Туннелирование под прямоугольным барьером.

Задача: Найти коэффициент прохождения частиц через барьер $U(x)=\begin{cases} 0, |x|>a \\ U_{0,} |x|<a \quad (U_0>0)\end{cases}$ (рис. 1) при $E<U_0$

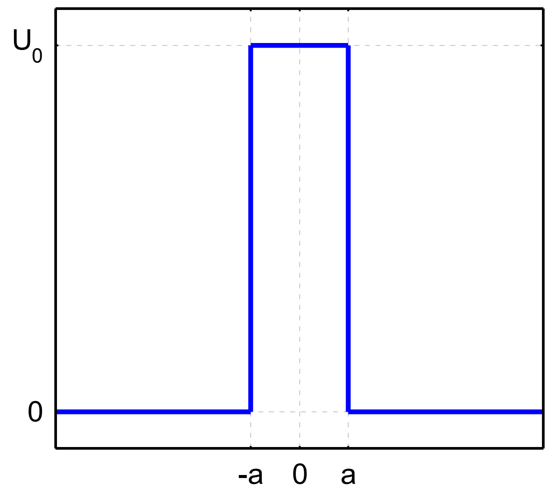

Рисунок 1: График U(x).

Необходимые утверждения из теории:

1. Волновая функция стационарного состояния подчиняется стационарному уравнению Шредингера $\hat{H}\psi=E\psi$ $\left(-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\frac{d^2}{d x^2}+U(x)\right)\psi=E\psi$
2. При $U=const$ решениями уравнения Шредингера являются:
   - для $E>U$ $\psi=e^{\pm ikx}$, $E-U=\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$
   - для $E<U$ $\psi=e^{\pm\kappa x}$, $U-E=\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}$
3. При «сшивании» решений для волновой функции, полученных в разных областях пространства необходима напрерывность и гладкость волновой функции (гладкость нарушается только на бесконечных скачках потенциала)
4. При неограниченном движении (решение в форме плоской волны) волновая функция Ce^{ikx} не нормирована на единичную полную вероятность. Удобно выразить поток частиц: вероятность прохождения частицы через площадку dS в интервал dt $j=\frac{dp}{dS\,dt}=\frac{|\psi|^2 dV}{dS\,dt}=|C|^2\frac{\hbar k}{m}$
5. Движению слева направо соответсвует $k>0$ в мнимой экспоненте (проверяется либо рассмотрением того, куда движется поверхность данной фазы в плоской аолне, либо применением оператора импульса)

Решение:

Считаем для определённости, что источник частиц находится слева от барьера. Решения уравнения Шредингера вне барьера имеют форму бегущей волны. Слева от барьера (со стороны источника частиц) может присутствовать отражённая от барьера волна. Справа от барьера может быть только волна, распространяющаяся от барьера. Можно выбрать нормировку, в которой падающая волна имеет единичную амплитуду. Под барьером решения имеют форму действительных экспонент, из-за конечности барьера априорно отбросить одно из решений нельзя.

Решение уравнения Шредингера в разных областях пространства:

при $x<-a \quad \psi=e^{ikx}+Ae^{-ikx}$

при $-a<x<a \quad \psi=B_1 e^{-\kappa x}+B_2 e^{-\kappa x}$

при $x>a \quad \psi=C e^{ikx}$

где $k=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$; $\kappa=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U_0-E)}$ Отметим, что $k^2+\kappa^2=\frac{2m}{\hbar^2}U_0$.

Записываем условия сшивки волновых функций на двух границах:

$$\begin{cases} e^{-ika}+Ae^{ika}=B_1 e^{\kappa a}+B_2 e^{-\kappa a} \\ B_1 e^{-\kappa a}+B_2 e^{\kappa a}=C e^{ika} \\ ik\left(e^{-ika}-Ae^{ika}\right)=\kappa\left(-B_1 e^{\kappa a}+B_2 e^{\kappa a}\right) \\ ikCe^{ika}=\kappa\left(-B_1 e^{-\kappa a}+B_2 e^{\kappa a}\right) \end{cases}$$

Для нахождения прохожденния под барьером нужно найти C .

Из первого и третьего уравнений выражаем $2B_1 e^{\kappa a}=e^{-ika}\left(1-i\frac{k}{\kappa}\right)+Ae^{ika}\left(1+i\frac{k}{\kappa}\right)$ и $2B_2 e^{-\kappa a}=e^{-ika}\left(1+i\frac{k}{\kappa}\right)+Ae^{ika}\left(1-i\frac{k}{\kappa}\right)$

Откуда

$$\begin{cases} 2Ce^{ika}=e^{-2\kappa a}\left[e^{-ika}\left(1-i\frac{k}{\kappa}\right)+Ae^{ika}\left(1+i\frac{k}{\kappa}\right)\right]+e^{2\kappa a}\left[e^{-ika}\left(1+i\frac{k}{\kappa}\right)+Ae^{ika}\left(1-i\frac{k}{\kappa}\right)\right] \\ 2i\frac{k}{\kappa}Ce^{ika}=-e^{-2\kappa a}\left[e^{-ika}\left(1-i\frac{k}{\kappa}\right)+Ae^{ika}\left(1+i\frac{k}{\kappa}\right)\right]+e^{2\kappa a}\left[e^{-ika}\left(1+i\frac{k}{\kappa}\right)+Ae^{ika}\left(1-i\frac{k}{\kappa}\right)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=e^{-2ika}\left(ch(2\kappa a)+i\frac{k}{\kappa}sh(2\kappa a)\right)+A\left(ch(2\kappa a)-i\frac{k}{\kappa}sh(2\kappa a)\right) \\ i\frac{k}{\kappa}C=e^{-2ika}\left(sh(2\kappa a)+i\frac{k}{\kappa}ch(2\kappa a)\right)+A\left(sh(2\kappa a)-i\frac{k}{\kappa}ch(2\kappa a)\right) \end{cases}$$

откуда

$$C=e^{-2ika}\frac{\dfrac{ch(2\kappa a)+i\frac{k}{\kappa}sh(2\kappa a)}{ch(2\kappa a)-i\frac{k}{\kappa}sh(2\kappa a)}-\dfrac{sh(2\kappa a)+i\frac{k}{\kappa}ch(2\kappa a)}{sh(2\kappa a)-i\frac{k}{\kappa}ch(2\kappa a)}}{\dfrac{1}{ch(2\kappa a)-i\frac{k}{\kappa}sh(2\kappa a)}-i\frac{k}{\kappa}\dfrac{1}{sh(2\kappa a)-i\frac{k}{\kappa}ch(2\kappa a)}}$$

упрощаем, используем аналог основного тригонометрического тождества для гиперболических функций:

$$C=-2i\frac{k}{\kappa}e^{-2ika}\frac{1}{sh(2\kappa a)\left(1-\frac{k^2}{\kappa^2}\right)-2i\frac{k}{\kappa}ch(2\kappa a)}$$

Коэффициент прохождения равен отношению потоков прошедших и падающих частиц

$$D=\frac{j_{прош}}{j_{пад}}=|C|^2=4\frac{k^2}{\kappa^2}\times\frac{1}{sh(2\kappa a)\left(1-\frac{k^2}{\kappa^2}\right)-2i\frac{k}{\kappa}ch(2\kappa a)}\times\frac{1}{sh(2\kappa a)\left(1-\frac{k^2}{\kappa^2}\right)+2i\frac{k}{\kappa}ch(2\kappa a)}=$$

$$=4\frac{k^2}{\kappa^2}\frac{1}{sh^2(2\kappa a)\left(1-\frac{k^2}{\kappa^2}\right)^2+4\frac{k^2}{\kappa^2}ch^2(2\kappa a)}=\frac{4k^2\kappa^2}{sh^2(2ka)\left(\kappa^2-k^2\right)^2+4k^2\kappa^2 ch^2(2\kappa a)}=$$

$$=\frac{4k^2\kappa^2}{sh^2(2\kappa a)\left(\kappa^2+k^2\right)^2+4k^2\kappa^2}$$

В важном пределе $2\kappa a=\kappa d\gg 1$ ($d=2a$ ширина барьера) в гиперболических функциях доминирует экспонента с положительной степенью и

$$D\approx e^{-2\kappa d}\frac{16k^2\kappa^2}{\left(k^2+\kappa^2\right)^2}=16\frac{E(U_0-E)}{U_0^2}\times e^{-2\kappa d}$$