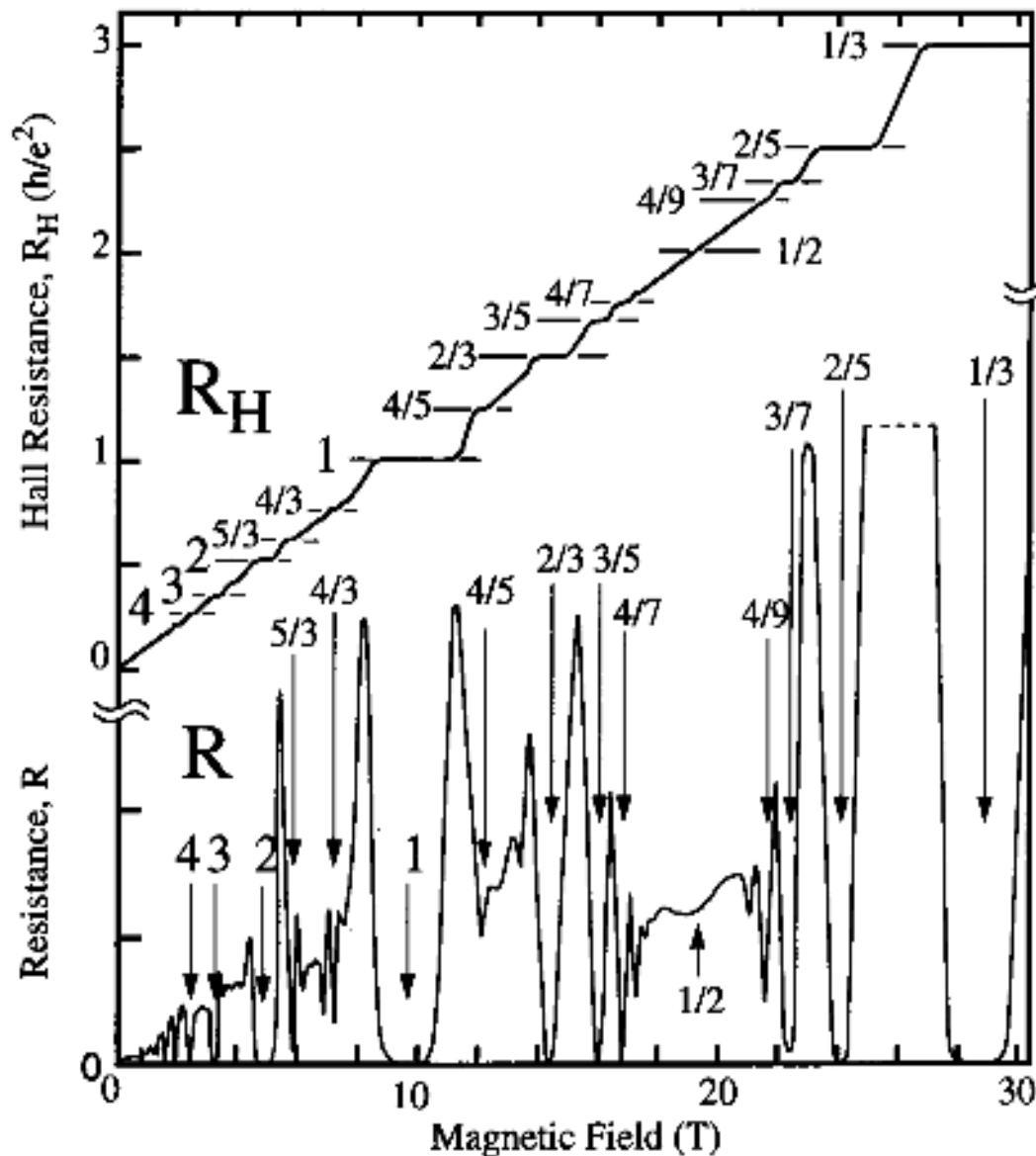
Воспроизводимость холловского сопротивления в различных лабораториях.

Klaus von Klitzing , Developments in the quantum Hall effect , Philosophical Transaction of the Royal Society A, 363, 2203(2005)

$$R_H = \frac{h}{e^2} = 25813.801 \text{ Ом}$$

Определение Ома, точно.

Дробный квантовый эффект Холла. Экспериментальные факты.



Дополнительные плато холловского сопротивления с дробными индексами.

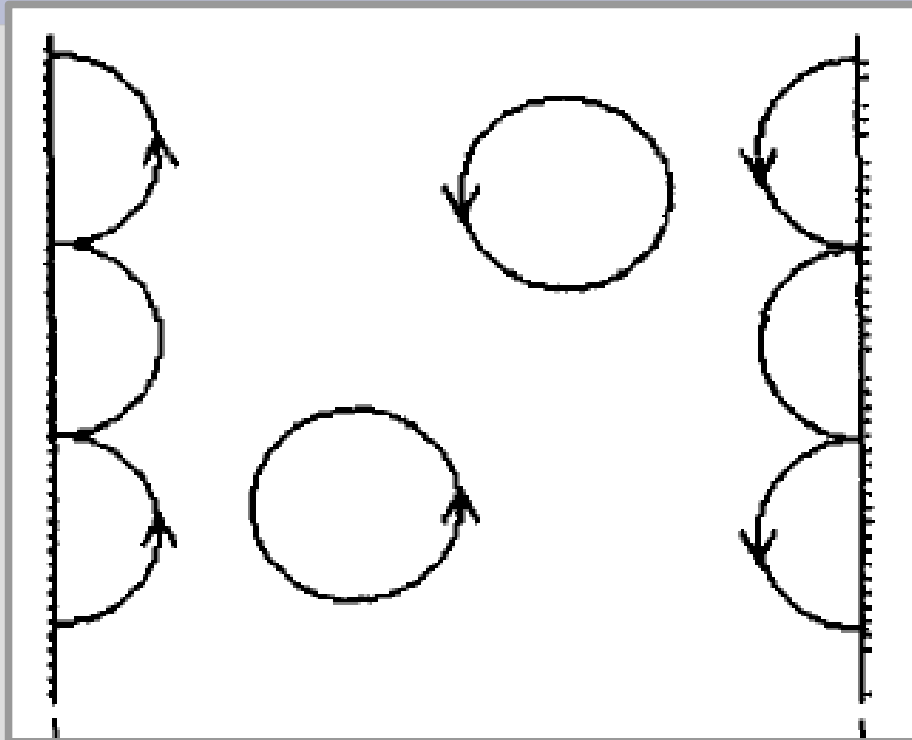
$$R = \frac{U_H}{I} = \frac{1}{n} \frac{h}{e^2} \quad n = \frac{p}{q}$$

Наблюдение дробного квантового эффекта Холла в гетероструктуре GaAs-AlGaAs с высокой подвижностью носителей.

Horst L. Störmer, The fractional quantum hall effect, Nobel prize lecture, (1998)

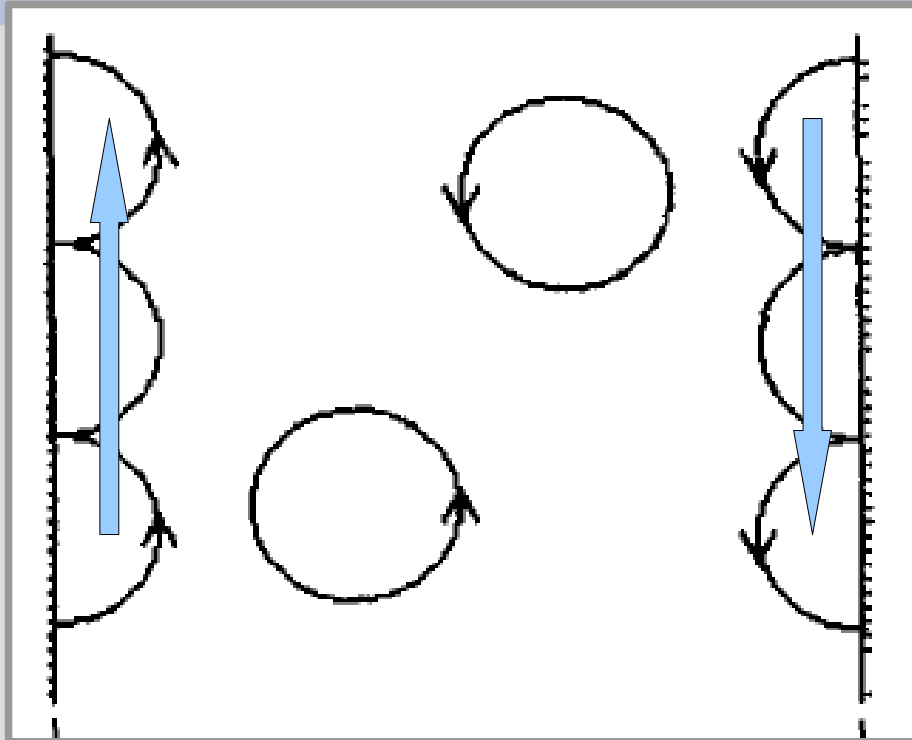
Часть 3. «Всё необычайней и необычайней!»

Где течёт холловский ток?



из книги В.Я.Демиховского

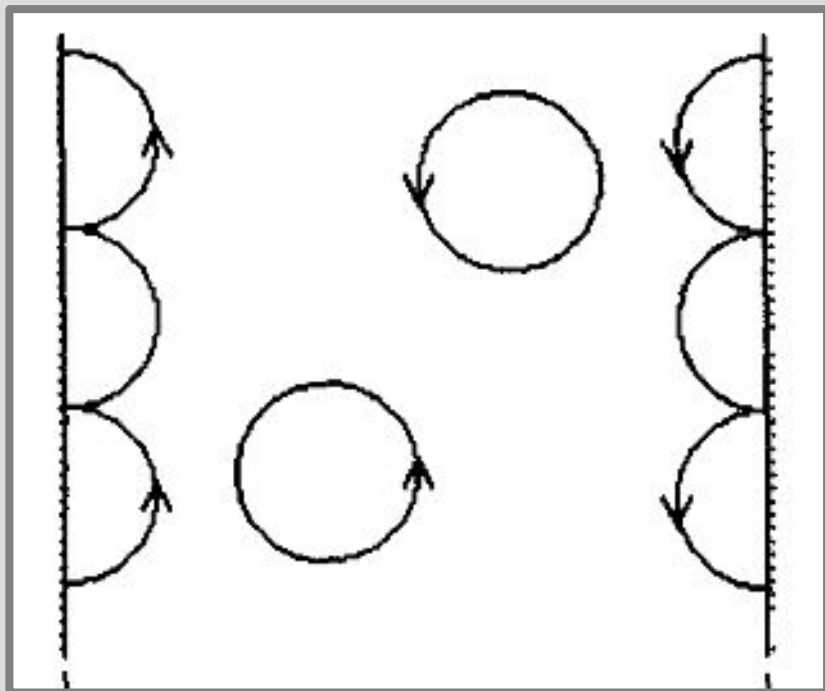
Где течёт холловский ток?



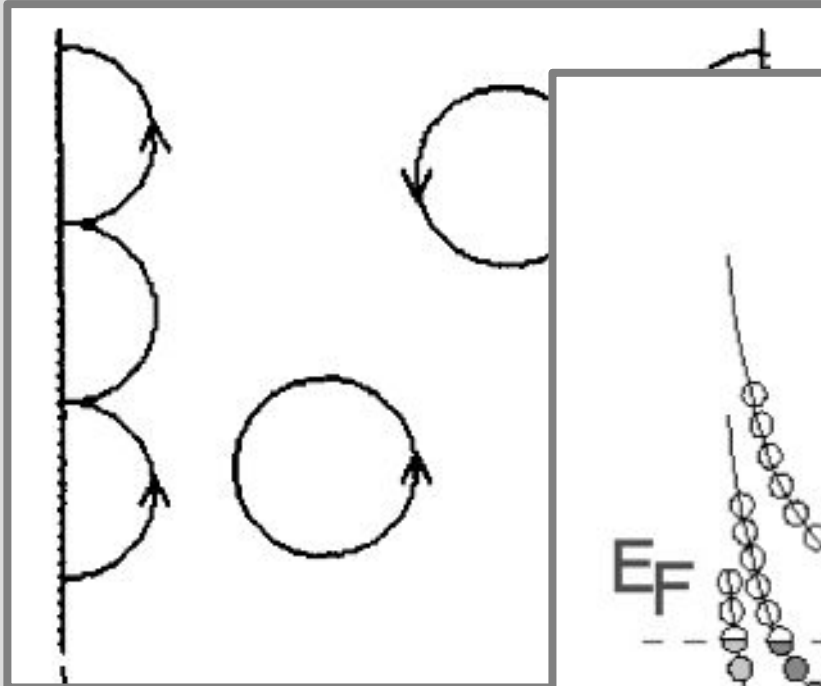
из книги В.Я.Демидовского

- На границах образца текут одномерные диамангнитные токи.
- Из-за действия силы Лоренца электрон не испытывает рассеяния назад

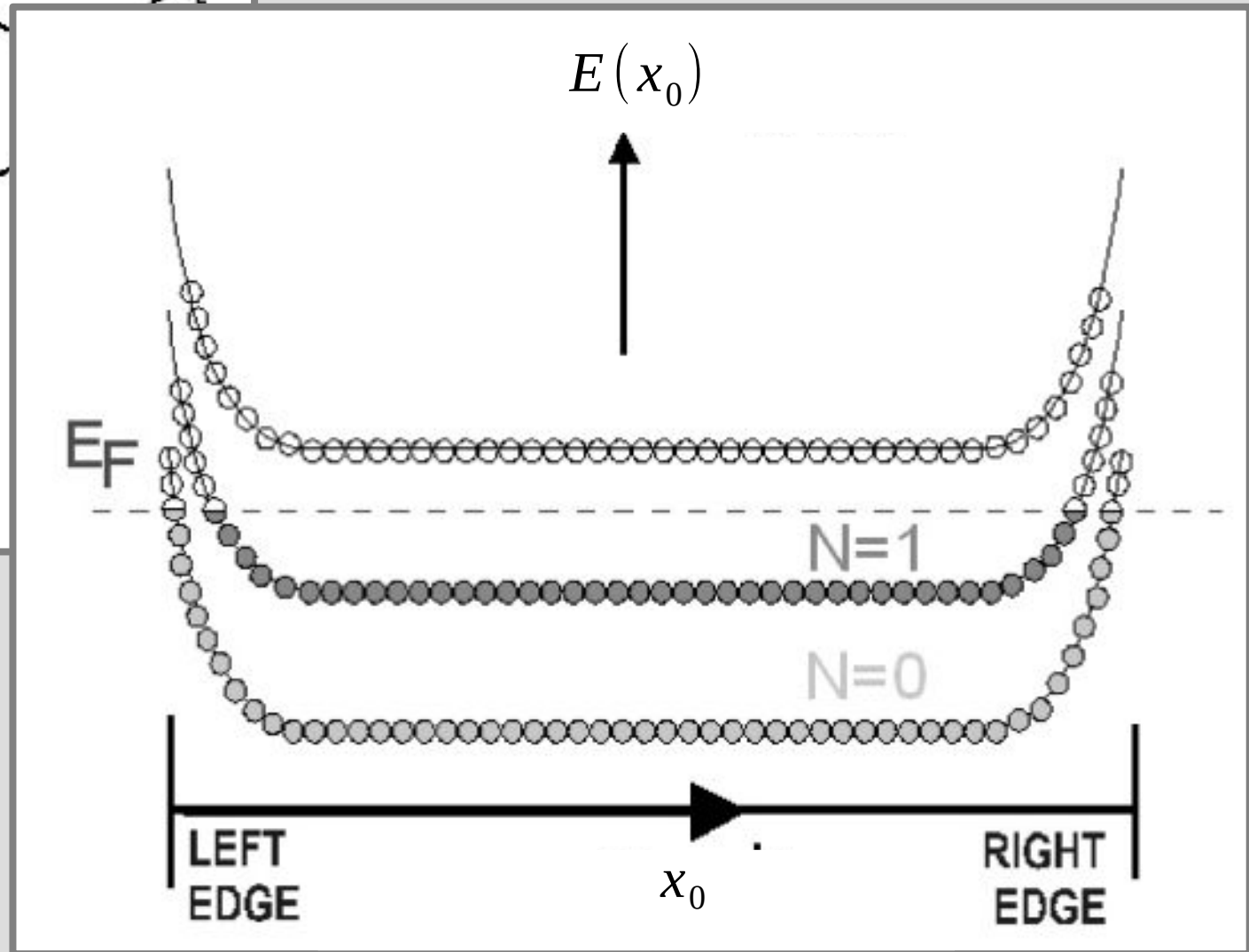
Плато КЭХ и границы образца



Плато КЭХ и границы образца



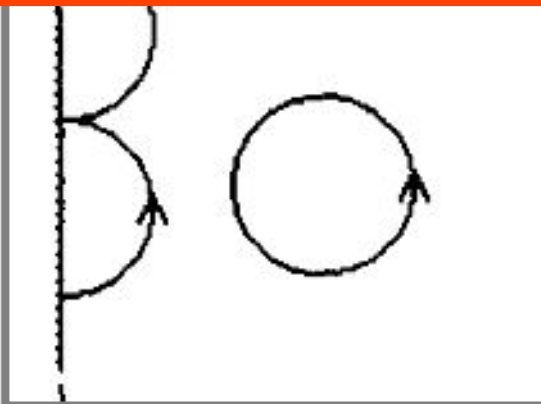
$$x_0 = \frac{\hbar c k_y}{e B}$$
$$V_y = \frac{\partial E}{\hbar \partial k_y}$$



Плато КЭХ и границы образца

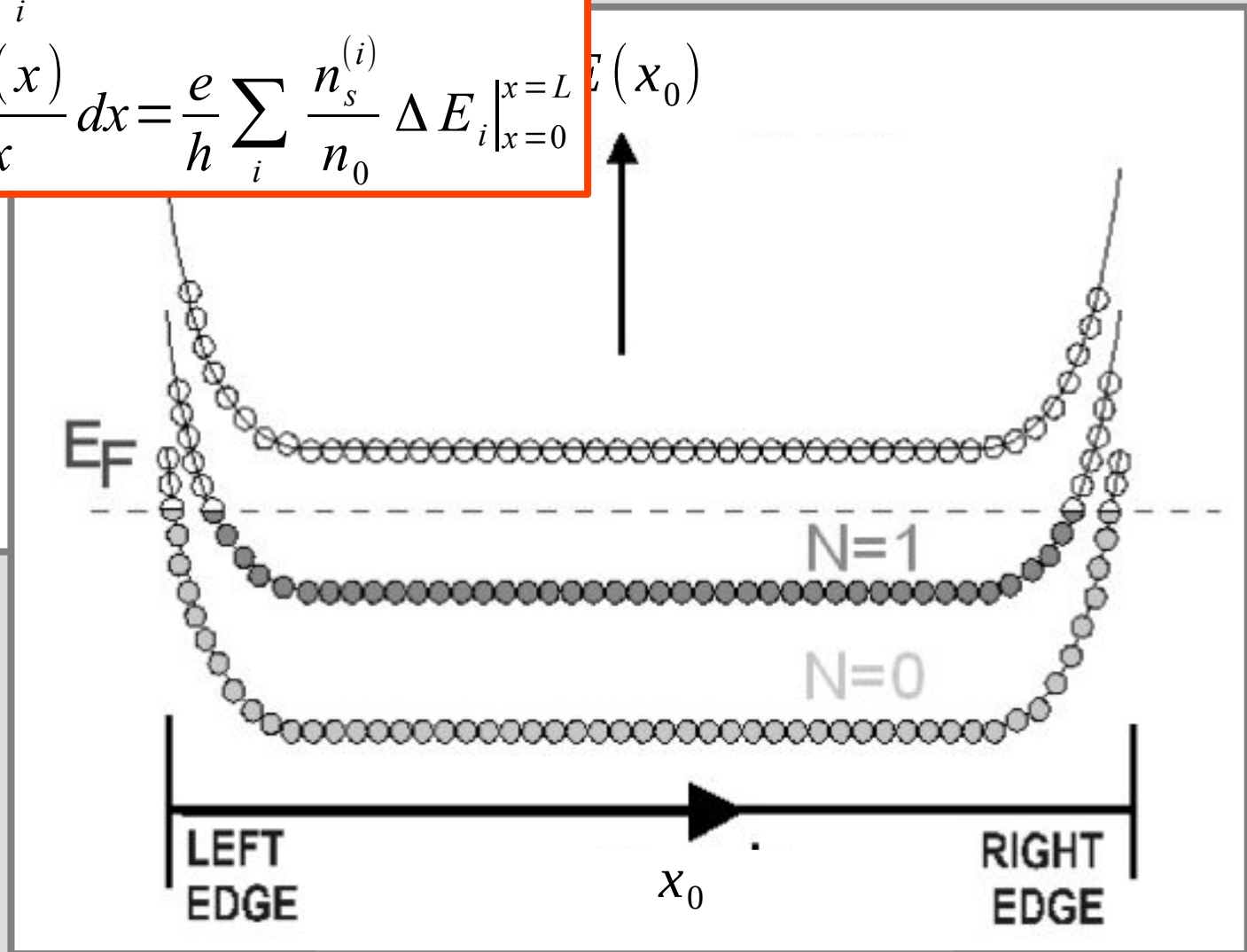
$$I_y = \int j_y dx = \sum_i n_s^{(i)} e \int V_y^{(i)} dx =$$

$$= \sum_i \frac{c}{eH} n_s^{(i)} e \int \frac{\partial E_i(x)}{\partial x} dx = \frac{e}{h} \sum_i \frac{n_s^{(i)}}{n_0} \Delta E_i \Big|_{x=0}^{x=L} \tilde{v}_y(x_0)$$



$$x_0 = \frac{\hbar c k_y}{eB}$$

$$V_y = \frac{\partial E}{\hbar \partial k_y}$$



Главное на лекции.

- Термодинамическая неустойчивость одно и двумерных кристаллов, отсутствие долгоживущих квазичастиц в одномерной электронной системе с взаимодействием
- Состояние вигнеровского кристалла в двумерной электронной системе
- Квантование проводимости в одномерном проводнике
- Уровни Ландау и КЭХ

