

Лабораторная работа МФТИ 1.3 «Эффект Рамзауэра». Дополнительные материалы.

Оглавление

Опыт по наблюдению эффекта Рамзауэра.....	1
Вычисление прозрачности одномерной потенциальной ямы.....	2
Элементарные сведения о понятии волновой функции и уравнении Шредингера.....	2
Решение одномерного уравнения Шредингера для частицы, налетающей на потенциальную яму.....	3
Анализ зависимости коэффициента прохождения от параметров задачи.....	5
Возвращаясь к трёхмерному миру. Существование связанного состояния в трёхмерной потенциальной яме.....	7

Опыт по наблюдению эффекта Рамзауэра

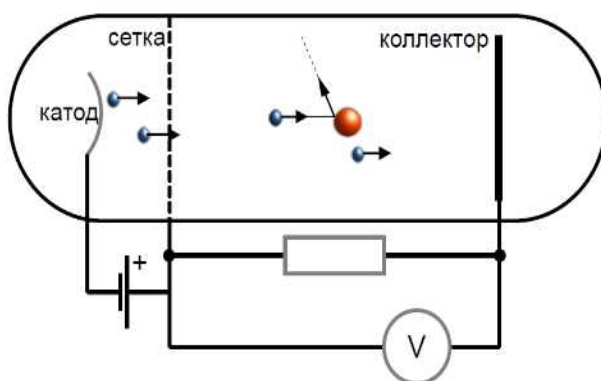


Рисунок 1 Упрощенная схема опыта по наблюдению эффекта Рамзауэра

Упрощённая схема опыта по наблюдению эффекта Рамзауэра показана на рисунке 1. Электроны проходят ускоряющую разность потенциалов между катодом и сеткой и попадают в зазор между сеткой и электродом-коллектором, где могут взаимодействовать с разреженным газом, наполняющим лампу. Рассеяние на атомах газа уменьшает количество электронов, достигающих коллектора. Долетевшие электроны создают небольшой ток «стекающий» на сетку через балластное сопротивление. Экспериментатор измеряет ток через балластный резистор в зависимости от ускоряющей разности потенциалов, это позволяет изучить как зависит рассеяние электронов на атомах от их энергии.

Результатом опыта (см. рисунок 2) является наблюдение резкого роста тока в цепи коллектор-сетка при некотором значении ускоряющего напряжения. Это свидетельствует о заметном ослаблении рассеяния электронов на атомах и является квантовым аналогом «просветления оптики».

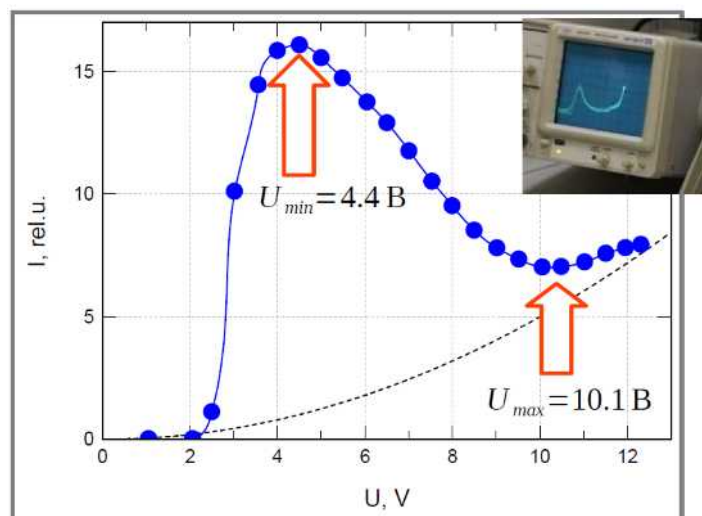


Рисунок 2 Пример экспериментальных результатов в опыте по наблюдению эффекта Рамзауэра (данные С.Н.Жабина, МФТИ).

Строгое рассмотрение задачи о рассеянии электрона на атоме требует решения трёхмерной задачи о взаимодействии электрона с эффективным потенциалом атома. В рамках качественной и полуколичественной оценки эта модель может быть заменена на модель одномерной прямоугольной ямы. Рассмотрим некоторые особенности решения квантовомеханической задачи о прохождении частицы на д одномерной ямой.

Вычисление прозрачности одномерной потенциальной ямы

Элементарные сведения о понятии волновой функции и уравнении Шредингера

Распределение вероятности обнаружить частицу в какой-то области пространства dV описывается в квантовой физике комплексной волновой функцией $\psi(\vec{r})$:

$$d w = |\psi|^2 dV .$$

Волновая функция стационарного состояния (состояния с определённой энергией E) подчиняется стационарному уравнению Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(\vec{r}) \psi = E \psi ,$$

где $U(\vec{r})$ – потенциальная энергия частицы.

Уравнение Шредингера локальное. При сшивке решений уравнения Шредингера на границе между двумя областями от волновой функции требуются:

1. непрерывность, так как скачок волновой функции будет соответствовать резкому нефизическому скачку в распределении вероятности
2. гладкость (за исключением нефизического, но полезного случая бесконечно высокой стенки), так как скачок производной соответствует нефизическому скачку вектора потока вероятности на границе

Нормировка волновой функции $\int \psi^* \psi dV = 1$, выражающая математическое требование

суммы всех вероятностей, равной 1, применяется при финитном движении частицы (волновая функция отлична от нуля в ограниченной области пространства).

Для свободной частицы ($U=0$) уравнение Шредингера имеет решение вида плоской волны $\psi = C e^{i\vec{k}\vec{r}}$. Нормировку такого решения удобно выразить через поток частиц (число частиц, пересекающих площадку dS за время dt) или поток вероятности. Полуклассическое вычисление потока вероятности:

$$j = \frac{dN}{dS dt} = \frac{|\psi|^2 dV}{dS dt} = \frac{|\psi|^2 dS \frac{p}{m} dt}{dS dt} = \frac{\hbar k}{m} |\psi|^2 .$$

Формально более строгое рассмотрение вводит вектор потока вероятности

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) ,$$

что даёт тот же ответ при подстановке плоской волны.

Решение одномерного уравнения Шредингера для частицы, налетающей на потенциальную яму

Рассмотрим одномерную задачу с потенциалом

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -U_0, & 0 < x < l \\ 0, & x > l \end{cases} .$$

Такой потенциал называют потенциальной ямой глубиной U_0 и шириной l .

Пусть на такую яму из минус бесконечности падает поток частиц. Определим долю частиц, прошедших через яму.

Одномерное уравнение Шредингера $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + (U-E)\psi = 0$ в областях $x < 0$ и $x > l$

(где $U=0$) имеет решение вида $\psi = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$, где $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$. В области

$$0 < x < l \text{ (где } U = -U_0 \text{)} \quad \psi = A e^{ik_2 x} + B e^{-ik_2 x}, \text{ где } k_2^2 = \frac{2m(E+U_0)}{\hbar^2} .$$

Слагаемые с положительным знаком в экспоненте соответствуют волне, распространяющейся слева направо. Слагаемые с отрицательным знаком — волне, распространяющейся справа налево.

В силу произвольности выбора падающего потока частиц, можно положить одну из констант равной произвольному числу. Удобно таким образом отнормировать падающий поток. Кроме того, после ямы имеет физический смысл только решение, распространяющееся слева направо (не от чего отражаться обратной волне).

Таким образом, решения для волновой функции надо искать в виде:

$$\psi = \begin{cases} e^{ik_1 x} + A e^{-ik_1 x}, & x < 0 \\ C_1 e^{ik_2 x} + C_2 e^{-ik_2 x}, & 0 < x < l \\ B e^{ik_1 x}, & x > l \end{cases} .$$

Требования непрерывности и гладкости при $x=0$ и $x=l$ приводят к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1+A=C_1+C_2 \\ C_1 e^{ik_2 l} + C_2 e^{-ik_2 l} = B e^{ik_1 l} \\ k_1(1-A) = k_2(C_1 - C_2) \\ k_2(C_1 e^{ik_2 l} - C_2 e^{-ik_2 l}) = k_1 B e^{ik_1 l} \end{cases} .$$

Система позволяет найти все коэффициенты, но для нахождения коэффициента прохождения (или коэффициента отражения) достаточно найти амплитуду прошедшей (отражённой) волны B (A). После прямолинейных преобразований получаем:

$$B = \frac{4 k_1 k_2 e^{-ik_1 l}}{(k_1 + k_2)^2 e^{-ik_2 l} - (k_1 - k_2)^2 e^{ik_2 l}} .$$

Коэффициент прохождения над ямой определяется отношением потоков падающих и прошедших частиц, то есть¹:

$$D = |B|^2 = B B^* = \frac{16 k_1^2 k_2^2}{(k_1 + k_2)^4 + (k_1 - k_2)^4 - (k_1 + k_2)^2 (k_1 - k_2)^2 (e^{2ik_2 l} + e^{-2ik_2 l})} .$$

После арифметических преобразований и использования формулы косинуса двойного угла получим окончательно:

$$\begin{aligned} D &= \frac{16 k_1^2 k_2^2}{16 k_1^2 k_2^2 + 4(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 l)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1} \right)^2 \sin^2(k_2 l)} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{E}{E+U_0}} - \sqrt{\frac{E+U_0}{E}} \right)^2 \sin^2(k_2 l)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{U_0^2}{E(E+U_0)} \sin^2(\sqrt{E+U_0} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} l)} \end{aligned} .$$

Если энергии выразить в электронвольтах, а длину барьера в ангстремах, то для электрона

$$D = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{U_0^2}{E(E+U_0)} \sin^2 \left(\sqrt{E+U_0} [\text{эВ}] \frac{l [\text{Å}]}{1.95} \right)} .$$

Возникают осцилляции коэффициента прохождения, который в этой модели обращается в 1 если *над ямой* укладывается несколько полуволин де Бройля.

¹ Внимание — здесь неявно использован тот факт, что волновой вектор одинаков по величине слева и справа от ямы, в общем случае возникло бы ещё отношение квадратов волновых векторов.

Анализ зависимости коэффициента прохождения от параметров задачи

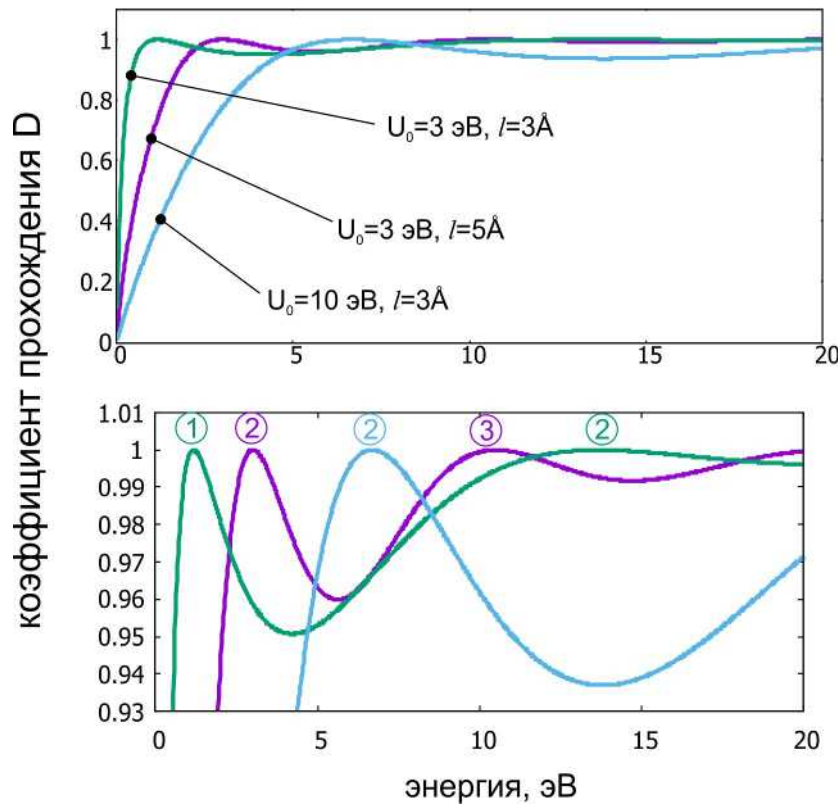


Рисунок 3: Зависимость коэффициента пропускания D от энергии налетающего электрона для различных глубины и ширины одномерной потенциальной ямы. На нижнем рисунке показан увеличенный фрагмент вблизи единичного значения коэффициента пропускания. Цифры в кружках на нижнем рисунке — количество полуволн де Бройля, укладывающиеся над ямой в соответствующем максимуме пропускания.

Примеры вычисленных зависимостей $D(E)$ для нескольких значений глубины и ширины ямы показаны на рисунке 3.

Условие «просветления» ($D=1$): $\sqrt{E+U_0}[\text{эВ}] \frac{l[\text{Å}]}{1.95} = \pi n$, можно заметить, что «светлые максимумы» могут начать нумероваться с $n>1$, минимальное значение n :

$$n_{min} = \left\lceil \frac{1}{\pi} \sqrt{U_0}[\text{эВ}] \frac{l[\text{Å}]}{1.95} \right\rceil,$$

где $\lceil x \rceil$ обозначает округление вверх.

Условие «затемнения» (где наблюдается минимум D), строго говоря, требует дифференцирования выражения для коэффициента пропускания по энергии, так как множитель перед квадратом синуса тоже зависит от энергии электрона. В качестве приближённого критерия минимума пропускания (пользуясь тем, что синус меняется заметно быстрее множителя перед ним) можно потребовать выполнения условия:

$$\sqrt{E+U_0}[\text{эВ}] \frac{l[\text{Å}]}{1.95} = \pi n + \frac{\pi}{2}.$$

Точность этого приближения проиллюстрирована на рисунке 4. Вообще говоря, отличие между приближенным и точным положениями минимума пропускания составляет порядка

10%. Это, однако, не слишком критично для лабораторной работы в силу большой (вполне сравнимой) погрешности определения положения широкого минимума коэффициента пропускания, а также в силу совершенно неясной точности замены реальной трёхмерной задачи с каким-то (неизвестным) реальным потенциалом взаимодействия электрона и атома модельной одномерной задачей с прямоугольной потенциальной ямой.

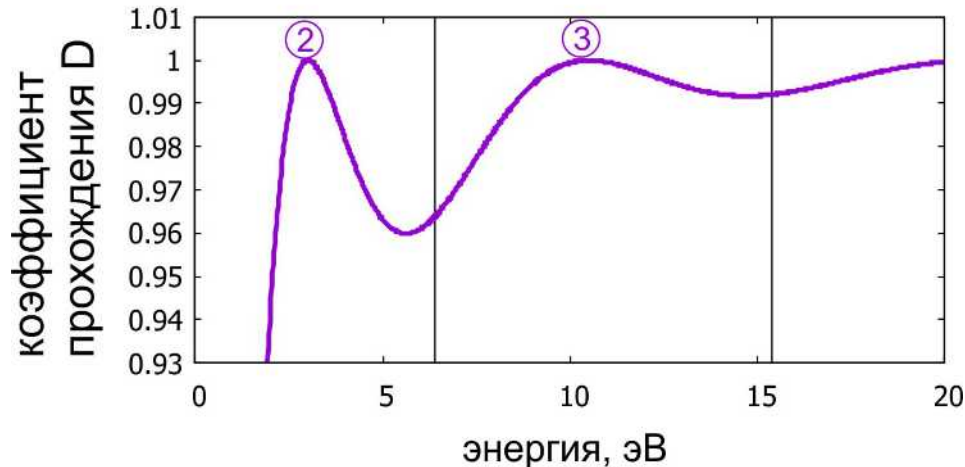


Рисунок 4 Сравнение точного решения для коэффициента пропускания электрона гад одномерной потенциальной ямой ($U_0=3\text{эВ}$, $l=5\text{Å}$) и приближённого критерия минимума пропускания (вертикальные прямые).

При наблюдении последовательных «светлого» и «тёмного» участков ВАХ при энергиях электронов $E_{light} < E_{dark}$, строго говоря, невозможно независимо определить номер наблюдаемого экстремума n . Номер первого наблюдаемого просветления зависит от соотношения чисел: так как $E > 0$, а в атоме можно ожидать $U_0 \sim 10\text{эВ}$ (порядка энергии ионизации) и $l \sim 1\text{Å}$ (типичный размер атома), то можно ожидать, что для первого просветления $n=1,2,3$ (действительно, рисунок 3 показывает, что при вполне разумных значениях параметров первый наблюдаемый пик «просветления» может соответствовать $n=2$). Для «тёмного» экстремума с $n=0$, который мог бы наблюдаться при самой маленькой энергии, может легко оказаться, что $\sqrt{U_0} \frac{l}{1.95} > \frac{\pi}{2}$, то есть при положительной энергии электрона это равенство не выполнить.

Возводя в квадрат и вычитая условия «просветления» и «затемнения» (приближённое условие «затемнения») можно исключить глубину ямы:

$$(E_{dark} - E_{light}) \left(\frac{l}{1.95} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4} + \pi^2 n,$$

где энергии выражены в электронвольтах, а ширина ямы — в ангстремах.

Разделив условия «просветления» и «затемнения» можно исключить размер ямы:

$$\frac{E_{dark} + U_0}{E_{light} + U_0} = \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^2$$

и выразить таким образом глубину ямы. Уравнения выше позволяют получить целую серию возможных ответов для разных значений числа n , характеризующего наблюдаемый пик просветления.

Из рисунка 3 видно, что максимумы D («просветления») выражены гораздо лучше, чем

минимумы («затемнения»). Для прояснения этого вопроса можно построить трёхмерный график на плоскости (E, l) для зафиксированного значения U_0 (рисунок 5).

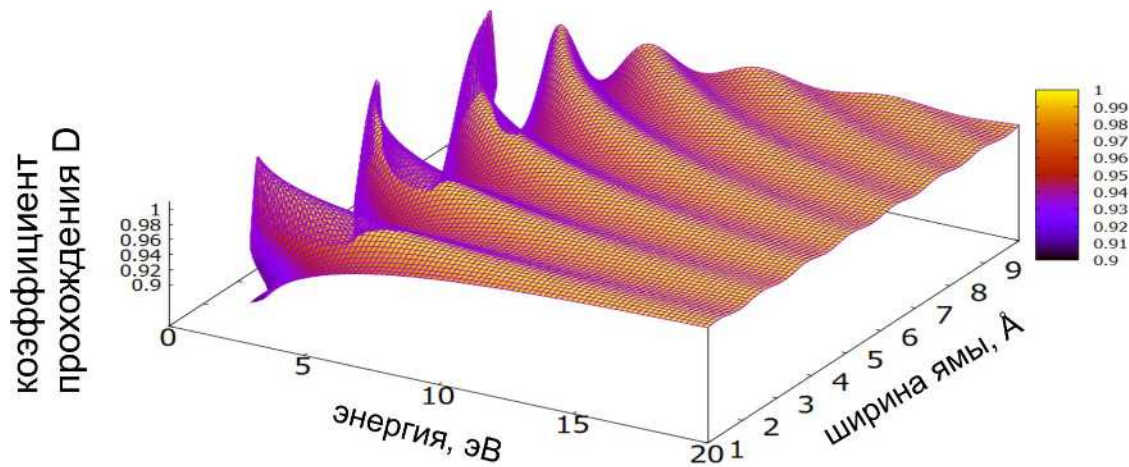


Рисунок 5 Зависимость $D(E, l)$ для $U_0=3$ эВ .

Из рисунка 5 видна особенность функции $D(E, l)$: так как в условиях эксперимента мы сканируем по энергии электронов, то после первого, относительно острого, «светлого» экстремума сечение поверхности $D(E, l)$ плоскостью $l=const$ идёт почти вдоль «ложбины» в рельефе функции $D(E, l)$ — так что минимум получается очень широким и трудно определяемым.

Возвращаясь к трёхмерному миру. Существование связанного состояния в трёхмерной потенциальной яме.

Для примера экспериментальных данных, показанного на рисунке 2, получаются следующие варианты параметров эффективной потенциальной ямы (глубины U_0 и «радиуса атома» $R=l/2$:

- для $n=1$ $U_0=0.2$ эВ $R=1.4$ Å
- для $n=2$ $U_0=5.7$ эВ $R=1.9$ Å
- для $n=3$ $U_0=11.4$ эВ $R=2.3$ Å

все приведённые значения имеют ожидаемый для атома порядок (характерная энергия порядка электрон-вольт, характерный размер несколько ангстрем).

Однако, некоторая дополнительная информация может быть получена из этих результатов (это, конечно, оценочное рассуждение, так как мы не учитываем реальный потенциал взаимодействия электрона из атома). Если мы вернемся от модельной одномерной задачи к трёхмерному миру, но по-прежнему для простоты будем считать, что эффективная потенциальная яма атома «прямоугольная»: $U = \begin{cases} -U_0, r < R \\ 0, r > R \end{cases}$, то можно вспомнить

известный результат квантовой механики (мы его здесь выводим не будем), что в такой потенциальной яме связанное состояние возникает при достаточной «мощности ямы».

Точнее, связанное состояние в такой яме есть, если $R \frac{\sqrt{2mU_0}}{\hbar} > \frac{\pi}{2}$.

В лабораторной работе в используемой лампе присутствует инертный газ — химическим свойством которого является именно отсутствие возможности принять еще один электрон для образования химической связи. Из возможных решений, приведенных выше, только самая мелкая яма с $U_0=0.2$ эВ (случай $n=1$) удовлетворяет этому «свойству инертности». Это является некоторым аргументом (не самым сильным в силу приближенности используемой модели) в пользу выбора именно этого решения по результатам опыта.