

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра теоретической физики

Эффект Джозефсона

Учебно-методическое пособие

МОСКВА 2010

Составители: Я. В. Фоминов, Н. М. Щелкачёв
УДК 538.945

Рецензент
д.ф.-м.н., проф. М. Ю. Куприянов

Эффект Джозефсона:

Учебно-методическое пособие/ Сост. Я. В. Фоминов, Н. М. Щелкачёв. — М.: МФТИ, 2010. — 32 с.

Теоретически рассмотрены основные явления, связанные со стационарным и нестационарным эффектом Джозефсона.

Предназначено для студентов физических специальностей.

УДК 538.945

© Московский физико-технический институт
(государственный университет), 2010

Содержание

1. Введение	4
2. Теория Гинзбурга–Ландау	5
3. Общие свойства джозефсоновского тока	10
4. Стационарный эффект Джозефсона	11
4.1. Эффект Джозефсона в туннельном SIS-контакте	11
4.2. Простейший сквид	13
4.3. Эффект близости в SIN-контакте	14
4.4. Эффект Джозефсона в SINIS-контакте	15
4.5. Теория Асламазова и Ларкина	17
5. Нестационарный эффект Джозефсона в туннельных структурах	20
5.1. Общие свойства	20
5.2. Резистивная модель	23
5.3. Резистивная модель с ёмкостью	28
Литература.	31

1. Введение

Термин *эффект Джозефсона* в настоящее время относится к совокупности явлений, имеющих место в контактах двух сверхпроводников через слабую связь. В 1962 году появилась короткая теоретическая работа английского физика Б. Д. Джозефсона [1], где исследовался туннельный переход (контакт сверхпроводников через прослойку диэлектрика) и было предсказано два эффекта: 1) через контакт в отсутствие приложенного напряжения может течь постоянный сверхпроводящий ток и 2) при конечном напряжении V через контакт помимо обычного постоянного тока будет также течь переменный сверхпроводящий ток частоты $\omega = 2eV/\hbar$.

Это предсказание было весьма необычным и вызвало серьёзные споры, в которых некоторые учёные, в том числе весьма именитые, ставили предсказанные эффекты под сомнение. Независимые вычисления других теоретиков, однако, показали правильность результатов Джозефсона, а затем они были подтверждены и экспериментом. В 1973 году Джозефсон получил за своё открытие Нобелевскую премию.

Дальнейшие исследования показали, что эффект Джозефсона весьма общий и проявляется не только в туннельных переходах, но и при соединении двух сверхпроводников через слабую связь любого вида (например, нормальный металл, ферромагнетик, геометрическое сужение и др.).

Одной из мотиваций, приведших Джозефсона к открытию, являлось желание выяснить, имеет ли какие-либо наблюдаемые следствия фаза параметра порядка. Действительно, как известно, сверхпроводник описывается комплексным параметром порядка $\Delta = |\Delta|e^{i\varphi}$. Модуль параметра порядка $|\Delta|$ определяет как бы «силу» сверхпроводимости, в частности сверхпроводящую щель в одночастичном спектре. А фаза φ ? На что она влияет? Что будет, например, если привести в контакт два сверхпроводника с одинаковыми по модулю, но разными по фазе параметрами порядка? Именно из этих вопросов и возникла работа Джозефсона.

Оказалось, что величина сверхпроводящего тока через контакт (джозефсоновского тока) определяется именно разностью фаз параметров порядка с двух сторон. Параметр порядка Δ можно рассматривать как волновую функцию сверхпроводящего конденсата (куперовских пар электронов), поэтому эффект Джозефсона — кванто-

вый эффект. С другой стороны, конденсат куперовских пар состоит из огромного количества электронов, и в джозефсоновском токе участвует огромное число электронов, поэтому эффект Джозефсона — одновременно и макроскопический эффект. Он явился очень важным шагом в понимании природы сверхпроводящего состояния. Кроме того, он нашёл значительное и растущее число применений для создания уникальных измерительных приборов.

Ниже мы пытаемся на основе простых примеров объяснить физику эффекта Джозефсона и основные явления, связанные с ним. Различные подходы к описанию эффекта Джозефсона можно найти также в таких популярных учебниках, как [2, 3, 4, 5]. Мы надеемся, что читатель, усвоив приведённый ниже материал, сможет продолжить разбираться в деталях эффекта Джозефсона, используя эти учебники, а также более специальную литературу, например [6, 7, 8].

2. Теория Гинзбурга–Ландау

Существенная часть нашего рассмотрения будет построена на описании сверхпроводимости в рамках теории Гинзбурга–Ландау. Подробное изложение этой теории можно найти, например, в учебниках [2, 3, 4, 5]. Здесь мы напомним основные положения теории Гинзбурга–Ландау, которые понадобятся нам для обсуждения эффекта Джозефсона.

Полная теория, описывающая поведение сверхпроводника, довольно сложна. Ситуация, однако, существенно упрощается в области температур вблизи точки сверхпроводящего перехода T_c . Здесь оказывается возможным построить систему относительно простых уравнений. В общей теории Ландау фазовых переходов второго рода отличие «несимметричной» фазы от «симметричной» описывается параметром порядка, обращающимся в точке перехода в нуль (см., например, [9], § 142 и [2], § 45). Для сверхпроводящей фазы естественным таким параметром является конденсатная волновая функция (её ещё иногда называют волновой функцией куперовских пар).

Отправным пунктом теории Гинзбурга–Ландау (ГЛ) является выражение для свободной энергии сверхпроводника как функционала от параметра порядка. В соответствии с общими положениями теории Ландау, оно получается разложением плотности свободной энергии по степеням малого (вблизи точки перехода) параметра порядка и его производных по координатам. Во избежание излишних

(с принципиальной точки зрения) усложнений будем считать, что сверхпроводящее состояние — спин-синглетное (полный спин куперовской пары $S = 0$) и s -волновое (полный орбитальный момент куперовской пары $L = 0$, т.е. состояние изотропное). Это наиболее часто встречающаяся в приложениях ситуация (общий случай построения теории ГЛ можно найти, например, в [10]). Параметр порядка в этом случае сводится к комплексному скаляру.

Тогда разложение свободной энергии для сверхпроводника в магнитном поле имеет вид

$$F[\Delta(\mathbf{r})] = F_{n0} + \int d\mathbf{r} \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} + a \int d\mathbf{r} \Delta^* \left[\frac{\hbar}{\tau_{\text{GL}}} - \hbar D \left(\nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{b}{2T_c} |\Delta|^2 \right] \Delta, \quad (1)$$

где F_{n0} — свободная энергия в нормальном состоянии в отсутствие магнитного поля, Δ — параметр порядка, e — заряд электрона, \mathbf{A} — векторный потенциал внешнего магнитного поля \mathbf{B} и T_c — критическая температура сверхпроводника.¹ Обратите внимание на дополнительный (по сравнению с обычным выражением для импульса в магнитном поле) коэффициент 2 перед векторным потенциалом — это есть прямое следствие того, что в сверхпроводимости участвуют *пары* электронов. Интегрирование ведётся по объёму образца.

Теперь обсудим коэффициенты в разложении свободной энергии (1). Величина τ_{GL} имеет размерность времени и меняет знак в точке сверхпроводящего перехода, так что

$$\frac{\hbar}{\tau_{\text{GL}}} = \alpha(T - T_c), \quad (2)$$

где T — температура. Удобно нормировать параметр порядка так, чтобы его модуль совпадал с щелью в квазичастичной плотности состояний объёмного образца. Коэффициенты a , α , D и b слабо зависят от температуры, и их можно найти из модели сверхпроводимости Бардина–Купера–Шриффера (БКШ). Мы будем в основном интересоваться так называемым грязным пределом (реализующимся, например, в сверхпроводящих сплавах с примесями), когда длина свободного пробега электрона l много меньше, чем $\xi_0 = \sqrt{\hbar D / T_c}$

¹Мы будем везде подразумевать, что температура записана в энергетических единицах, поэтому константа Больцмана нигде в формулах не возникает.

(характерный размер куперовской пары при $T = 0$), — именно такая ситуация чаще всего реализуется в эксперименте. В этом случае D совпадает с коэффициентом диффузии электрона на уровне Ферми (т. е. $D = v_F l / 3$, где v_F — скорость Ферми), а остальные коэффициенты имеют следующие значения [11]:

$$a = \frac{\nu\pi}{8T_c}, \quad \alpha = \frac{8}{\pi}, \quad b = \frac{7\zeta(3)}{\pi^3}, \quad (3)$$

где $\nu = mp_F / 2\pi^2 \hbar^3$ — плотность состояний электрона на уровне Ферми в нормальном состоянии, p_F — импульс Ферми, $\zeta(3) \approx 1.2$ — дзета-функция Римана [$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^n$].²

Условие применимости разложения (1) — малость параметра порядка Δ по сравнению с его значением $\Delta(0)$ при $T \ll T_c$. Для сверхпроводника $\Delta(0) \sim T_c$ и $\Delta \sim \sqrt{\hbar T_c / \tau_{GL}} \sim \sqrt{(T_c - T)T_c}$, откуда следует условие $|T - T_c| \ll T_c$. Кроме того, Δ должна меняться в пространстве не слишком быстро, а именно на расстояниях много больших ξ_0 . Именно это позволяет оставить в уравнении (1) основные вклады по параметру порядка и его производным, в то время как отброшенные члены имеют более высокий порядок малости (при этом удерживать член четвёртого порядка по Δ рядом с квадратичным необходимо, т. к. коэффициент при квадратичном члене очень мал; вклады нечётного порядка по Δ отсутствуют, т. к. параметр порядка определён с точностью до общего фазового множителя, в результате чего энергия не должна меняться при изменении знака Δ).

Из условия минимума свободной энергии можно найти уравнения, которым удовлетворяет параметр порядка. Приравнявая вариацию F по Δ^* и \mathbf{A} нулю, найдём

$$\left[\frac{\hbar}{\tau_{GL}} - \hbar D \left(\nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{b}{T_c} |\Delta|^2 \right] \Delta = 0, \quad (4)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s, \quad (5)$$

$$\mathbf{j}_s = 4eaD \text{Im } \Delta^* \left(\nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta, \quad (6)$$

²В то же время чистый случай отличается лишь значениями коэффициентов в выражении (1) для свободной энергии: $a = 7\zeta(3)n/8\pi^2 T_c^2$, $\alpha = 6\pi^2 T_c / 7\zeta(3) E_F$, $D = \hbar / 4m$, $b = 3T_c / 4E_F$, где $n = p_F^3 / 3\pi^2 \hbar^3$ — плотность электронов, $E_F = p_F^2 / 2m$ — энергия Ферми, m — масса электрона [2, 11].

где \mathbf{j}_s — плотность сверхпроводящего тока. Обратите внимание, что если сделать замену $D \rightarrow \hbar/4m$ и $\sqrt{a}\Delta \rightarrow \psi$ в (6), то выражение для тока примет такой же вид, как ток в квантовой механике одной частицы с волновой функцией $\psi(\mathbf{r})$, зарядом $2e$ и массой $2m$. Квадрат модуля волновой функции имеет размерность плотности вероятности, как и должно быть в квантовой механике, и равен плотности куперовских пар (это и есть «частицы» с зарядом $2e$ и массой $2m$). Плотность сверхпроводящих электронов n_s по определению в два раза больше плотности куперовских пар, поэтому $|\psi(\mathbf{r})|^2 = n_s/2$ (см. [2]). Заметим также, что (5) — одно из уравнений Максвелла.

В однородном сверхпроводнике в отсутствие магнитного поля градиентный член в (4) равен нулю. В этом случае находим

$$|\Delta| \equiv \Delta_0 = \sqrt{-\frac{\hbar T_c}{\tau_{\text{GL}} b}} = \sqrt{\frac{\alpha T_c (T_c - T)}{b}}. \quad (7)$$

При наличии градиентного члена из самого вида уравнения (4) ясно, что возникает характерная длина

$$\xi(T) = \sqrt{D|\tau_{\text{GL}}|} = \sqrt{\frac{\hbar D}{\alpha|T - T_c|}}. \quad (8)$$

Эту длину можно трактовать как размер куперовской пары при температурах, близких к критической.

Очень важной особенностью формулы (6) для тока является то, что в отсутствие векторного потенциала сверхпроводящий ток возникает только в случае изменения в пространстве *фазы* параметра порядка. Например, если модуль параметра порядка постоянен, т. е. $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\varphi(\mathbf{r})}$, мы получаем

$$\mathbf{j}_s \propto \Delta_0^2 \nabla_{\mathbf{r}} \varphi. \quad (9)$$

Система уравнений (4) – (6) станет замкнутой после того, как будут сформулированы граничные условия для Δ . На границе, совершенно непроницаемой для электронов (граница сверхпроводника с вакуумом или, например, толстый слой окисла), граничные условия имеют вид

$$\mathbf{n} \cdot \left(\nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta = 0, \quad (10)$$

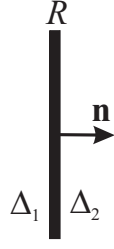


Рис. 1. Граница с сопротивлением R между двумя сверхпроводниками с параметрами порядка Δ_1 и Δ_2

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности. Уравнение (10) можно вывести из условия равенства нулю интегралов по поверхности в вариации свободной энергии (1). Отсюда следует, в частности, отсутствие тока через непроницаемую границу.

Общие граничные условия на границе между двумя сверхпроводниками (см. рис. 1) должны находиться, вообще говоря, из микроскопических соображений, исходя из поведения параметра порядка на расстояниях $\lesssim l$ вблизи границы. Однако уже на расстоянии порядка ξ_0 вблизи границы уравнения ГЛ неприменимы, поэтому невозможно шить решения по разную сторону границы, опираясь только на феноменологическую теорию ГЛ. Для вывода граничных условий необходимо обратиться к более общим уравнениям Горькова. Это было сделано в [12], а затем обобщено с помощью полностью микроскопических расчётов в [13].

Уравнение ГЛ (4) имеет второй порядок по градиентам, как и уравнение Шрёдингера. Поэтому естественно, что на границе возникают два граничных условия на значения параметров порядка и их производных с двух сторон:³

$$\mathbf{n} \cdot \left(\nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta_1 = \mathbf{n} \cdot \left(\nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta_2 = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Lambda}. \quad (11)$$

³Для простоты мы предполагаем, что материальные параметры веществ, находящихся с двух сторон контакта (проводимость, коэффициент диффузии и плотность состояний на уровне Ферми в нормальном состоянии), одинаковы. Константы электрон-электронного взаимодействия предполагаются близкими, но тем не менее могут отличаться, так что в некотором диапазоне температур одна из сторон может быть в сверхпроводящем состоянии, а другая — в нормальном (такие системы будут рассмотрены ниже). Кроме того, естественно, могут быть различными (произвольными) фазы параметров порядка с двух сторон.

Вид правой части можно было бы угадать, исходя из требования линейности по Δ_1 и Δ_2 (так как параметр порядка мал), а также из того, что при перестановке местами полупространств 1 и 2 ток должен менять направление — поэтому должна войти разность Δ_1 и Δ_2 .

Параметр Λ имеет размерность длины и равен $\Lambda = \sigma R \mathcal{A} \sim l/T$, где $\sigma = 2e^2 \nu D$ — проводимость сверхпроводника в нормальном состоянии (при нагревании выше T_c), R и \mathcal{A} — сопротивление и площадь границы, l — длина свободного пробега, а $T < 1$ — вероятность туннелирования электрона с энергией порядка энергии Ферми через границу между сверхпроводниками при $T > T_c$. Обратите внимание на следующую связь между формулой (6) для тока в объёме сверхпроводника и граничным условием (11): обе формулы показывают, что сверхпроводящий ток связан с изменением параметра порядка в пространстве (градиент в объёме и разность параметров порядка с двух сторон границы соответственно).

Используя (6), мы можем записать граничные условия (11) через ток на границе:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_{s1} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_{s2} = \frac{\pi}{4eT_c R \mathcal{A}} \text{Im}(\Delta_1^* \Delta_2). \quad (12)$$

Уравнение (12) — одно из самых важных для объяснения в рамках приближения ГЛ эффекта интерференции волновых функций конденсатов двух близких сверхпроводников (эффект Джозефсона).

3. Общие свойства джозефсоновского тока

Из симметричных соображений можно определить многие свойства джозефсоновского тока. Подобно тому как внутри сверхпроводников ток определяется градиентом фазы конденсатной волновой функции (см. (9)), так величина протекающего через контакт сверхпроводящего тока I_s связана с разностью значений $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ фаз параметра порядка в двух берегах контакта.

Поскольку значения фаз, отличающиеся на целое кратное от 2π , физически тождественны, ясно, что ток I_s должен быть в общем случае периодической функцией разности фаз с периодом 2π :

$$I_s(\varphi + 2\pi n) = I_s(\varphi) \quad (13)$$

(мы предполагаем, что влиянием на ток со стороны собственного магнитного поля токов внутри контакта можно пренебречь — в противном случае вместо разности сверхпроводящих фаз должно было бы фигурировать калибровочно инвариантное выражение, включающее в себя векторный потенциал).

Операция обращения времени меняет знак тока I_s и в то же время меняет знак фаз (поскольку волновые функции заменяются своими комплексно-сопряжёнными). Это значит, что ток I_s должен быть нечётной функцией разности фаз и обращаться в нуль при разности фаз, равной нулю:

$$I_s(-\varphi) = -I_s(\varphi), \quad I_s(0) = 0. \quad (14)$$

Кроме того, поскольку сверхпроводящий ток может течь лишь в присутствии градиента фазы параметра порядка, ток через слабую связь будет отсутствовать не только при $\varphi = 0$, но и при $\varphi = \pi$ (этот случай соответствует изменению знака за счёт прохождения параметра порядка через ноль, а не за счёт непрерывного изменения фазы). В результате мы можем утверждать, что

$$I_s(\pi n) = 0. \quad (15)$$

Будучи, разумеется, ограниченной, функция I_s имеет свои максимальное и минимальное значения, между которыми она и меняется при изменении разности фаз, а в силу нечётности функции эти значения одинаковы по абсолютной величине; обозначим их через I_c :

$$I_c = \max_{\varphi} I_s(\varphi) = -\min_{\varphi} I_s(\varphi). \quad (16)$$

Обратите внимание, что эти свойства не зависят от типа слабой связи и являются общими для всех видов джозефсоновских контактов.

4. Стационарный эффект Джозефсона

4.1. Эффект Джозефсона в туннельном SIS-контакте

Рассмотрим простейший (и исторически первый) тип джозефсоновского контакта — два сверхпроводника (S), разделённых тонким слоем диэлектрика (I), — такой контакт называют туннельным, или SIS-контактом. Для электронов слой диэлектрика представляет собой

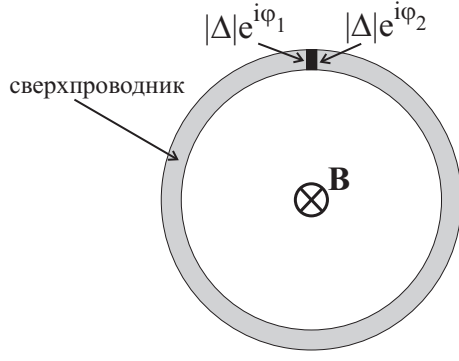


Рис. 2. Сверхпроводящее кольцо с джозефсоновским контактом. Разность фаз $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ на контакте наводится за счёт магнитного поля \mathbf{B} , пронизывающего кольцо

потенциальный барьер, и если слой достаточно тонок, то существует конечная вероятность их проникновения через него путём квантового туннелирования. Даже если коэффициент пропускания барьера мал, его отличие от нуля имеет принципиальное значение: оба сверхпроводника становятся единой системой, описываемой единой конденсатной волновой функцией. Это обстоятельство и приводит к эффекту Джозефсона. Единство конденсатной волновой функции системы означает, что через контакт между двумя сверхпроводниками может течь, даже в отсутствие приложенной извне разности потенциалов, сверхпроводящий ток (например, в системе, изображённой на рис. 2).

Если граница малопрозрачна, то модули параметров порядка с двух сторон от границы совпадают со своими значениями (7) в объёме, и параметры порядка отличаются только фазами: $\Delta_{1(2)} = \Delta_0 e^{i\varphi_{1(2)}}$. Используя граничные условия (12), легко получаем, что плотность тока на границе равна

$$j_s = \frac{\pi \Delta_0^2}{4eT_c R \mathcal{A}} \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (17)$$

Умножив (17) на площадь поверхности контакта \mathcal{A} , получим полный ток:

$$I_s = I_c \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad I_c = \frac{\pi \Delta_0^2}{4eT_c R}. \quad (18)$$

С учётом (7) получаем линейную зависимость критического тока от температуры:

$$I_c = C \frac{T_c - T}{R_N}, \quad C = \frac{2\pi^3}{7\zeta(3)e} \approx 635 \frac{\text{мкВ}}{\text{К}}. \quad (19)$$

4.2. Простейший сквид

Рассмотрим сверхпроводящее кольцо, сделанное из толстого сверхпроводящего провода, замкнутое через джозефсоновский контакт (см. рис. 2). Пусть толщина провода много больше мейснеровской глубины проникновения магнитного поля λ (см., например, [2]), тогда ток внутри провода равен нулю (т. к. магнитное поле заэкранировано поверхностными мейснеровскими токами), и модуль параметра порядка постоянен, в то время как фаза может зависеть от координаты. Подставляя $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\varphi(\mathbf{r})}$ в формулу (6) для тока и интегрируя от стороны контакта 1 до стороны контакта 2 по контуру \mathcal{C} , проходящему внутри провода, получаем

$$0 = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{j}_s d\mathbf{l} \propto \int_{\mathcal{C}} \left(\nabla_{\mathbf{r}}\varphi - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) d\mathbf{l} = (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{2e}{\hbar c} \Phi, \quad (20)$$

где $\Phi = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} d\mathbf{S}$ — магнитный поток внутри кольца. В результате

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (21)$$

где введён квант магнитного потока $\Phi_0 = \pi\hbar c/e \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$, и окончательно

$$I_s = I_c \sin \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right). \quad (22)$$

Таким образом, джозефсоновский ток весьма чувствителен к величине магнитного поля (т. к. Φ_0 мал). Используя это свойство эффекта Джозефсона, можно измерять магнитное поле с высокой точностью. Кольцо с джозефсоновским контактом, рассмотренное выше, является простейшим примером сквида (от английского сокращения SQUID — superconducting quantum interference device, т. е. сверхпроводящее квантовое интерференционное устройство) — прибора, измеряющего магнитное поле с высокой точностью.

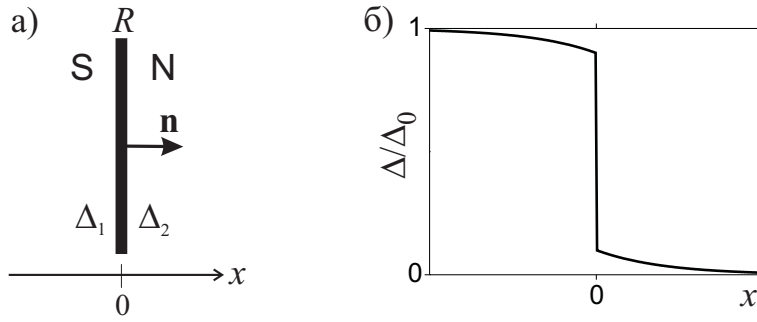


Рис. 3. а) SIN-контакт. б) Схематическая зависимость параметра порядка от координаты

4.3. Эффект близости в SIN-контакте

Рассмотрим теперь контакт сверхпроводник–диэлектрик–нормальный металл (сокращённо SIN). Сверхпроводящий параметр порядка, вообще говоря, не равен нулю в нормальном металле вблизи границы со сверхпроводником. Такое «индуцирование» сверхпроводимости в нормальный металл называют эффектом близости.

Количественно эффект близости в системе, где сверхпроводник занимает полупространство $x < 0$, а нормальный металл — полупространство $x > 0$ (см. рис. 3а), может быть описан в рамках теории Гинзбурга–Ландау. Поскольку теория ГЛ применима при температурах, близких к критической, необходимо, чтобы нормальный металл был в действительности нормальным состоянием сверхпроводника, имеющего более низкую критическую температуру T'_c . Тогда в интервале температур $T'_c < T < T_c$ (и в случае выполнения условия $T_c - T'_c \ll T_c$) система будет представлять собой SIN-контакт, в котором применима теория ГЛ.

Будем предполагать, что магнитное поле отсутствует ($\mathbf{A} = 0$), тогда фазу параметра порядка в SIN-контакте можно выбрать равной нулю, поэтому параметр порядка вещественен. Задача теперь сводится к решению уравнения (4) с граничными условиями (11). В случае непрозрачной границы параметр порядка слева давался бы выражением (7), а справа был бы равен нулю. В случае же слабо-

прозрачной границы параметр порядка можно представить в виде

$$\Delta(x) = \begin{cases} \Delta_0 + \delta\Delta(x), & x < 0, \\ \delta\Delta(x), & x > 0, \end{cases} \quad (23)$$

где $|\delta\Delta(x)| \ll \Delta_0$. Линеаризуя уравнения по $\delta\Delta(x)$, получаем

$$\left[-2\alpha(T - T_c) - \hbar D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \delta\Delta = 0, \quad x < 0, \quad (24)$$

$$\left[\alpha(T - T'_c) - \hbar D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \delta\Delta = 0, \quad x > 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta\Delta(x = \pm 0) = -\frac{\Delta_0}{\Lambda}, \quad \delta\Delta(x \rightarrow \pm\infty) = 0. \quad (26)$$

Решая эти уравнения получим, что

$$\delta\Delta(x) = \begin{cases} -\frac{\Delta_0}{\Lambda\kappa_S} e^{\kappa_S x}, & x < 0, \\ \frac{\Delta_0}{\Lambda\kappa_N} e^{-\kappa_N x}, & x > 0, \end{cases} \quad (27)$$

где $\kappa_S = \sqrt{2\alpha(T_c - T)/\hbar D}$ и $\kappa_N = \sqrt{\alpha(T - T'_c)/\hbar D}$. Схематическая зависимость параметра порядка от координаты приведена на рис. 3б.

Легко увидеть, что $1/\kappa_{S(N)} \sim \xi_{S(N)}(T)$ примерно равно размеру куперовской пары в сверхпроводнике (нормальном металле). Следовательно, условие малости $|\delta\Delta(x)| \ll \Delta_0$, т. е. $\Lambda\kappa_{S(N)} \gg 1$, означает, что куперовская пара должна быть много меньше Λ , что может реализоваться при малой прозрачности границы между сверхпроводником и нормальным металлом.

Когда это условие не выполняется, линеаризация уравнений ГЛ неприменима и необходимо решать общие нелинейные уравнения. Аналитическое решение в таком случае тоже можно найти (см. [3, 5]).

4.4. Эффект Джозефсона в SINIS-контакте

Эффект Джозефсона связан с тем, что в системе устанавливается единый параметр порядка. В туннельном контакте параметр порядка проникал через туннельный барьер. В предыдущем разделе мы убедились в том, что параметр порядка может проникать в нормальный металл. Это означает, что эффект Джозефсона возможен в системе SINIS (контакт двух сверхпроводников через нормальный металл с диэлектрическими прослойками на границах), где он весьма

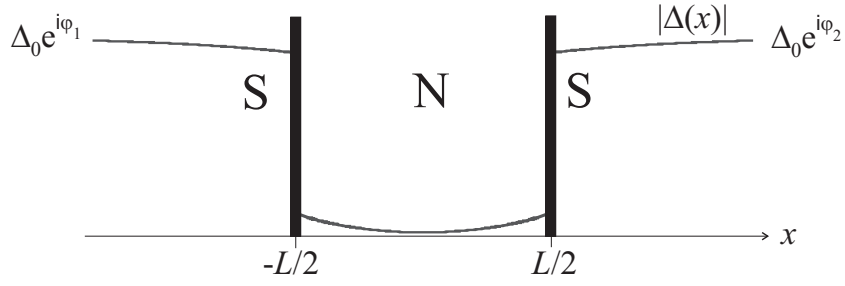


Рис. 4. SINIS-контакт. В глубине двух сверхпроводников их параметры порядка отличаются фазами. Показана пространственная зависимость модуля параметра порядка в контакте

наглядно проявляется в виде интерференции параметров порядка, приходящих от двух берегов.

Количественно эффект Джозефсона в системе SINIS (см. рис. 4) может быть описан в рамках теории ГЛ в тех же предположениях, что и в предыдущем разделе. В отличие от предыдущего раздела необходимо учесть разные фазы в глубине сверхпроводников: $\Delta(x \rightarrow \mp\infty) = \Delta_0 e^{i\varphi_{1(2)}}$. Мы найдём решение в нормальной части контакта и затем вычислим ток.

В граничные условия теперь добавляются фазы:

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta\Delta|_{x=-L/2+0} = -\frac{\Delta_0 e^{i\varphi_1}}{\Lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \delta\Delta|_{x=L/2-0} = \frac{\Delta_0 e^{i\varphi_2}}{\Lambda}. \quad (28)$$

Решение уравнения ГЛ при $|x| < L/2$ будем искать в виде линейной комбинации решений, приходящих от двух берегов:

$$\delta\Delta(x) = c_1 e^{-\kappa_N x} + c_2 e^{\kappa_N x}. \quad (29)$$

Из граничных условий (28) находим

$$c_1 = \frac{\Delta_0 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)/2} \operatorname{ch}\left(\frac{\kappa_N L - i\varphi}{2}\right)}{\Lambda \kappa_N \operatorname{sh}(\kappa_N L)}, \quad c_2 = \frac{\Delta_0 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)/2} \operatorname{ch}\left(\frac{\kappa_N L + i\varphi}{2}\right)}{\Lambda \kappa_N \operatorname{sh}(\kappa_N L)}, \quad (30)$$

где $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Подставляя полученное решение в формулу (6) для тока (при

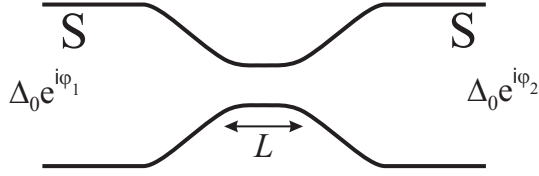


Рис. 5. Слабая связь в виде сужения между двумя сверхпроводниками, L — характерная длина слабой связи

$\mathbf{A} = 0$), найдём

$$j_s = 8eaD\kappa_N \operatorname{Im}[c_1^*c_2] = j_c \sin \varphi, \quad j_c = \frac{4eaD\Delta_0^2}{\Lambda^2\kappa_N \operatorname{sh}(\kappa_N L)} \quad (31)$$

— ток не зависит от точки, в которой мы его вычисляем, как и должно быть. Интерференция параметров порядка, приходящих от двух берегов, приводит к возникновению комбинации $\operatorname{Im}[c_1^*c_2]$. Обратите внимание, что в пределе длинного контакта, т. е. при $\kappa_N L \gg 1$, критический ток экспоненциально мал: $j_c \propto \exp(-\kappa_N L)$.

4.5. Теория Асламазова и Ларкина

До сих пор мы рассматривали туннельные контакты, контакты через нормальный металл, а теперь рассмотрим ещё один тип слабой связи — геометрическое сужение (рис. 5). Проанализируем случай короткого и грязного сужения:

$$l \ll L \ll \xi(T), \lambda(T), \quad (32)$$

где $\lambda(T)$ — мейсснеровская глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник (см., например, [2]). Основа понимания того, как происходит эффект Джозефсона в таких слабых связях, была заложена теорией Асламазова и Ларкина [14].

Малость L позволяет существенно упростить уравнения ГЛ. В первых, соотношение $L \ll \lambda$ даёт возможность в векторном потенциале \mathbf{A} , который должен в принципе рассчитываться из уравнений Максвелла совместно с (4), пренебречь вкладом от токов через слабую связь. Оставшуюся часть \mathbf{A}_0 , отражающую вклад удалённых источников поля, можно представить в виде градиента некоторой

скалярной функции (т. к. для удалённых источников $\text{rot } \mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0 = 0$ в области контакта). Но поскольку величина \mathbf{A} всегда определена с точностью до такого градиента, мы можем выбрать калибровку $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 = 0$, включая тем самым влияние внешних полей в фазу Δ . Во-вторых, при $L \ll \xi$ можно пренебречь в уравнении (4) всеми членами, кроме градиентного, поскольку его величина имеет порядок $\hbar D \Delta_0 / L^2$ (т. к. в сужении Δ меняется на длине L на величину порядка Δ_0), в то время как остальные члены порядка $\alpha |T - T_c| \Delta_0$. Это означает, что по порядку величины градиентный член больше остальных в $(\xi/L)^2$ раз. Таким образом, уравнение (4) сводится просто к уравнению Лапласа:

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \Delta = 0, \quad (33)$$

что позволяет решить задачу до конца даже при произвольной форме слабой связи. Условие больших градиентов физически следует из того, что большим куперовским парам с размерами порядка ξ трудно проникнуть в узкое сужение с размерами много меньше, чем ξ .

Это уравнение нужно решать с граничными условиями:

$$\Delta = \begin{cases} \Delta_0 e^{i\varphi_1}, & \text{в глубине берега 1,} \\ \Delta_0 e^{i\varphi_2}, & \text{в глубине берега 2,} \end{cases} \quad (34)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \Delta|_{\Gamma} = 0, \quad (35)$$

где Γ — граница слабой связи, \mathbf{n} — нормаль к этой поверхности. Последнее условие есть частный случай (12). Как было замечено в работе Асламазова–Ларкина и можно убедиться прямой подстановкой, решение (единственное) краевой задачи (33) – (35) имеет вид

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\varphi_1} (1 - f(\mathbf{r})) + \Delta_0 e^{i\varphi_2} f(\mathbf{r}), \quad (36)$$

где $f(\mathbf{r})$ — действительная функция координат, удовлетворяющая следующей краевой задаче:

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 f = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f|_{\Gamma} = 0, \quad (37)$$

$$f = \begin{cases} 0, & \text{в глубине берега 1,} \\ 1, & \text{в глубине берега 2.} \end{cases} \quad (38)$$

Подставляя решение (36) в (6), получаем для плотности сверхпроводящего тока:

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) = 4eaD\nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) \Delta_0^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (39)$$

Таким образом, плотность тока в каждой точке слабой связи и, следовательно, полный ток пропорциональны $\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ — аналогично случаю туннельного контакта.

Выражение (39) для плотности сверхпроводящего тока содержит функцию $f(\mathbf{r})$, которую при произвольной форме границы найти нельзя. Однако, даже не зная эту функцию, можно выразить полный сверхпроводящий ток через сопротивление контакта в нормальном состоянии. Для этого заметим, что через функцию $f(\mathbf{r})$ выражается также ток \mathbf{j}_N через ту же самую слабую связь в нормальном состоянии. Обозначим скалярный потенциал буквой ϕ . Согласно уравнениям Максвелла, он удовлетворяет уравнению Пуассона $\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi = -4\pi\rho$, где ρ — плотность заряда в проводнике. В проводниках с большой точностью выполняется закон электронейтральности (заряд электронов компенсируется зарядом ионов), поэтому $\rho = 0$ и $\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi = 0$ в каждой точке проводника, даже когда течёт ток. Очевидно, что решение краевой задачи для скалярного потенциала ϕ :

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi|_{\Gamma} = 0, \quad (40)$$

$$\phi = \begin{cases} \phi_1, & \text{в глубине берега 1,} \\ \phi_2, & \text{в глубине берега 2,} \end{cases} \quad (41)$$

записывается аналогично (36) с той же самой функцией $f(\mathbf{r})$:

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_1(1 - f(\mathbf{r})) + \phi_2 f(\mathbf{r}), \quad (42)$$

и поэтому ток в нормальном состоянии:

$$\mathbf{j}_N(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\sigma \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) = \sigma V \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}), \quad (43)$$

где $V = \phi_1 - \phi_2$. Для вычисления полного тока через контакт мы можем проинтегрировать это выражение по любому поперечному сечению \mathcal{S} :

$$I_N = \sigma V \int_{\mathcal{S}} \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) d\mathcal{S}, \quad (44)$$

что должно совпадать с обычным законом Ома: $I_N = V/R_N$, следовательно, мы получаем формулу для сопротивления контакта в нормальном состоянии:

$$\frac{1}{R_N} = \sigma \int_{\mathcal{S}} \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) d\mathcal{S}. \quad (45)$$

Теперь интегрируя (39) по тому же самому сечению \mathcal{S} , мы можем записать результат в виде $I_s = I_c \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ с критическим током, имеющим такой же вид, как и в туннельном контакте (формула (18)):

$$I_c = \frac{\pi \Delta_0^2}{4eT_c R_N}. \quad (46)$$

Заметим, что теория Асламазова–Ларкина не только описывает эффект Джозефсона в слабых связях, но и даёт возможность очень ясно усмотреть его физическое происхождение. Действительно, формула (36) показывает, что в области слабой связи (где $0 < f < 1$) параметр порядка есть линейная суперпозиция двух членов, каждый из которых пропорционален значению Δ в одном из берегов и координатному множителю, плавно спадающему при удалении от данного берега вглубь слабой связи. Таким образом, внутри слабой связи происходит интерференция двух волновых функций, источниками которых являются конденсаты куперовских пар в сверхпроводящих берегах. Такая интерференция немедленно даёт ток $j_s \propto \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$, т. е. эффект Джозефсона.

5. Нестационарный эффект Джозефсона в туннельных структурах

5.1. Общие свойства

Эффект Джозефсона, рассмотренный в разделе 4, называют стационарным, т. к. ток через контакт не меняется во времени. Обратите внимание на очень важную особенность этого эффекта: ток через контакт течёт в отсутствие напряжения на контакте и поэтому является бездиссипативным (не сопровождается выделением джоулева тепла).

Далее мы будем говорить про туннельные контакты, стационарный эффект Джозефсона для которых был рассмотрен в разделе 4.1. Основной результат этого раздела — формула (18) — сразу же вызывает несколько вопросов: 1) что будет, если к такому контакту приложить напряжение, 2) что будет, если через контакт пустить ток, превышающий критический ток I_c . Оказывается, что это две стороны одного и того же вопроса. Дело в том, что через джозефсоновский контакт могут течь два разных вида токов: бездиссипативный сверхпроводящий ток куперовских пар и обычный диссипативный

ток отдельных электронов (сопровождающийся выделением джоулева тепла). Величина каждого из токов определяется условиями, которые мы задаём в берегах контакта.

Стационарный эффект Джозефсона имеет место в случае, когда в берегах задана фиксированная разность сверхпроводящих фаз (пример экспериментальной реализации этого случая — рис. 2). В таких условиях весь ток через контакт — сверхпроводящий, и он не зависит от времени.

Пусть теперь к туннельному контакту приложена от внешнего источника некоторая разность потенциалов V . Тогда в контакте возникает электрическое поле \mathbf{E} , которое мы будем описывать скалярным потенциалом ϕ , так что $\mathbf{E} = -\nabla_{\mathbf{r}}\phi$. Влияние этого поля на сверхпроводящий ток через контакт можно выяснить уже на основании требований калибровочной инвариантности, т. е. на основании того, что скалярный потенциал ϕ (вместе с векторным потенциалом \mathbf{A}) определены неоднозначно и могут быть подвергнуты калибровочному преобразованию, при котором никакие физические величины не меняются (см. [15], § 18).

В отсутствие поля (при $\phi = 0$) фаза волновой функции не зависит от времени: $\partial\varphi/\partial t = 0$, что соответствует стационарному эффекту Джозефсона. Для обобщения этого равенства на случай наличия электрического поля заметим, что общее соотношение должно быть инвариантно по отношению к калибровочному преобразованию скалярного потенциала:

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f(t)}{\partial t}, \quad (47)$$

не затрагивающему векторный потенциал (который предполагается не зависящим от времени). При этом волновые функции электронов домножаются на фазовые множители (см. [16], § 111):

$$\Psi \rightarrow \Psi \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} f\right). \quad (48)$$

Сверхпроводящий параметр порядка является волновой функцией пар электронов (куперовских пар), поэтому связан с произведением волновых функций двух электронов, следовательно, его фаза преобразуется как

$$\varphi \rightarrow \varphi + \frac{2e}{\hbar c} f(t). \quad (49)$$

Отсюда ясно, что калибровочно инвариантным будет соотношение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{2e}{\hbar}\phi = 0, \quad (50)$$

переходящее в $\partial\varphi/\partial t = 0$ при $\phi = 0$. Фазу φ и потенциал ϕ в этом соотношении следует снабдить индексами 1, 2, т. к. оно должно выполняться для каждого из сверхпроводящих берегов. После этого, вычитая одно из другого, получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar}V, \quad (51)$$

где $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, $V = \phi_1 - \phi_2$.

Этот фундаментальный результат теории эффекта Джозефсона, связывающий скорость изменения во времени разности фаз между берегами контакта с напряжением на контакте, очень важен для дальнейшего рассмотрения. Несмотря на кажущуюся простоту его вывода, он основан на глубоком понимании микроскопической природы сверхпроводящего состояния, связанной с образованием куперовских пар, — именно из этих соображений была получена формула (49).

В случае постоянного электрического поля (51) даёт

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{2e}{\hbar}Vt, \quad (52)$$

где φ_0 — константа. Поскольку сверхпроводящий ток через контакт является периодической функцией разности фаз φ , а разность фаз зависит от времени линейно, мы сразу приходим к выводу о том, что при приложении к джозефсоновскому контакту постоянной разности потенциалов V возникает нестационарный эффект Джозефсона: сверхпроводящий ток становится переменным с частотой

$$\omega_J = \frac{2eV}{\hbar}. \quad (53)$$

При этом явная зависимость тока от времени — вопрос более сложный, и ответ на него зависит от величины разности потенциалов. Проще всего случай, когда разность потенциалов мала, так что джозефсоновская частота ω_J много меньше характерной для сверхпроводимости частоты Δ/\hbar :

$$\hbar\omega_J = 2eV \ll \Delta. \quad (54)$$

В таком случае нормальная компонента тока (неизбежно возникающая при наличии разности потенциалов) мала, и почти весь ток является сверхпроводящим, зависящим от времени в соответствии с (18), куда нужно теперь подставить зависящую от времени разность фаз (52):

$$I_s(t) = I_c \sin \left(\varphi_0 + \frac{2eV}{\hbar} t \right). \quad (55)$$

Потребляемая в контакте мощность даётся произведением $I(t)V$; её среднее (по времени) значение равно нулю, т. е. систематическая затрата энергии от внешнего источника отсутствует — как и должно быть для сверхпроводящего тока, не связанного с диссипацией энергии (при этом, конечно, малый нормальный ток, которым мы пренебрегли, будет приводить к слабой диссипации).

Для обсуждения более общей ситуации, когда нормальный ток не обязательно мал по сравнению со сверхпроводящим, мы рассмотрим контакт в немного другом режиме — не заданного напряжения, а заданного тока.

5.2. Резистивная модель

Предположим, что контакт находится в режиме заданного тока, а напряжение подстраивается под него в соответствии со свойствами системы (такой режим часто изучается в эксперименте). Пока заданный ток I меньше критического I_c , весь ток переносится куперовскими парами (т. е. сверхпроводящим током). Если же $I > I_c$, то куперовские пары уже не могут обеспечить такой ток, и в дополнение к сверхпроводящему току возникает нормальная компонента, а значит, и напряжение на контакте, т. к. нормальная компонента связана с диссипацией.

Обратите внимание, что при $I > I_c$ сверхпроводимость в берегах, а также сверхпроводящая связь между берегами не разрушаются — нормальная компонента тока появляется *в дополнение* к сверхпроводящей. Эта ситуация не имеет отношения к так называемому току распаривания объёмного сверхпроводника, связанному с тем, что куперовские пары начинают разрушаться при определённой скорости движения, — в таком случае при превышении током соответствующего критического значения сверхпроводимость разрушалась бы полностью. В джозефсоновском же контакте речь идёт именно о свойствах контакта, и ток I_c мал в силу большого сопротивления

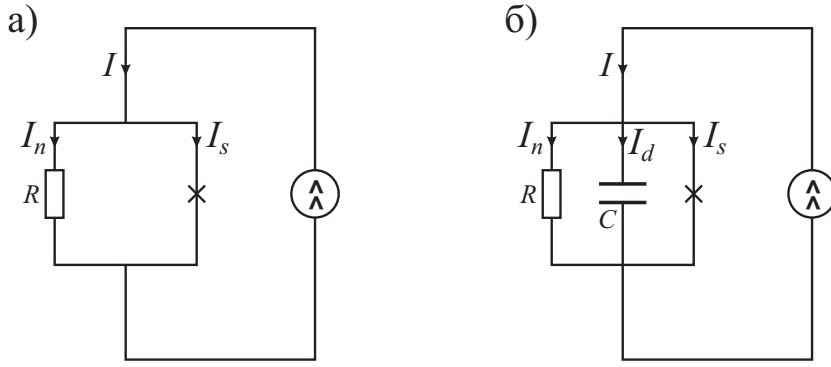


Рис. 6. а) Резистивная модель джозефсоновского перехода, включённого в цепь с источником тока. Джозефсоновский контакт обозначен крестиком. Полный ток I состоит из сверхпроводящего тока $I_s = I_c \sin \varphi$ и нормального диссипативного тока I_n . б) Обобщение на случай наличия ёмкости.

В полный ток добавляется ток смещения через конденсатор I_d

туннельной границы, в частности гораздо меньше тока распаривания берегов.

Итак, оказывается, что при $I > I_c$ на контакте возникает напряжение. Фундаментальным результатом теории эффекта Джозефсона является соотношение (51) между напряжением на контакте и скоростью изменения во времени разности фаз между берегами.

Рассмотрим нестационарный эффект Джозефсона в рамках так называемой резистивной модели, которая прямо вытекает из этой картины. Полный ток I через систему является суммой сверхпроводящего тока I_s , определяемого формулой (18), и нормального тока $I_n = V/R$, где R — сопротивление контакта в нормальном состоянии. Таким образом, джозефсоновский контакт можно представить в виде параллельного соединения идеального (бездиссипативного) джозефсоновского контакта и сопротивления R (см. рис. 6а).

Используя соотношение (51), получаем уравнение

$$\frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + I_c \sin \varphi = I, \quad (56)$$

определяющее динамику фазы при заданном токе I через контакт. Обратите внимание, что вся микроскопическая информация о контакте содержится в величинах I_c и R , в то время как резистивная

модель принимает эти величины как данные и изучает поведение макроскопической характеристики контакта — разности фаз φ , которая характеризует сверхпроводящее состояние контакта в целом, т. е. содержит информацию только о фазе сверхпроводящего конденсата, состоящего из огромного количества электронов.

Уравнение (56) на функцию $\varphi(t)$ интегрируется в элементарных функциях, после чего формула (51) при подходящем выборе начала отсчёта времени даёт

$$V(t) = R \frac{I^2 - I_c^2}{I + I_c \cos \omega t}, \quad (57)$$

где

$$\omega = \frac{2e}{\hbar} R \sqrt{I^2 - I_c^2}. \quad (58)$$

Итак, если заданный постоянный ток I через контакт превышает критический ток контакта I_c , на нём возникает напряжение V , периодически зависящее от времени. Следовательно, джозефсоновский контакт начинает излучать электромагнитные волны — это явление называется джозефсоновской генерацией.

Усреднение формулы (57) по времени приводит к соотношению

$$2e\bar{V} = \hbar\omega, \quad (59)$$

имеющему простую физическую интерпретацию: при переходе с одной стороны контакта на другую куперовские пары в среднем приобретают энергию $2e\bar{V}$, которая затем выделяется в виде кванта электромагнитного излучения с частотой ω .

Вольтметр постоянного тока, подключенный к переходу, будет показывать именно среднее напряжение \bar{V} , поэтому полученная с его помощью вольт-амперная характеристика будет иметь вид

$$\bar{V} = R \sqrt{I^2 - I_c^2}, \quad (60)$$

следующий из формул (59) и (58) и показанный на рис. 7а.

Если ток I через переход лишь немного превышает I_c , то в основном он течёт в виде сверхпроводящего тока I_s через джозефсоновский элемент на эквивалентной схеме рис. 6а, в то время как нормальный ток мал. Наоборот, при $I \gg I_c$ почти весь ток течёт через резистор ($I \approx I_n$), и вольт-амперная характеристика на этом

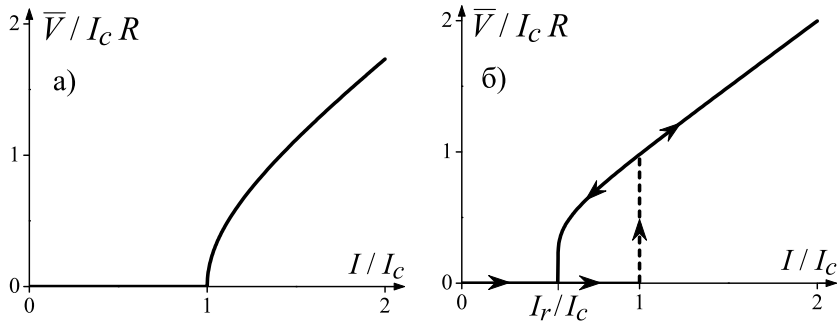


Рис. 7. Вольт-амперная характеристика джозефсоновского перехода. а) Переход без ёмкости. Напряжение на контакте возникает при $I > I_c$. б) Переход с ёмкостью, $\beta = 5$. С увеличением тока напряжение возникает скачком при $I > I_c$. При уменьшении тока напряжение пропадает при токе захвата I_r , который меньше, чем I_c , т. е. имеет место гистерезис

участке выходит на линейную характеристику перехода в нормальном состоянии.

Для джозефсоновского контакта наиболее энергетически выгодным является состояние с разностью фаз, равной нулю (или целому кратному 2π), — при этом ток через контакт отсутствует. Если же разность фаз φ ненулевая и через контакт течёт некоторый ток I_s , то это означает, что в контакте запасена энергия. Найти её можно следующим образом. Будем отсчитывать энергию от энергии при $\varphi = 0$ и представим себе, что ток I_s возник в результате медленного нарастания разности фаз от нуля до φ в течение некоторого времени t . Если фаза менялась во времени, значит, на контакте возникало напряжение, и запасённую энергию можно найти как

$$E_s = \int_0^t I_s V dt, \quad (61)$$

где V определяется по формуле (51). Подставляя сюда также обычное джозефсоновское соотношение $I_s = I_c \sin \varphi$ и переходя к интегрированию по φ , получаем

$$E_s = E_c(1 - \cos \varphi), \quad (62)$$

где

$$E_c = \frac{\hbar I_c}{2e}. \quad (63)$$

Энергию (62) называют джозефсоновской энергией. Джозефсоновский переход можно рассматривать как нелинейный индуктивный элемент, запасаящий энергию при изменении тока через него.

Формула (62) для зависимости $E_s(\varphi)$ применима для случая синусоидальной зависимости сверхпроводящего тока от разности фаз. Это так в туннельном контакте, но в общем случае зависимость $E_s(\varphi)$ может быть более сложной. Мы легко можем, однако, выразить сверхпроводящий ток через джозефсоновскую энергию в общем случае. Для этого продифференцируем формулу (61) по времени, что даёт $I_s V = \frac{\partial E_s}{\partial t}$ и далее $I_s V = \frac{\partial E_s}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar} \frac{\partial E_s}{\partial \varphi}$. В результате напряжение сокращается, и мы получаем общее соотношение

$$I_s = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial E_s}{\partial \varphi}. \quad (64)$$

Обсуждение джозефсоновской энергии $E_s(\varphi)$ относится непосредственно к контакту. Если же рассматривать джозефсоновский контакт не сам по себе, а включённым в цепь с источником тока (как мы и предполагали в формулировке резистивной модели), то при вычислении свободной энергии цепи нужно также учитывать энергию, затрачиваемую источником тока:

$$E_I = \int_0^t IV dt = \frac{\hbar I}{2e} \varphi. \quad (65)$$

Таким образом, свободная энергия цепи для случая заданного тока как функция разности фаз на контакте даётся формулой

$$E = E_c(1 - \cos \varphi) - \frac{\hbar I}{2e} \varphi, \quad (66)$$

которая проиллюстрирована на рис. 8. Такую форму кривой, получающуюся из формулы (66), часто называют «стиральной доской».

Обсуждение эффекта Джозефсона на языке $E(\varphi)$ становится весьма наглядным. При $I < I_c$ фаза φ находится в локальном минимуме свободной энергии, что соответствует стационарному эффекту Джозефсона (см. рис. 8а). С увеличением тока I средний наклон

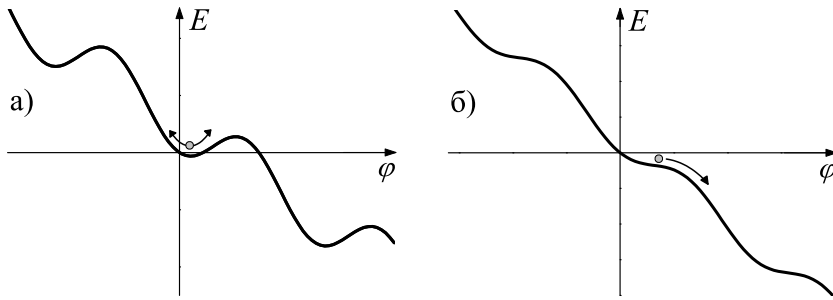


Рис. 8. Энергия $E(\varphi)$ джозефсоновского перехода с заданным током — так называемая «стиральная доска». а) Случай $I < I_c$, стационарный эффект Джозефсона: фаза φ остаётся вблизи одного из локальных минимумов. б) Случай $I > I_c$, нестационарный эффект Джозефсона: минимумов нет, фаза φ движется вниз по «стиральной доске»

«стиральной доски» возрастает, а глубина локальных минимумов уменьшается. При $I = I_c$ локальные минимумы пропадают, и фаза начинает «скатываться» вниз по «стиральной доске» — значит, φ непрерывно меняется во времени, следовательно, на контакте возникает напряжение — это и есть нестационарный эффект Джозефсона (см. рис. 8б).

5.3. Резистивная модель с ёмкостью

При составлении эквивалентной схемы джозефсоновского контакта, изображённой на рис. 6а, мы не учли ещё один фактор, который может оказаться важным: как видно из самого устройства джозефсоновского контакта, в котором два берега разделены прослойкой диэлектрика, такая конструкция напоминает конденсатор, следовательно, должна обладать некоторой ёмкостью. Если данная ёмкость мала (с чем её надо сравнивать, станет ясно из дальнейшего рассмотрения), то ею можно пренебречь, и применимо наше предыдущее рассмотрение. В этом же разделе мы обсудим, к чему приводит наличие ёмкости.

Итак, в общем случае в рамках резистивной модели необходимо дополнить эквивалентную схему параллельно включённой ёмкостью C (см. рис. 6б). Хотя постоянный ток через конденсатор невозможен,

тем не менее через него может течь переменный ток смещения:

$$I_d = C \frac{dV}{dt}, \quad (67)$$

связанный с перезарядкой обкладок конденсатора. Этот ток необходимо добавить в левую часть соотношения (56), одновременно выразив напряжение через разность фаз по общей формуле (51). Домножив также обе стороны на $\hbar/2e$, получаем следующее уравнение на функцию $\varphi(t)$:

$$\left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C \ddot{\varphi} + \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{1}{R} \dot{\varphi} + E_c \sin \varphi = E_c \frac{I}{I_c}, \quad (68)$$

которое имеет такой же вид, как и уравнение движения маятника под действием вынуждающей силы и при наличии трения (см., например, [17]). Кроме того, отождествляя φ с линейной координатой x , мы можем смотреть на это уравнение как на уравнение движения частицы массой $(\hbar/2e)^2 C$ при наличии трения с коэффициентом трения $\eta = (\hbar/2e)^2/R$ в периодическом потенциале $E_c(1 - \cos \varphi)$ под действием внешней силы $E_c(I/I_c)$. Собственная частота малых колебаний вблизи одного из минимумов потенциала равна

$$\omega_p = \sqrt{\frac{2eI_c}{\hbar C}} \quad (69)$$

и называется в джозефсоновском случае плазменной частотой перехода. Плазменная частота может рассматриваться также как резонансная частота

$$\omega_p = \frac{c}{\sqrt{L_J C}} \quad (70)$$

контура с ёмкостью C и «собственной индуктивностью» джозефсоновского перехода:

$$L_J = \frac{\hbar c^2}{2eI_c} = \frac{c\Phi_0}{2\pi I_c}. \quad (71)$$

«Масса», определяющая инерционное поведение перехода при изменении φ , связана с величиной ёмкости C . Таким образом, рассмотренный в предыдущем разделе случай соответствует безмассовой частице. К чему же теперь приводит наличие массы? Предположим, что мы сначала увеличиваем ток I от нуля до бесконечности, а затем уменьшаем обратно до нуля. Как и раньше, массивная частица

начнёт непрерывно двигаться при наклоне «стиральной доски», соответствующем $I = I_c$. Правда, в отличие от безмассовой частицы, которая при I , слегка превышающем I_c , движется очень медленно, частица с конечной массой сразу же разгонится до некоторой конечной скорости (т.е. с увеличением тока при $I = I_c$ на контакте скачком возникнет конечное напряжение). При дальнейшем увеличении наклона скорость будет расти. Существенная особенность массивной частицы проявится при уменьшении тока. Уменьшив ток до I_c , мы снова получим частицу, движущуюся с конечной скоростью. В связи с инерцией частицы остановить её можно, только несколько уменьшив угол наклона по сравнению с критическим, т.е. при некотором «токе возврата» $I_r < I_c$. Ток возврата тем меньше, чем выше ёмкость («масса») и чем выше сопротивление (т.е. чем меньше «вязкость»).

Таким образом, наличие ёмкости у джозефсоновского контакта приводит к гистерезису его вольт-амперной характеристики (см. рис. 7б — зависимость $\bar{V}(I)$ различна для случаев увеличения и уменьшения I). Количественно ток возврата и гистерезисные свойства определяются величиной параметра МакКамбера:

$$\beta = \frac{2e}{\hbar} I_c C R^2. \quad (72)$$

С помощью параметра β и характерной джозефсоновской частоты $\omega_c = (2e/\hbar)I_c R$ мы можем записать (68) в более компактном виде:

$$\beta \frac{\ddot{\varphi}}{\omega_c^2} + \frac{\dot{\varphi}}{\omega_c} + \sin \varphi = \frac{I}{I_c}. \quad (73)$$

При $\beta \ll 1$ ёмкостным членом можно пренебречь. В этом случае уравнение сводится к виду (56), и вольт-амперная характеристика имеет однозначный вид (60). С увеличением β возникает гистерезис с током возврата I_r , который убывает с ростом β и стремится к нулю в пределе $\beta \rightarrow \infty$ (т.е. в этом пределе возвратная часть вольт-амперной характеристики становится линейной).

Литература

1. Josephson B. D. Possible new effects in superconductive tunnelling // Phys. Lett. — 1962. — V. 1. — P. 251–253.
2. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Курс теоретической физики. Т. IX. Статистическая физика (часть 2). — М.: Физматлит, 2004.
3. Шмидт В. В. Введение в физику сверхпроводников. — М.: МЦНМО, 2000.
4. Тинкхам М. Введение в сверхпроводимость. — М.: Атомиздат, 1980.
5. Жен П. де. Сверхпроводимость металлов и сплавов. — М.: Мир, 1968.
6. Кулик И. О., Янсон И. К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. — М.: Наука, 1970.
7. Свидзинский А. В. Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости. — М.: Наука, 1982.
8. Likharev K. K. Superconducting weak links // Rev. Mod. Phys. — 1979. — V. 51. — P. 101–159.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. V. Статистическая физика (часть 1). — М.: Физматлит, 2005.
10. Минеев В. П., Самохин К. В. Введение в теорию необычной сверхпроводимости. — М.: МФТИ, 1998.
11. Kornin N. B. Theory of Nonequilibrium Superconductivity. — Oxford: Oxford University Press, 2001.
12. Зайцев Р. О. О решении уравнений сверхпроводимости для системы сверхпроводящего и нормального металлов // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 48. — С. 644–651.
Зайцев Р. О. Граничные условия для уравнений сверхпроводимости при температурах, близких к критической // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 48. — С. 1759–1771.

13. Зайцев А. В. Квазиклассические уравнения теории сверхпроводимости для контактирующих металлов и свойства микроконтактов с сужением // ЖЭТФ. — 1984. — Т. 86. — С. 1742–1758. Куприянов М. Ю., Лукичев В. Ф. Влияние прозрачности границ на критический ток грязных SS'S структур // ЖЭТФ. — 1988. — Т. 94. — С. 139–149.
14. Асламазов Л. Г., Ларкин А. И. Эффект Джозефсона в точечных сверхпроводящих контактах // Письма в ЖЭТФ. — 1969. — Т. 9. — С. 150–154.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. II. Теория поля. — М.: Физматлит, 2006.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: Физматлит, 2004.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. I. Механика. — М.: Физматлит, 2004.