

Московский физико-технический институт
Кафедра общей физики

Лекция 8

СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ ГЕЛИЯ-4.
МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ ПЕРВОГО РОДА.
ТЕРМОДИНАМИКА СВЕРХПРОВОДНИКОВ.

заметки к лекциям по общей физике

В.Н.Глазков

Москва
2018

В данном пособии представлены материалы к лекции по теме «Сверхтекучесть. Магнитные свойства сверхпроводников I рода. Термодинамика сверхпроводников.» из курса «Квантовая макрофизика», преподаваемого на кафедре общей физики МФТИ.

Пособие не претендует на полноту изложения материала и в основном является авторскими заметками к лекциям, оно содержит основные сведения по этой теме курса.

Для подробного изучения темы сверхтекучести студентам рекомендуется обратиться к книгам И.М.Халатникова «Теория сверхтекучести» [1] или «Введение в теорию сверхтекучести» [2], темы этой лекции разбираются в параграфах 1, 2, 4 книги [1]. Классическое видео демонстрационных опытов по физике сверхтекучего гелия-4 с участием А.Лейтнера доступно на сайте [3] и в других источниках (продолжительность полной версии около 40 минут).

По темам сверхпроводимости основным учебником является В.В.Шмидт «Введение в физику сверхпроводников» [4], темы этой лекции разбираются в параграфах 1,2,3. Рекомендуется просмотреть видео демонстрационных опытов с участием А.Лейтнера на сайте [3]. Общие сведения о сверхпроводимости есть в книге Ч.Киттеля [5] (гл.12).

Обзор основных экспериментальных фактов по этим темам и некоторые варианты применения этих явлений в лабораторной технике представлены также в книге Побела [6].

Основные понятия, вводимые на этой лекции:

- 1.Сверхтекучесть гелия-4.
- 2.Спектр возбуждений в гелии-4, его связь с возможностью бездиссипативного течения жидкости (критерий Ландау).
- 3.Бозе-конденсация в газе бозонов.
- 4.Сверхпроводники первого рода. Температура перехода в сверхпроводящее состояние и критическое поле разрушения сверхпроводимости.
- 5.Эффект Мейснера и скачок теплоёмкости.

Оглавление

Сверхтекучесть и сверхпроводимость: вводные замечания.....	4
Сверхтекучесть гелия-4.....	5
Фазовая диаграмма и λ -точка. Экспериментальные факты.....	5
Спектр возбуждений в гелии-II.....	11
Фононный и ротонный вклады в теплоёмкость гелия.....	13
Критерий Ландау.....	14
Двухжидкостная модель гелия-II.†.....	17
Нормальная и сверхтекучая компоненты жидкости.....	17
Плотность нормальной компоненты.....	18
Объяснение фонтан-эффекта.....	19
Второй звук в сверхтекучем гелии.....	19
Бозе-конденсация, основное состояние сверхтекучей жидкости и квантованные вихри.....	20
Термодинамика сверхпроводников I рода.....	23
Основные экспериментальные факты.....	23
Магнитные свойства сверхпроводника первого рода.....	27
Свободная энергия сверхпроводящего состояния.....	28
Скачок теплоёмкости при переходе в сверхпроводящее состояние.....	29

Список литературы

- 1: И.М.Халатников, Теория сверхтекучести (1971)
- 2: И.М.Халатников, Введение в теорию сверхтекучести (1965)
- 3: Alfred Leitner, Alfred Leitner's Old Physics Stories, 1963, <http://alfredleitner.com/>
- 4: В.В. Шмидт , Введение в физику сверхпроводников (2000)
- 5: Ч.Киттель, Введение в физику твёрдого тела ()
- 6: Frank Pobell, Matter and Methods at Low Temperatures (2007)
- 7: Sebastien Balibar, Looking Back at Superfluid Helium, Seminaire Poincare, 1 (2003) (arXiv:0303561) (2003)
- 8: Андроникашвили Э.Л., Непосредственное наблюдение двух видов движения в гелии II., ЖЭТФ, 16, 780 (1946)
- 9: Андроникашвили Э.Л., Температурная зависимость нормальной плотности гелия-II, ЖЭТФ, 18, 424 (1948)
- 10: В.Н.Глазков, Методы изучения структуры и колебаний кристаллов (2016)
- 11: D.G.Henshaw and A.D.V.Woods, Modes of atomic motions in liquid helium by inelastic scattering of neutrons., Physical Review, 121, 1266 (1961)
- 12: Е.М.Лифшиц и Л.П.Питаевский, Теоретическая физика IX: Статистическая физика часть 2 (2000)
- 13: Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц, Теоретическая физика том VII: Электродинамика сплошных сред (1992)

Сверхтекучесть и сверхпроводимость: вводные замечания.

Явления сверхтекучести и сверхпроводимости являются примером макроскопических квантовых явлений. История изучения сверхпроводимости (открытой Камерлинг-Онессом в 1911 году) и сверхтекучести гелия-4, открытой в 30-х годах 20 века П.Л.Капицей, насчитывает около 100 лет. За это время работы в области сверхтекучести и сверхпроводимости были удостоены нескольких Нобелевских премий (в том числе и работы наших соотечественников Капицы, Ландау, Абрикосова, Гинзбурга).

Оба этих явления связаны с образованием («конденсацией») макроскопического числа частиц в одном квантовом состоянии. Этот «конденсат» частиц обладает свойствами бездиссипативного течения, что и обуславливает «сверх-» свойства таких систем.

Сразу оговоримся, что мы будем рассматривать только сверхтекучесть гелия-4 и сверхпроводимость в обычных низкотемпературных сверхпроводниках. Сверхтекучесть гелия-3 и высокотемпературная сверхпроводимость (открытие которых также удостоилось Нобелевских премий по физике) останутся за рамками нашего изложения, будучи гораздо более сложными и не всегда ещё объяснёнными явлениями.

Знаком † отмечен дополнительный материал.

Сверхтекучесть гелия-4.

Фазовая диаграмма и λ -точка. Экспериментальные факты.

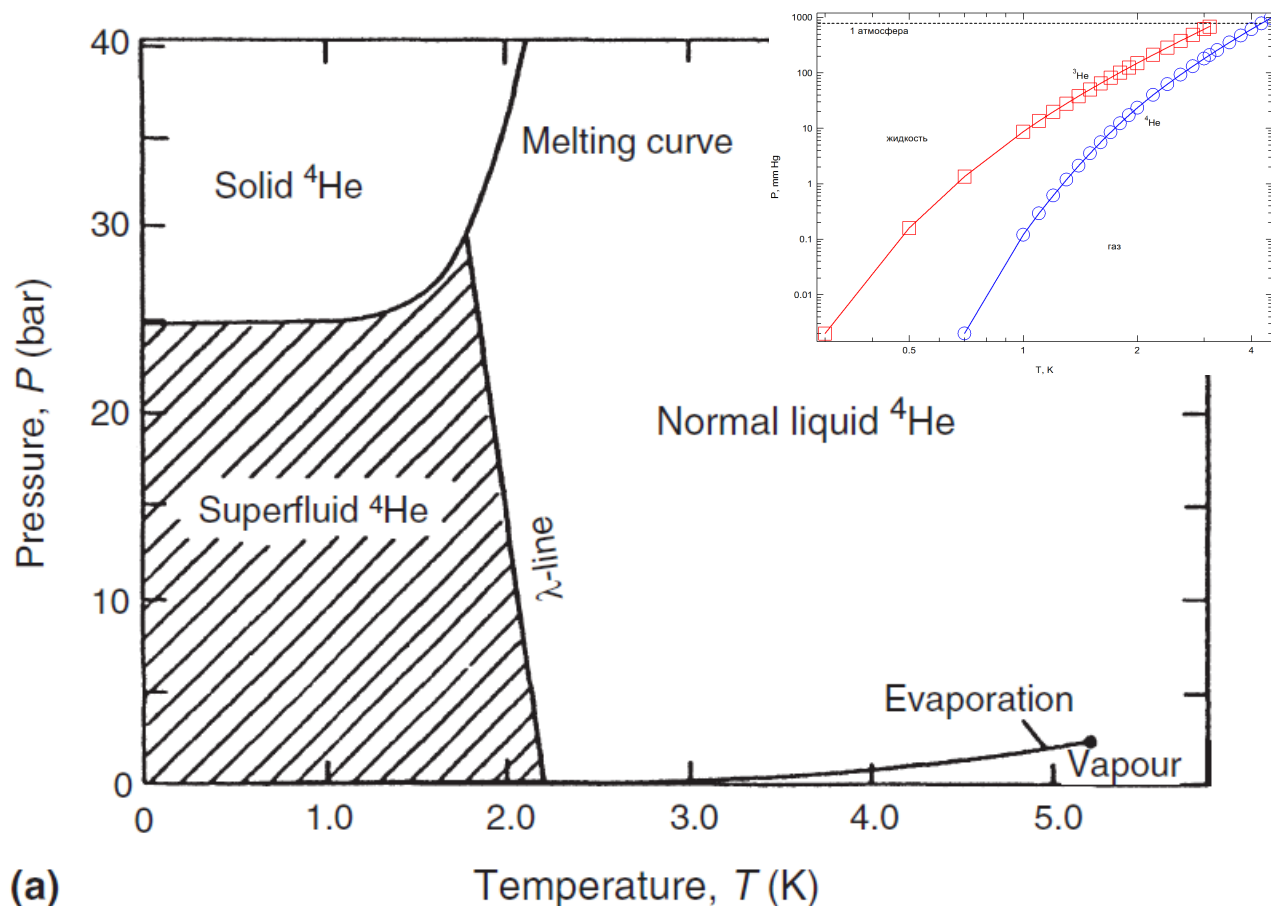


Рисунок 1: Фазовая диаграмма гелия-4. Из книги [6]. На вставке: кривые кипения гелия-4 и гелия-3 при давлении ниже 1 бар. На кривой кипения λ -точка гелия-4 соответствует давлению около 38 мм. ртутного столба.

Гелий-4 является очень необычной системой. Этот инертный газ конденсируется только при температурах в несколько кельвин¹, оставаясь жидким вплоть до $T=0$ при не слишком больших давлениях. Для перевода в твёрдое состояние необходимо приложить давление около 30 атмосфер. В результате на фазовой диаграмме гелия (как гелия-4, так и второго стабильного изотопа гелия-3) нет тройной точки, привычной для фазовых диаграмм всех других веществ.

Такое «нежелание» образовывать кристалл связано с квантовыми эффектами. Малость массы атома и слабость взаимодействия инертных атомов друг с другом приводят к тому, что в основном состоянии атома в кристалле гелия среднеквадратичное отклонение от положения равновесия (амплитуда нулевых колебаний) оказывается порядка межатомного расстояния и атомы в кристалле гелия оказываются делокализованы, в чём-то аналогично электронам в обычном металле. Кристаллы гелия часто называют из-за этого квантовыми кристаллами, они демонстрируют многие необычные свойства (например, кристаллизационные волны — бездиссипативную перекристаллизацию поверхности), описание которых существенно выходит за рамки курса.

¹ Температура кипения при атмосферном давлении 4.2К, критическая точка соответствует температуре 5.19К при давлении 2.24 атмосферы. Жидкий гелий был впервые получен Камерлинг-Онессом в 1908 году.

Так как межатомные расстояния в жидкости и твёрдом теле близки, характерный потенциал межатомного взаимодействия в жидкости качественно такой же, что и для атома в кристалле. Роль квантовых эффектов в жидкости можно охарактеризовать отношением энергии нулевых колебаний частицы, локализованной в сфере радиуса a , $E_0 \simeq \frac{h^2}{8ma^2}$ к глубине этой потенциальной ямы: $\lambda = \frac{E_0}{U}$. Для гелия-3 значение этого параметра 3.05, для гелия-4 оно равно 2.64, для водорода 1.73, а для более тяжёлых элементов меньше 1 [6]. Поэтому жидкий гелий и жидкий водород часто называют квантовыми жидкостями.

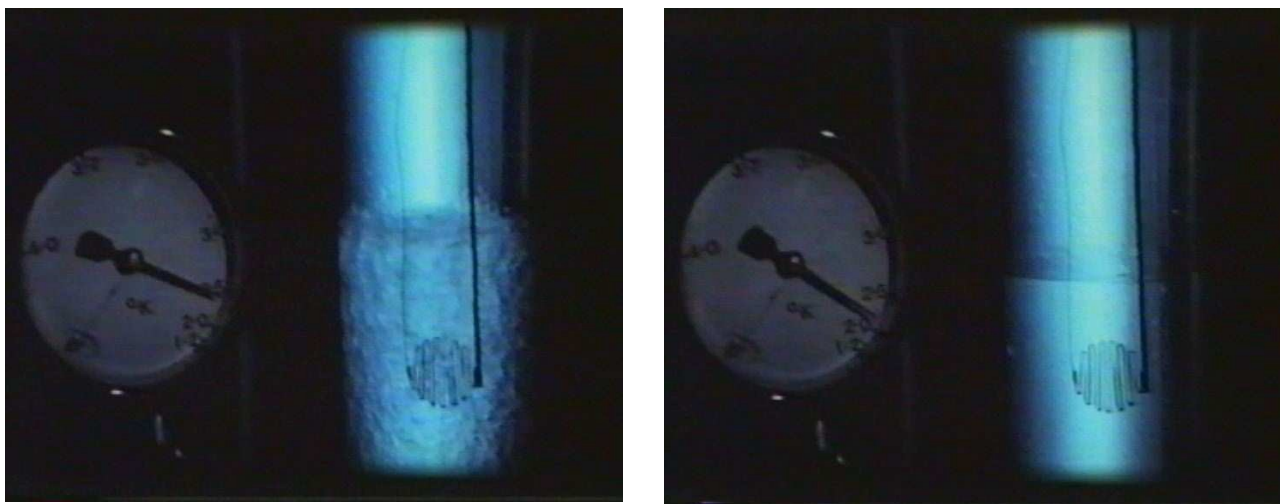


Рисунок 2 Слева: кипение жидкого гелия в оптическом дьюаре при температуре 2.5К. Справа: прекращение кипения при температуре чуть ниже лямбда-точки. На каждой фотографии слева от дьюара шкала манометра, калиброванного в единицы температуры по давлению насыщенных паров гелия. Из статьи [7].

Однако оказалось, что в гелии-4 жидкая фаза устроена гораздо более удивительным образом. При понижении температуры ниже примерно 2.2К³ происходит некоторый фазовый переход в состояние с очень необычными свойствами, которое по введённой П.Л.Капицей терминологии названо сверхтекучим: П.Л.Капица обнаружил, что ниже температуры перехода жидкость приобретает свойство протекать тонкие капилляры, причём скорость этого течения соответствует исчезновению вязкости. История открытия сверхтекучести освещена в литературе, например можно обратиться к статье [7] и ссылкам в ней. Наличие фазового перехода было обнаружено в 1928-30 годах Кеезомом и сотрудниками по характерной аномалии на теплоёмкости, имеющей форму греческой буквы λ (рисунок 3), за что переход и был назван лямбда-точкой, Кеезом же ввёл терминологию «гелий I» и «гелий II» для обозначения состояний гелия при $T > T_\lambda$ и $T < T_\lambda$.

Неожиданно для жидкости, низкотемпературная (ниже примерно 0.5К) зависимость теплоёмкости от температуры оказывается аналогична закону Дебая $C \propto T^3$ (рисунок 3).

2 Энергия оценивается по принципу неопределённости для частицы локализованной в сфере радиуса a

$$\sqrt{\langle p^2 \rangle} 2a \simeq h, \text{ откуда } E_0 = \frac{p^2}{2m} \simeq \frac{h^2}{8ma^2}.$$

3 Температура перехода зависит от давления приблизительно линейно, она равна 2.1768К на кривой кипения и уменьшается до 1.7673К на кривой плавления [6].

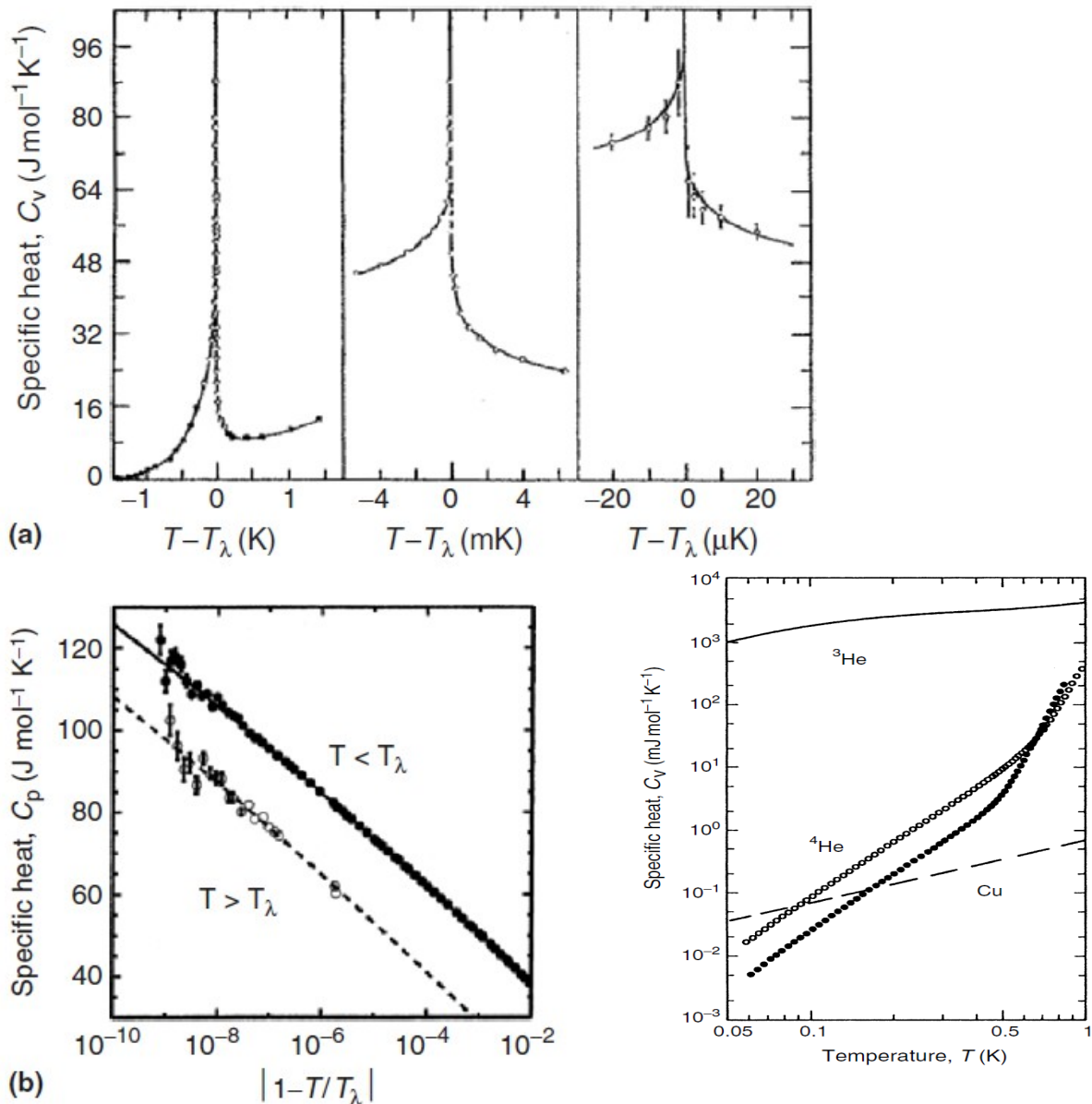


Рисунок 3: Теплоёмкость жидкого гелия-4 вблизи лямбда-точки и при сверхнизких температурах как функция температуры. Верхняя панель: линейная шкала температур в разных масштабах. Нижняя левая панель: данные вблизи лямбда-точки на логарифмической шкале температур. Нижняя правая панель: зависимость теплоёмкости гелия-4 от температуры ниже 1К, открытые символы соответствуют данным, полученным при давлении насыщенных паров (молярный объём $27.58 \text{ см}^3/\text{моль}$), закрашенные символы — давлению 22 атмосферы (молярный объём $23.55 \text{ см}^3/\text{моль}$). Из книги [6].

Этот фазовый переход виден невооружённым глазом: при пересечении температуры перехода кипение жидкого гелия в объёме прекращается (рисунок 2, видеодемонстрация [3]). Это означает, что ниже лямбда-точки возникает некоторый дополнительный механизм переноса тепла в жидком гелии, который превосходит по эффективности нормальный для всех жидкостей процесс образования пузырьков пара на каких то центрах. Действительно, измеряемая экспериментально теплопроводность гелия ниже лямбда-точки оказывается очень большой и определяется размерами экспериментальной установки (рисунок 4). Эмпирически зависимость теплопроводности гелия-4 в капилляре диаметром d при температуре ниже 0.4К и при давлении ниже 2 атмосфер описывается законом

$\kappa \approx 20 d T^3 (Bm/(cm \cdot K))$ [6]. Отметим, что такая зависимость аналогична низкотемпературной теплопроводности твёрдого тела высокой чистоты, определяемой рассеянием фононов на границах образца. Совпадение степени (куб) в зависимости от температуры низкотемпературных теплоёмкости и теплопроводности указывает⁴ именно на независимый от температуры механизм рассеяния некоторых «переносчиков тепла» на границах образца.

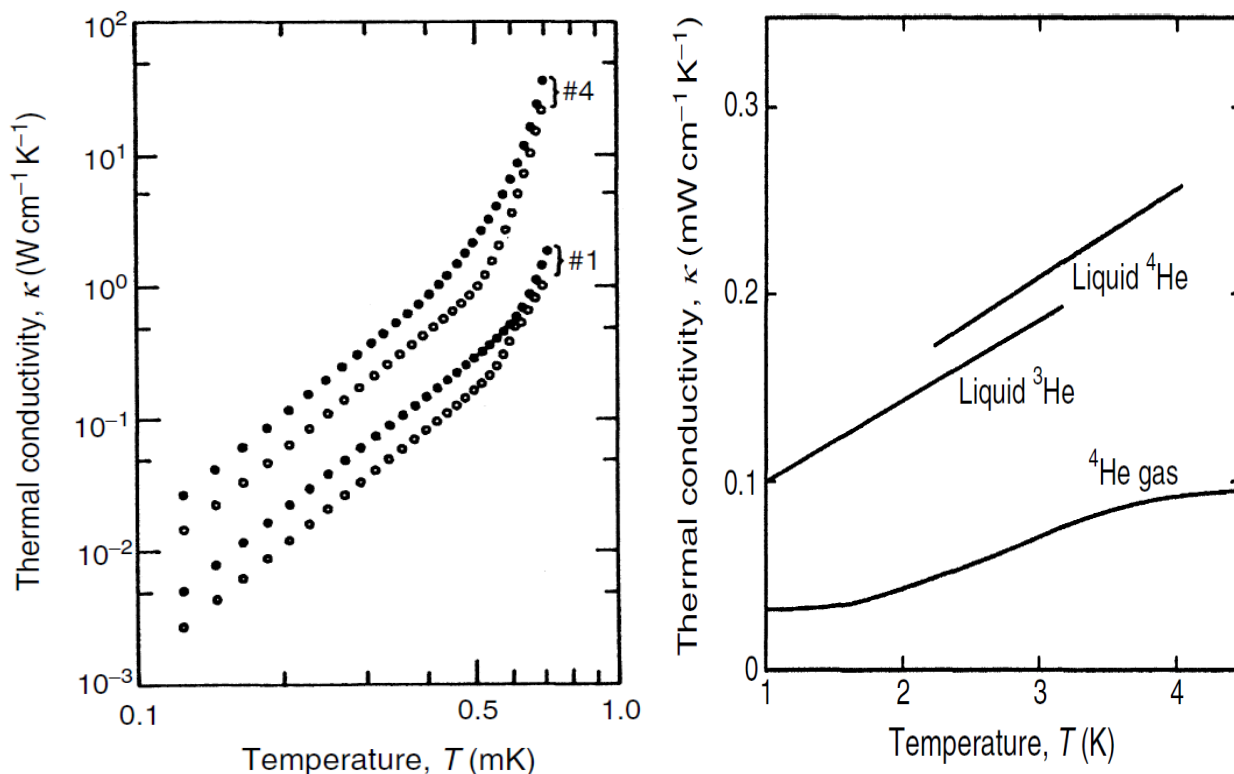


Рисунок 4 Теплопроводность жидкого гелия-4 выше лямбда-точки (справа) и при сверхнизких температурах (слева). На левой панели данные с индексом #1 измерены в трубке диаметром 1.38 мм, данные с индексом #4 в трубке диаметром 7.97 мм, закрытые символы (верхние в каждой серии) получены при давлении 2 атмосферы, открытые — при давлении 20 атмосфер. Из книги [6]. Обратите внимание, что теплопроводности левом рисунке при температуре около 700 мК на 2-3 порядка превышают теплопроводность жидкого гелия-4 выше лямбда-точки.

Другим экспериментальным фактом является обнаруженное П.Л.Капицей исчезновение вязкости у гелия ниже лямбда-точки. Гелий-II может протекать сквозь тонкие капилляры, при этом скорость его течения не подчиняется закону Пуазейля — в то время как гелий-I, выше лямбда-точки ведёт себя совершенно нормальным образом.

Одной из наиболее красивых демонстраций этого эффекта является измерение увлекаемой массы в колебаниях крутильного маятника, погруженного в жидкость (период колебаний крутильного маятника в жидкости определяется жёсткостью подвеса и массой маятника с учётом массы увлекаемой жидкости). Эти опыты были поставлены Э.Л.Андроникашвили в 40-х годах [8][9], их часто называют опытами с маятником Андроникашвили. Для развития поверхности маятник делался в виде стопки тонких дисков (от 50 до 100 дисков в стопке) из алюминиевой фольги толщиной 13 мкм, разделённых шайбами толщиной 0.21мм, схема

⁴ Вспоминаем газовую модель теплопроводности, которую мы применяли для описания теплопроводности твёрдых диэлектриков.

маятника показана на рисунке 5.

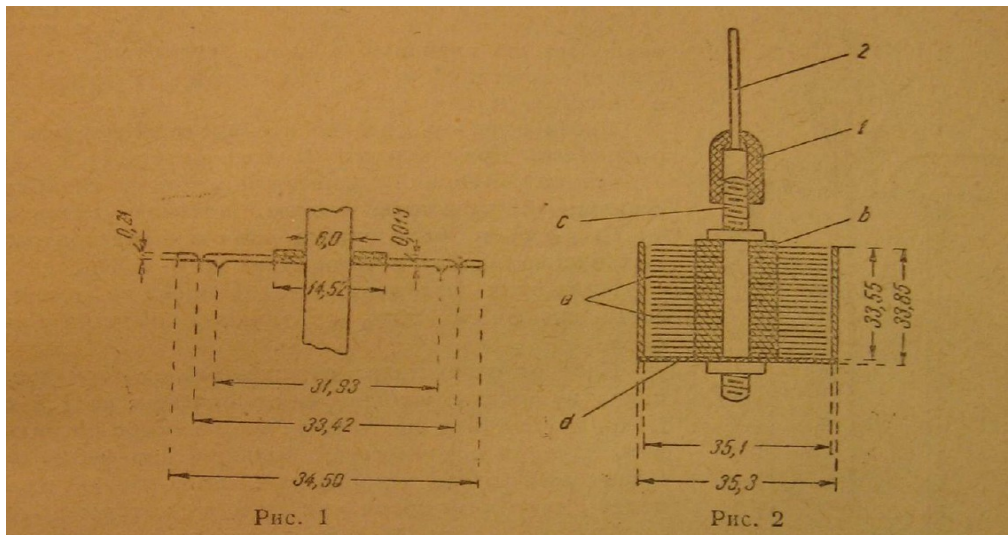


Рисунок 5: Схема крутильного маятника Андроникашвили. Слева: два соседних диска. Справа: сборка стопки дисков. Из статьи [8].

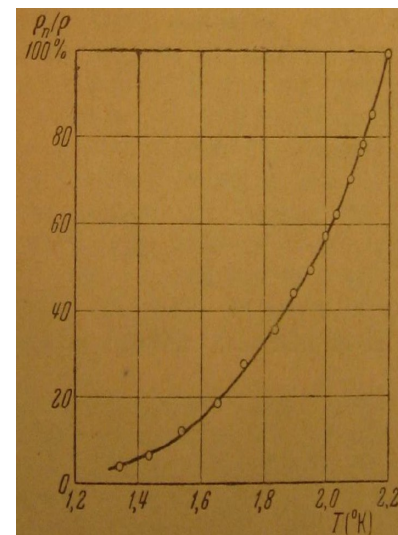
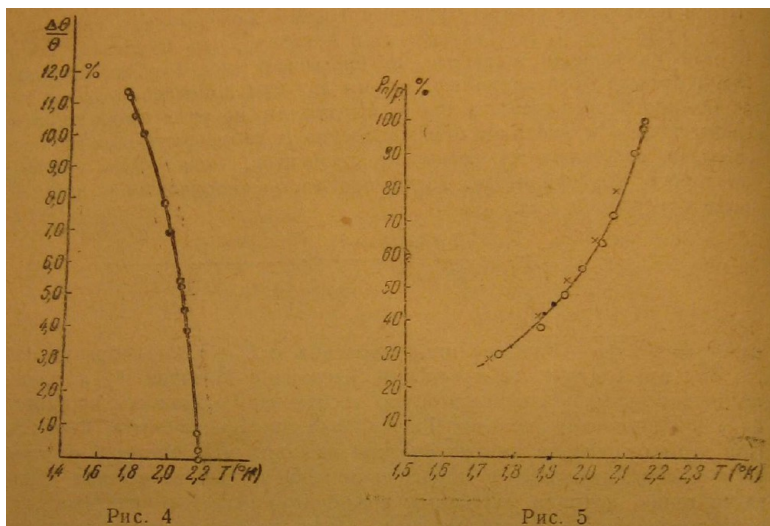


Рисунок 6 Слева: зависимость относительного изменения периода крутильных колебаний $\Delta\theta/\theta$ маятника Андроникашвили от температуры. Из статьи [8]. В центре: определённое по изменению периода колебаний изменение эффективной плотности увлекаемой «нормальной» жидкости. Из статьи [8]. Справа: зависимость плотности «нормальной» компоненты от температуры до более низких температур, полученная в ходе дальнейших исследований. Из статьи [9].

При таких малых зазорах при медленных колебаниях вязкая жидкость полностью вовлекается в колебания маятника и момент инерции маятника, определяющий период крутильных колебаний, определяется в том числе и массой жидкости между дисками. Эксперимент показал, что ниже лямбда-точки период колебаний начинает уменьшаться, что соответствует тому, что увлекаемая масса уменьшается⁵. Интерпретируя это уменьшение, как

5 Уравнение крутильных колебаний $\ddot{\alpha} + \frac{K}{J}\alpha = 0$, где K — жёсткость нити, а J — момент

инерции. Частота колебаний $\omega = \sqrt{\frac{K}{J}}$, поэтому увеличение частоты соответствует уменьшению момента инерции.

изменение эффективной плотности жидкости, участвующей в «нормальном» вязком движении, можно из изменения периода вычислить зависимость плотности «нормальной» компоненты гелия-II ρ_n . Эксперимент показывает, что эта эффективная плотность стремится к нулю при стремлении температуры к абсолютному нулю — при $T=0$ жидкость совсем не увлекалась бы вращением маятника (рисунок 6).

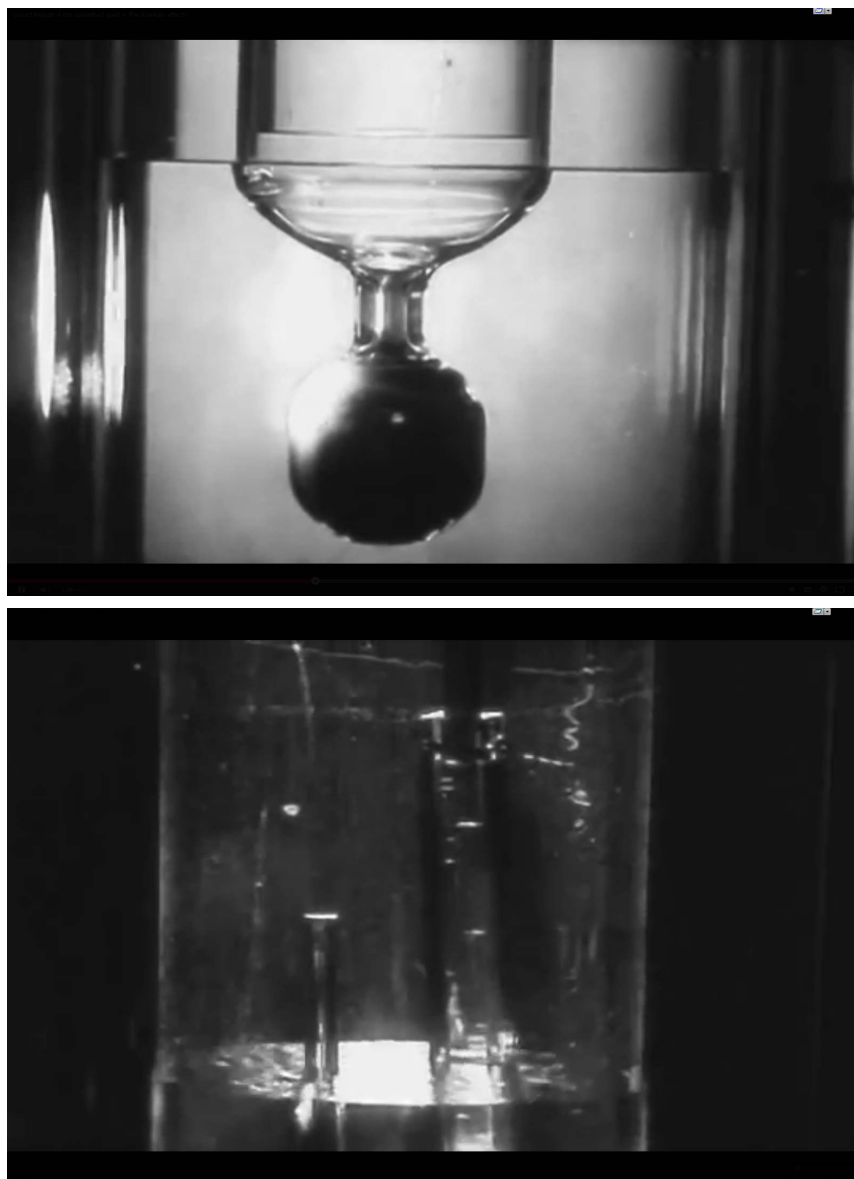


Рисунок 7 Фонтан-эффект (термомеханический эффект) в жидком гелии. Верхняя панель: подъём уровне гелия в трубке, закрытой снизу порошковой «пробкой» (тёмная расширенная часть трубки) при нагреве верхней части «пробки» сфокусированным излучением. Заполненная порошком часть трубки соединяется с жидким гелием в дьюаре через отверстие снизу. Повышение уровня жидкости в трубке над уровнем жидкости в дьюаре возникает только при нагреве. Нижняя панель: фонтан гелия, бьющий из капилляра при включении нагревателя. Кадры из демонстрационного фильма [3].

Ещё одним необычным, обнаруженным экспериментально, свойством является термомеханический эффект или фонтан-эффект. Его наблюдение заключается в том, что если погрузить в гелий-II трубку, нижний конец которой наполнен мелкодисперсным порошком, практически запрещающим вязкое течение через этот порошок, и нагревать гелий в трубке выше этой «пробки», то уровень жидкости в трубке повышается. Если же верхний конец трубки сузить в капилляр, то из капилляра бьёт фонтан, причём фонтанирование

продолжается всё время, пока подводится мощность нагрева (рисунок 7).

Спектр возбуждений в гелии-II.

При абсолютном нуле все системы должны оказаться в своём основном квантовомеханическом состоянии. Тогда свойства систем вблизи абсолютного нуля естественно описывать на языке небольших отклонений (относительно «истинного» основного состояния) распределения частиц по состояниям. Это естественным образом приводит к описанию свойств системы многих частиц на языке небольшого количества квазичастиц. Квантовая жидкость гелий-4 является естественным тестовым примером для этой концепции квазичастиц — элементарных возбуждений квантовой жидкости.

Естественно возникает необходимость узнать спектр (зависимость энергии от импульса) для этих квазичастиц. Эта задача успешно решена методом неупругого рассеяния нейтронов⁶ (методика неупругого рассеяния нейтронов описана в [10]), данные из одной из ранних работ [11] приведены на рисунке 8.

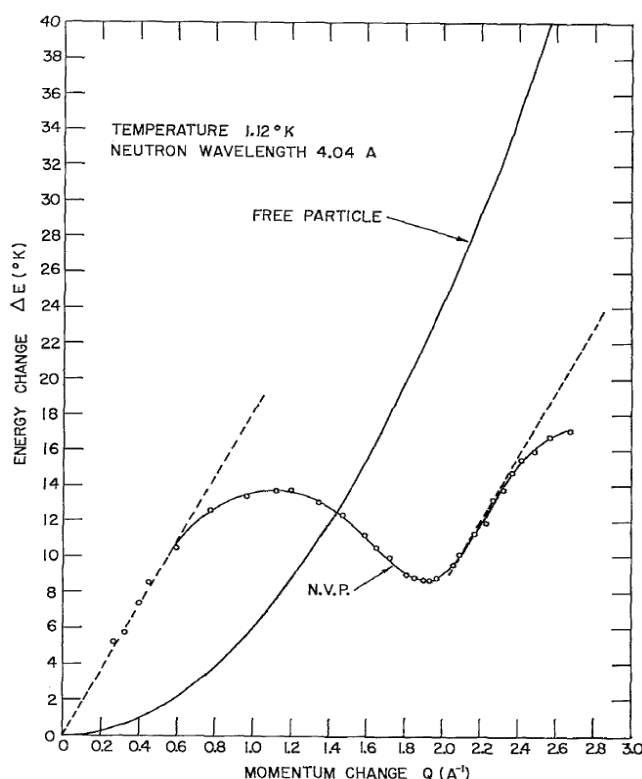


Рисунок 8: Спектр элементарных возбуждений в гелии-4 ниже лямбда-точки, определённый по неупругому рассеянию нейтронов. Температура 1.12 К, давление равно давлению насыщенных паров. Из статьи [11].

Действительно, оказалось что неупругое рассеяние нейтронов происходит только при вполне определённых соотношениях переданных среде импульса и энергии. Ширина пика неупругого рассеяния при низких температурах является аппаратной шириной спектрометра — то есть с точки зрения эксперимента возбуждения а жидком гелии-4 при низких

⁶ При неупругом рассеянии нейтронов на исследуемый образец посылают поток медленных (обычно с энергией около 10-20 меВ) нейтронов с известной энергией E_0 и направлением импульса \vec{p}_0 и анализируют энергию E_1 и импульс \vec{p}_1 рассеянных нейтронов. Изменение энергии $\varepsilon = E_0 - E_1$ и импульса $\hbar \vec{q} = \vec{p}_0 - \vec{p}_1$ связано с рождением (или поглощением) в образце некоторых возбуждений. Если $\varepsilon(\vec{q})$ однозначная функция, то такое рассеяние является детерминированной двухчастичной задачей и $\varepsilon(\vec{q})$ есть спектр квазичастиц, описывающих данный тип возбуждений.

температурах (существенно ниже лямбда-точки) являются долгоживущими квазичастицами.

Определённый экспериментально спектр этих квазичастиц существенно отличается от квадратичного спектра свободного атома гелия, также показанного на рисунке 8. На малых волновых векторах (меньше примерно 0.5 1/\AA) спектр линеен. Это соответствует тому, что самые низкоэнергетичные возбуждения жидкости являются обычными звуковыми волнами, проквантовав которые можно перейти к представлению этих возбуждений в виде квазичастиц-фононов, аналогичных акустическим фононам в твёрдых телах (но имеющих только одну поляризацию — продольную, так как в жидкости поперечных колебаний быть не может). Это свойство спектра сразу объясняет экспериментально наблюдаемую кубическую зависимость низкотемпературной теплоёмкости и теплопроводности.

Однако кроме линейного (называемого фононным) участка спектра в спектре квазичастиц имеется минимум на волновом векторе около 2 1/\AA с энергией в минимуме около 8К. Этот минимум называют ротонным минимумом⁷. Эта форма спектра связана с особенностями взаимодействия атомов гелия и простой интерпретации не имеет, мы будем принимать существование такого спектра возбуждений как данность. Так как в любом экстремуме спектра $E(\vec{k})$ плотность состояний всегда имеет максимум⁸, то квазичастицы с волновыми векторами вблизи ротонного минимума будут вносить большой вклад в различные термодинамические свойства гелия. Между фононной частью спектра и ротонным минимумом есть максимум с энергией около 14К. Максимуму также соответствует экстремум в плотности состояний, но при низких температурах заселённость состояний вблизи максимума окажется пренебрежимо мала⁹.

Быстрое уменьшение чисел заполнения с ростом энергии позволяет при описании низкотемпературных свойств упростить модель спектра квазичастиц, формально считая, что есть два независимых вида квазичастиц: фононы с линейным спектром $E = \hbar s k$ и ротоны со спектром $E = \Delta + \hbar^2 \frac{(k - k_0)^2}{2m}$, где скорость звука $s = 237 \text{ м/сек}$, ротонная щель $\Delta = 8.6 \text{ К}$, положение ротонного минимума $k_0 = 1.91 \text{ \AA}^{-1}$ и эффективная масса ротона $m = 0.16 m_{\text{He}}$ (численные данные по работе [11]).

При температурах ниже 1.7-1.8К газы фононов и ротонов можно считать идеальными и не взаимодействующими друг с другом. И фононы, и ротоны, как всякие квазичастицы, описывающие колебания среды, являются бозонами и подчиняются бозевской статистике. Однако для ротонов, из-за достаточно большой щели, в большинстве случаев можно пренебречь единицей в бозевском распределении и пользоваться бальцмановской статистикой.¹⁰

7 Термин «ротон» возник исторически, разные источники приписывают его появление Л.Д.Ландау или И.Е.Тамму. На первых этапах становления теории сверхтекучести ротоны считались вторым типом возбуждений гелия-II, связанным с квантованными вращениями сверхтекучей жидкости, Фейнман предлагал интерпретацию ротона как вихревого кольца очень малого (атомного) размера. Эти интерпретации, однако, имеют только исторический интерес. Эксперимент показывает, что в ротонном минимуме у квазичастиц нет момента вращения, ротонный минимум непрерывно переходит в фононную часть спектра при малых волновых векторах — таким образом при данном значении волнового вектора есть только один тип ротонов, спин ротона равен нулю. Термин «ротон» прижился в теории сверхтекучести, но к нему надо относиться просто как к устоявшемуся термину, как, например, мы относимся к названиям «ароматов» частиц в ядерной физике.

8 Например, мы это видели в модельной одномерной цепочке атомов.

9 При температуре 1К число заполнения в максимуме (энергия 14К) меньше числа заполнения в минимуме (энергия 8К) в $e^6 \approx 400$ раз.

10 Это формально аналогично тому, как для полупроводников при низкой температуре можно пренебречь единицей в фермиевской функции распределения.

Отметим также интересную особенность спектра — его окончание в некоторой точке (точке Питаевского). В этой точке энергия квазичастицы равна удвоенной ротонной щели, а импульс несколько меньше удвоенного положения ротонного минимума. Соответственно, в этой точке становится возможным распад квазичастицы в два ротона, движущихся под некоторым углом друг к другу, который оказывается и кинематически выгоден. Подробный анализ этого выходит за рамки нашего курса, вопросы критериев выгоды распада квазичастиц рассматриваются, например, в [12] §34.

Фононный и ротонный вклады в теплоёмкость гелия.

Спектр элементарных возбуждений позволяет вычислить термодинамические функции гелия в сверхтекучем состоянии. Проиллюстрируем эти вычисления на примере теплоёмкости. В идеальном газе приближении фононный и ротонный вклады вычисляются независимо. При этом для низких температур мы можем везде пользоваться быстрым убыванием чисел заполнения и распространять интегрирование до бесконечности, а для ротонов считать статистику бозе-эйнштейновской.

Для фононов энергия

$$E = \int \hbar \omega \frac{1}{e^{\hbar \omega / T} - 1} \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi V}{(2\pi)^3 \hbar^3 s^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{30} \frac{V T^4}{(\hbar s)^3}$$

и теплоёмкость $C_{\text{фон}} = \frac{2\pi^2}{15} \frac{V T^3}{(\hbar s)^3}$.

Кубический вклад в теплоёмкость соответствует эксперименту.

Для ротонов энергия

$$E = \int \left(\Delta + \hbar^2 \frac{(k - k_0)^2}{2m} \right) e^{-(\Delta + \hbar^2 (k - k_0)^2 / (2m)) / T} \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi V}{(2\pi)^3} e^{-\Delta / T} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Delta + \frac{\hbar^2 \xi^2}{2m} \right) e^{-\hbar^2 \xi^2 / (2mT)} (\xi + k_0)^2 d\xi$$

здесь сделана замена $k = \xi + k_0$ после чего интегрирование распространено на всю ось. При раскрытии скобок в подынтегральном выражении нужно оставлять только чётные степени.

$$E = \frac{V e^{-\Delta / T}}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(k_0^2 \Delta + \left(\Delta + \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \right) \xi^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \xi^4 \right) e^{-\hbar^2 \xi^2 / (2mT)} d\xi = \frac{V e^{-\Delta / T}}{2\pi^2} k_0^2 \Delta \frac{\sqrt{2mT}}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx + \frac{V e^{-\Delta / T}}{2\pi^2} \left(\Delta + \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \right) \left(\frac{\sqrt{2mT}}{\hbar} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx + \frac{V e^{-\Delta / T}}{2\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\sqrt{2mT}}{\hbar} \right)^5 \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx$$

Подстановкой чисел (и из вида спектра¹¹) можно убедиться, что $\Delta \ll \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$ (отличие примерно в 20 раз). Кроме того, удержание последнего слагаемого будет превышением точности, так как члены того же порядка по температуре возникнут из учёта отклонения закона дисперсии от квадратичного. Используя табличные интегралы¹², окончательно получаем:

$$E \approx \frac{V e^{-\Delta / T}}{2\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{2mT}}{\hbar} k_0^2 \Delta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{T}{\Delta} \right),$$

11 Это условие графически соответствует тому, что ротонный минимум достаточно острый, так что квадратичная экстраполяция пересечёт ось ординат на уровне гораздо выше положения минимума.

12 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$; $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$

идеальногазовое приближение верно для гелия при $\frac{T}{\Delta} < 0.2$. Таким образом, следующее за 1 слагаемые в скобках — это только небольшая поправка и при самых низких температурах её можно отбросить, откуда сразу следует низкотемпературная асимптотика энергии ротонного газа $E \propto \sqrt{T} e^{-\Delta/T}$ и его теплоёмкости $C \propto \frac{1}{T^{3/2}} e^{-\Delta/T}$.

Точным дифференцированием выражения для энергии получим для ротонного вклада в теплоёмкость¹³

$$C_{\text{рот}} \approx \frac{V e^{-\Delta/T}}{2\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} k_0^2 \Delta \left(\frac{1}{2} T^{-1/2} + \Delta T^{-3/2} + \frac{3T^{1/2}}{4\Delta} + \frac{1}{2} T^{-1/2} \right) = \\ = \frac{V e^{-\Delta/T}}{2\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} k_0^2 \frac{\Delta^2}{T^{3/2}} \left(1 + \frac{T}{\Delta} + \frac{3}{4} \left(\frac{T}{\Delta} \right)^2 \right)$$

Ротонный вклад экспоненциально вымерзает при низких температурах, но становится доминирующим выше примерно 0.8К.

Критерий Ландау.

Покажем, что из имеющегося в гелии спектра возбуждений (рисунок 8) с необходимостью следует возможность бездиссипативного течения такой жидкости при не слишком больших скоростях потока.

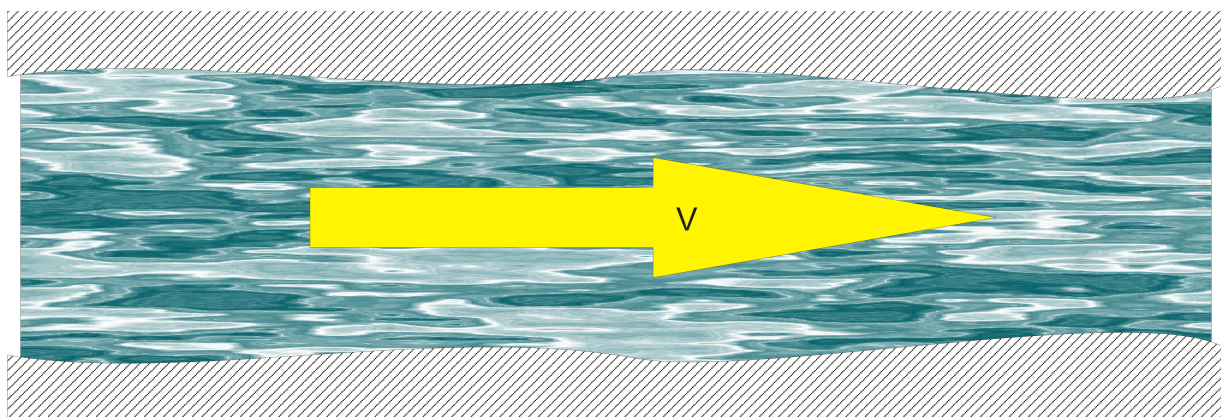


Рисунок 9: Сверхтекучая жидкость, протекающая через капилляр с неоднородными стенками (схематический рисунок).

Предположим, что гелий находится при абсолютном нуле температуры, то есть в своём основном энергетическом состоянии. Рассмотрим течение жидкости через капилляр со скоростью \vec{v} . Удобнее перейти в систему отсчёта, движущуюся вместе с жидкостью, тогда неоднородности на стенках капилляра будут создавать переменные во времени граничные условия и могут приводить к генерации квазичастиц (рисунок 9). Если с генерируемыми квазичастицами окажется связано движение против потока жидкости как целого, это будет означать увлечение части жидкости стенками — то есть возникновение вязкого трения.

Система координат, движущаяся вместе с жидкостью, по определению движется вместе с жидкостью без квазичастиц, то есть с жидкостью, находящейся в основном состоянии. Пусть теперь в этой жидкости появилась квазичастица с импульсом \vec{p} и энергией $\varepsilon(\vec{p})$ (в системе отсчёта, движущейся с жидкостью). Отметим, что по постановке эксперимента нам известен именно спектр квазичастиц в системе отсчёта, в которой жидкость покоится

¹³ $\frac{d}{dT} T^\alpha e^{\Delta/T} = (\alpha T^{\alpha-1} + \Delta T^{\alpha-2}) e^{-\Delta/T}$

(рисунок 8). Вернёмся в неподвижную систему отсчёта. Как изменится энергия квазичастицы?

Ответ для преобразования энергии и импульса известен из механики, мы выведем его здесь повторно для простого случая невзаимодействующих частиц¹⁴. Квазичастица — это некоторое коллективное движение всех «настоящих» частиц жидкости. Импульс квазичастицы в движущейся системе координат (в системе покоя жидкости до возникновения квазичастицы) может быть представлен как сумма импульсов всех частиц $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_{i0}$, суммирование идёт по всем частицам, индекс «ноль» указывает на систему покоя жидкости (до возникновения квазичастицы). Полная энергия состояния с одной квазичастицей в системе покоя жидкости $\sum_i \frac{p_{i0}^2}{2m}$ включает в себя энергию квазичастицы ε и энергию

движения частиц в основном состоянии жидкости E_0 : $E = \sum_i \frac{p_{i0}^2}{2m} = \varepsilon + E_0$.

В лабораторной системе координат импульс i -ой «настоящей» частицы $\vec{p}_i = \vec{p}_{i0} + m\vec{v}$, а полная энергия равна

$$E = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} = \sum_i \frac{(\vec{p}_{i0} + m\vec{v})^2}{2m} = \sum_i \frac{p_{i0}^2}{2m} + \vec{v} \cdot \sum_i \vec{p}_{i0} + \sum_i \frac{mv^2}{2} = \varepsilon + \vec{p} \cdot \vec{v} + E_0 + \frac{Mv^2}{2} .$$

Два последних слагаемых соответствуют энергии основного состояния жидкости и её движению как целого, два первых описывают изменение энергии жидкости при появлении квазичастицы и, следовательно, и задают энергию квазичастицы в лабораторной системе координат $\varepsilon' = \varepsilon + \vec{p} \cdot \vec{v}$. Перестройка спектра проиллюстрирована на рисунке 10.

Полный импульс всех частиц в лабораторной системе координат $\vec{P}' = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i \vec{p}_{i0} + \sum_i m\vec{v} = \vec{P} + \vec{P}$, где $\vec{P} = M\vec{v}$ - импульс движения жидкости, находящейся в своём основном состоянии, как целого. Импульс квазичастицы есть по определению добавка к движению системы как целого, возникающая при появлении квазичастицы. То есть $\vec{p}' = \vec{p}$ и импульс квазичастицы является галилеевским инвариантом.

Числа заполнения квазичастиц определяются бозевской функцией распределения, химпотенциал для квазичастиц равен нулю. В лабораторной системе координат:

$$n(\varepsilon') = \frac{1}{e^{\varepsilon'/T} - 1} . \text{ При } T \rightarrow 0 \text{ числа заполнения будут малы при } \varepsilon' > 0 , \text{ а при } \varepsilon' = 0$$

число заполнения станет не определено. Это соответствует самопроизвольному появлению квазичастиц с $\varepsilon' = 0$. Такое свойство является общим для всех описаний свойств различных систем на языке квазичастиц — если энергия каких-то квазичастиц становится равной нулю, то такие квазичастицы начинают рождаться сами в большом количестве¹⁵.

14 Точнее, мы считаем жидкость несжимаемой, тогда потенциальная энергия взаимодействия частиц не изменится.

15 Количество рождающихся квазичастиц может быть ограничено какими-то процессами их взаимодействия. Во многих случаях такое массовое рождение («конденсация») квазичастиц является признаком фазового перехода — изменения состояния «вакуума» относительно которого и вводились квазичастицы. Например, фазовый переход, при котором в цепочке атомов с периодом a происходит димеризация: атомы попарно сближаются навстречу друг другу со статическим смещением $u_n = \delta(-1)^n$, так что расстояния между соседними атомами теперь чередуются как $a(1 \pm \delta)$, может быть формально описан как «конденсация» фононов с волновым вектором π/a и нулевой энергией (то есть частотой, что соответствует стоячей волне деформации).

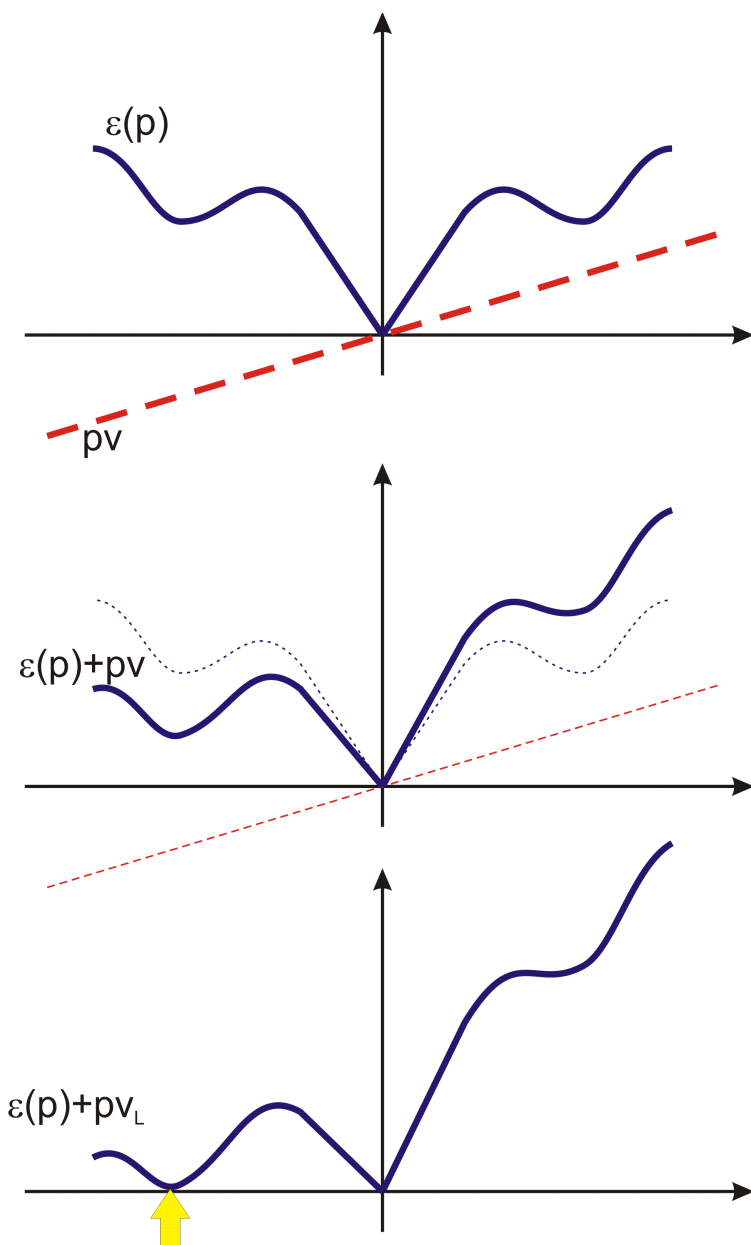


Рисунок 10: Преобразование спектра квазичастичных возбуждений при переходе в лабораторную систему координат. Верхний рисунок: спектр возбуждений в системе покоя жидкости и вклад pv для некоторой скорости меньшей критической. На среднем рисунке: спектр возбуждений в лабораторной системе координат при скорости течения меньше критической. На нижнем рисунке: спектр при критической скорости течения, стрелкой отмечен импульс при котором "конденсируются" квазичастицы.

В нашем случае при критической скорости происходит касание уровня $\varepsilon' = 0$ в точке с импульсом, противоположным скорости течения (рисунок 10). Это означает, что рождающиеся квазичастицы несут импульс против движения жидкости как целого, то есть часть жидкости увлекается (тормозится) стенками. Это и есть вязкость.

Таким образом, вязкое увлечение жидкости стенками становится возможно, если скорость течения жидкости $v > \frac{\varepsilon(p)}{p}$. Полученное неравенство называют критерием Ландау.

Это уравнение может быть решено графически: спектр $\varepsilon(p)$ известен из эксперимента

(рисунок 8), а $v p$ - уравнение прямой, проходящей через начало координат. Критическая скорость определяется касанием этой прямой с графиком $\varepsilon(p)$ (рисунок 11).

Таким образом, при малых скоростях жидкость будет течь бездиссипативно, без вязкости. Подчеркнём, что, как мы показали, из формы спектра возбуждений однозначно следует возможность существования бездиссипативного потока в этой системе. Этот вывод позднее понадобится нам при анализе явления сверхпроводимости. Также отметим, что для квадратичного спектра обычных частиц критическая скорость оказывается равной нулю.

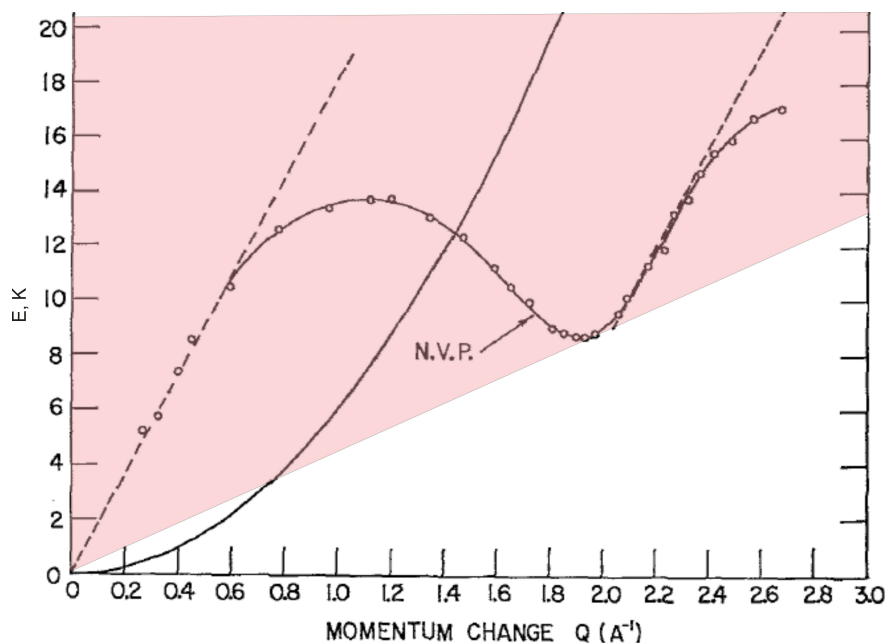


Рисунок 11 К решению задачи о критической скорости. Спектр возбуждений из работы [11], красная заливка отмечает область скоростей течения, при которых возможно рождение квазичастиц.

Касание происходит почти в ротонном минимуме, поэтому для критической скорости (скорости Ландау) $v_L \approx \frac{\Delta}{\hbar k_0} \approx 60 \text{ м/сек}$. Точка касания определяет, какие квазичастицы возникнут первыми. На практике эта оценка для скорости потери сверхтекучести оказывается завышена примерно на порядок, что связано с возможностью появления возбуждений другого типа: квантованных вихрей в сверхтекучем гелии.

Двухжидкостная модель гелия-II.[†]

Нормальная и сверхтекучая компоненты жидкости.

Эксперимент Андроникашвили показывает, что неувлекаемая вращением маятника масса жидкого гелия плавно возрастает при понижении температуры ниже лямбда-точки и только при самых низких температурах вся жидкость становится сверхтекучей.

Это соответствует нашему рассмотрению течения жидкости через капилляр: при $T \neq 0$ в жидкости уже есть возбуждения, которые могут при столкновении со стенками передавать им импульс. Поэтому та часть жидкости, которая увлекается движением возбуждений будет вести себя как нормальная жидкость и будет тормозиться благодаря трению о стенки. В то же время, условие генерации новых возбуждений не зависит от наличия возбуждений в жидкости (имеющиеся тепловые возбуждения лишь дадут вклад в энергию E_0 жидкости). То есть, и сверхтекучий характер движения должен сохраняться при ненулевой температуре.

Все эти рассуждения могут быть сведены в двухжидкостную модель гелия-II.¹⁶ В гелии-II могут одновременно сосуществовать два вида движения: бездиссипативное сверхтекучее движение со скоростью \vec{v}_s и нормальное вязкое движение со скоростью \vec{v}_n . Долю жидкости, которая увлекается возбуждениями — нормальной компоненты жидкости — удобно характеризовать плотностью нормальной компоненты ρ_n , соответственно оставшая часть жидкости в нормальном движении не участвует и характеризуется плотностью сверхтекучей компоненты ρ_s . Эти плотности зависят от температуры, в лямбда-точке плотность сверхтекучей компоненты обращается в ноль, а в нуле температуры плотность нормальной компоненты зануляется. Такое рассмотрение жидкости как «смеси» двух «частей» является способом выражения, не означающим реального разделения жидкости на две части. Это некоторая традиционная проблема нехватки «обычного» языка для описания квантовых явлений.

Полная плотность жидкости постоянна $\rho = \rho_n + \rho_s$, полный поток жидкости (импульс единицы объёма) выражается через сумму вкладов обоих движений $\vec{j} = \rho_n \vec{v}_n + \rho_s \vec{v}_s$.

Сверхтекучая компонента по определению связана с отсутствием возбуждений. Это в частности означает, что поток сверхтекучей компоненты не связан с переносом тепловой энергии. Следовательно, поток тепла в жидком гелии (перенос энтропии) связан с движением только нормальной компоненты.

Это определение позволяет уточнить к какой системе отсчёта относится экспериментально наблюдаемый спектр возбуждений $\varepsilon(\vec{p})$: по постановке эксперимента возбуждение рождается из сверхтекучей компоненты, поэтому этот спектр измеряется в системе покоя сверхтекучей компоненты. В системе относительно которой *сверхтекучая* компонента движется со скоростью \vec{v}_s энергия возбуждения $\varepsilon' = \varepsilon(\vec{p}) + \vec{p} \vec{v}_s$.

Плотность нормальной компоненты.

Для того, чтобы узнать плотность нормальной компоненты — то есть долю жидкости, увлекаемую за движением возбуждений — вычислим импульс, связанный с этим движением возбуждений. Для упрощения задачи мы можем задать удобную геометрию: пусть газ возбуждений движется относительно покоящейся в лабораторной системе координат сверхтекучей компоненты жидкости с «дрейфовой» скоростью \vec{v} . Это движение возбуждений может быть создано какими-то неравновесными внешними условиями.¹⁷

Как и при получении критерия Ландау здесь оказывается важным тот факт, что спектр возбуждений $\varepsilon(\vec{p})$ известен нам в системе покоя сверхтекучей жидкости. Движущийся газ возбуждений представляет собой неравновесную ситуацию в лабораторной системе координат, для его описания удобно перейти в систему отсчёта, в которой газ возбуждений покоится. В этой системе координат сверхтекучая компонента жидкости движется со скоростью $-\vec{v}$. Соответственно, энергия возбуждения с квазиимпульсом \vec{p} в этой системе $\varepsilon(p) - \vec{p} \vec{v}$. Тогда в этой системе отсчёта полный импульс газа квазичастиц (на единицу объёма):

$$\vec{P} = \int \vec{p} n(\varepsilon - \vec{p} \vec{v}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \text{ где } \vec{p} = \hbar \vec{k}.$$

16 Двухжидкостная модель на качественном уровне была предложена Лондоном и Тиссой в 1938 году и более строго и количественно развита Ландау в 1941 году. Эксперимент Андроникашвили был стимулирован предсказаниями Ландау. Гипотеза Лондона и Тиса предполагала, что каждая компонента жидкости содержит определённое число атомов, в то время как теория Ландау говорит о двух сосуществующих при конечной температуре видах движения: сверхтекучего движения и «нормального» вязкого движения жидкости.

17 Например, наша жидкость находится в трубке, один из концов которой нагревается.

Здесь мы воспользовались тем, что импульс квазичастицы является галилеевским инвариантом, а функция распределения $n(\varepsilon - \vec{p}\vec{v})$ записана в системе покоя газа возбуждений.

Для малых скоростей движения можно разложить функцию распределения по степеням $\vec{p}\vec{v}$: $n(\varepsilon - \vec{p}\vec{v}) = n(\varepsilon) - \frac{dn}{d\varepsilon} \vec{p}\vec{v}$. Сразу можно отметить, что в силу изотропности функции распределения член нулевого порядка обратиться в ноль.

В первом порядке

$$\vec{P} = - \int \vec{p}(\vec{p}\vec{v}) \frac{dn}{d\varepsilon} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} .$$

Усреднение по направлениям импульса даёт

$$\vec{P} = - \frac{\vec{v}}{3} \int p^2 \frac{dn}{d\varepsilon} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} .$$

Полученный интеграл ненулевой — это соответствует тому, что некоторая масса реально увлекается за газом квазичастиц, эта увлекаемая масса и есть нормальная компонента жидкости. Её плотность, таким образом, есть $\rho_n = \frac{1}{3} \int \left(- \frac{dn}{d\varepsilon} \right) p^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$.

При низких температурах (меньше 1К) эта плотность определяется фононным вкладом.

Тогда $\varepsilon = \hbar s k$ и $\frac{dn}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \frac{1}{e^{\varepsilon/T} - 1} = - \frac{1}{T} \frac{e^{\varepsilon/T}}{(e^{\varepsilon/T} - 1)^2}$, откуда

$$\rho_n = \frac{1}{3} \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{1}{T} \int_0^\infty \frac{e^{\hbar s k/T} k^4 dk}{(e^{\hbar s k/T} - 1)^2} = \frac{1}{6\pi} \frac{T^4}{\hbar^3 s^5} \int_0^\infty \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2} = \frac{2\pi^2}{45} \frac{T^4}{\hbar^3 s^5} .$$

Объяснение фонтан-эффекта.

Двухжидкостная модель позволяет нам объяснить и фонтан-эффект. Напомним, что экспериментально наблюдается натекание жидкости в объём, отделённый пористой пробкой от основной части гелия при нагреве жидкого гелия внутри этого объёма. Мы ограничимся только качественным рассмотрением.

Одним из условий равновесия в сверхтекучей жидкости является постоянство концентрации сверхтекучей компоненты. Нагрев гелия в объёме рождает возбуждения — часть гелия переходит из сверхтекучего состояния в нормальное. При этом «лишняя» нормальная компонента не может протечь через пористую пробку, а вот «недостающая» сверхтекучая компонента может затечь внутрь нашего объёма. За счёт этого тока сверхтекучей компоненты увеличивается количество жидкости в нагреваемом объёме, что и вызывает подъём уровня или даже возникновение фонтана.

Подчеркнём, что сверхтекучая часть самопроизвольно течёт из холодной области в горячую. Это означает, что, чтобы не нарушать основы термодинамики, движение сверхтекучей компоненты не сопровождается переносом тепла — то есть экспериментально доказывает, что энтропия сверхтекучей компоненты равна нулю.

Второй звук в сверхтекучем гелии.

Наличие двух компонент в гелии-II приводит к тому, что длинноволновые колебания этой необычной жидкости могут быть устроены двумя способами [2] (см. §10): В одном типе

колебаний нормальная и сверхтекучая компоненты колеблются в фазе, их скорости всё время равны. В другом типе колебаний нормальная и сверхтекучая компоненты колеблются в противофазе так, что потока массы в такой волне нет вовсе. Это отдаленно напоминает различие колебаний акустической и оптической мод в кристалле из атомов двух сортов.

Оба типа колебаний имеют линейный спектр при малых k . Первый тип колебаний соответствует обычному звуку с колебаниями давления и плотности. Второй тип колебаний соответствует так называемому *второму звуку*. В волне этого типа нет переноса массы и, соответственно, колебаний давления. Однако так как при этом происходят встречные колебания переносящей энтропию нормальной компоненты и не переносящей энтропию сверхтекучей компоненты, то в такой волне колеблется удельная энтропия среды и сопряженная ей температура — волны второго звука оказываются волнами температуры. Скорость второго звука зависит от температуры, обращается в ноль в лямбда-точке, равна примерно 20 м/сек при температурах 1.2-2 К и возрастает до $\frac{s}{\sqrt{3}} \approx 140 \text{ м/сек}$ ниже 0.5К.

Бозе-конденсация, основное состояние сверхтекучей жидкости и квантованные вихри.

Описание свойств сверхтекучего гелия в двухжидкостной модели — феноменологическое, оно не объясняет откуда берётся сверхтекучая компонента. Микроскопическая теория сверхтекучести в реальном гелии-4 с сильным взаимодействием атомов сложна и сильно выходит за рамки курса. Однако главное физическое явление, которое связано с формированием коллективного состояния в гелии-4 можно заметить уже в простой модели бозе-газа.

Пусть N безспиновых нерелятивистских невзаимодействующих бозевских частиц помещены в объём V при температуре T . Установится равновесное бозевское распределение по энергиям с числами заполнения $n = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} - 1}$, полное число частиц может быть выражено стандартным образом:

$$N = \frac{V}{(2\pi)^3} \int n d^3k = \int_0^\infty n(E) D(E) dE,$$

где $D(E)$ — плотность состояний, равная для безспиновых классических частиц в трёхмерном случае $D(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{dN}{d|k|} \frac{1}{dE/d|k|} = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \frac{m}{\hbar^2 k} = \frac{V m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E}$.

Таким образом
$$\frac{N}{V} = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{E} dE}{e^{(E-\mu)/T} - 1}.$$

В левой части стоит константа, таким образом это уравнение является интегральным уравнением на зависимость химпотенциала бозе-газа от температуры¹⁸. Отметим, что интеграл будет расходиться при положительном μ - для невзаимодействующих бозонов химпотенциал всегда отрицателен или равен нулю. Прямым дифференцированием по температуре можно убедиться, что химпотенциал должен быть убывающей функцией температуры:

$$0 = \int_0^\infty \frac{1}{(e^{(E-\mu)/T} - 1)^2} e^{(E-\mu)/T} \left(\frac{E-\mu}{T^2} + \frac{\mu'(T)}{T} \right) \sqrt{E} dE,$$

¹⁸ Формально похожие вычисления мы делали при анализе зависимости химпотенциала электронного газа от температуры.

так как интеграл от первого слагаемого положительный (для $\mu \leq 0$ это очевидно), то $\mu'(T) < 0$.

Однако, как легко проверить, всегда существует конечная¹⁹ температура T_c при которой условие на постоянство концентрации будет выполняться для нулевого значения химпотенциала

$$\frac{N}{V} = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{E} dE}{e^{E/T_c} - 1} = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} T_c^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1}$$

Интеграл сходится и выражается через дзета-функцию $\Gamma(3/2)\zeta(3/2) \approx 2.31$, откуда для температуры

$$T_c = \frac{3.32 \hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}.$$

Что будет, если понизить температуру ниже T_c ? Химический потенциал больше не может увеличиваться с охлаждением — он должен оставаться неположительным. Но тогда наш подсчёт не даст полного числа частиц! Противоречия однако нет — переход к интегрированию подразумевает малость изменения чисел заполнения при переходе между соседними энергетическими уровнями, в более строгой записи нам нужно суммировать по всем состояниям. И тогда появляется возможность «недостающему» в нашем вычислении количеству частиц собраться в состоянии с наименьшей энергией. Ниже температуры T_c в состоянии с нулевой энергией оказывается макроскопически большое число частиц, равное

$$N_0 = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right).$$

Это явление называют бозе-конденсацией (или конденсацией Бозе-Эйнштейна), а сам коллектив частиц в основном состоянии называют бозе-конденсатом. Подчеркнём ещё раз, что это связано с бозонной природой частиц — нет запрета Паули, запрещающего им собраться в одном состоянии. «Конденсация» частиц имеет место в k-пространстве, в реальном координатном пространстве частицы конденсата делокализованы по всему объёму бозе-газа.

Интересно отметить, хотя это и явно выходит за рамки применимости газовой модели, что для плотности жидкого гелия $n = 2.18 \cdot 10^{22} \text{ 1/см}^3$ вычисленная температура бозе-конденсации $T_c \approx 3.1 \text{ K}$ [7], что достаточно близко к лямбда-точке.

Связь бозе-конденсации и сверхтекучести не столь однозначна. Для трёхмерной сверхтекучести необходима бозе-конденсация. Однако при этом ещё необходимо и вполне определённое взаимодействия между частицами (отталкивание), которое сделает спектр возбуждений линейным, а не квадратичным как для свободных частиц газа. Действительно, при квадратичном спектре критерий Ландау будет давать нулевую скорость разрушения сверхтекучести. Кроме того, в бозе-системах с взаимодействием соответствие между количеством частиц в конденсате и плотностью сверхтекучей компоненты в двухжидкостной модели оказывается более сложным. Взаимодействие не позволяет всем частицам собраться в состоянии с $E=0$, часть частиц остаётся вне конденсата²⁰. Например, в гелии-4 при $T=0$ плотность сверхтекучей компоненты равна плотности жидкости, но при этом в состоянии бозе-конденсата находится только около 10% всех частиц [7]. Однако подробное

¹⁹ Отметим, что это результат существенно трёхмерный. При понижении размерности до двумерной (случай тонких плёнок гелия) такого не будет.

²⁰ Аргументация аналогична различию между функциями распределения ферми-газа и ферми-жидкости при $T=0$.

обсуждение этих вопросов существенно выходит за рамки нашего курса.

Все частицы в состоянии бозе-конденсата описываются одной волновой функцией $\Psi_0(\vec{r})$. Часто у этой волновой функции выбирают нормировку на число частиц в конденсате $\Psi_0 = \sqrt{N_0} e^{i\Phi}$, где Φ фаза волновой функции. Фаза может зависеть от координаты, эта зависимость определяется условиями в которых находится бозе-газ.

Движение конденсата как целого соответствует движению сверхтекучей компоненты жидкости: передача энергии возможна только за счёт создания возбуждений, условие генерации которых определяется критерием Ландау. Действуя оператором импульса $\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ на Ψ_0 легко заметить, что $\hat{p}\Psi_0 = (\hbar \vec{\nabla} \Phi) \Psi_0$. Откуда, заменяя в рамках квазиклассического подхода операторы на соответствующие физические величины, для скорости сверхтекучего движения получаем $\vec{v}_s = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \Phi$. Таким образом, градиент фазы определяет скорость сверхтекучего движения.

Это свойство по аналогии с электростатикой называют свойством потенциальности скорости сверхтекучей компоненты: фаза волновой функции имеет смысл электростатического потенциала, а скорость сверхтекучего движения — напряжённости электрического поля.

У этой аналогии есть, однако, одно исключение. В отличие от электростатического потенциала фаза определена с точностью до слагаемого кратного 2π , набег фаз кратный 2π не меняет волновую функцию. Поэтому теорема о циркуляции будет иметь вид

$$\oint \vec{v}_s d\vec{l} = \frac{\hbar}{m} 2\pi n = \frac{h}{m} n.$$

Это означает, что возможны такие состояния сверхтекучей жидкости, когда циркуляция сверхтекучей компоненты не равна нулю. В простейшем случае цилиндрической геометрии такое состояние называют вихрем. Скорость движения сверхтекучей компоненты зависит от радиуса до оси вихря $v_s = \frac{\hbar}{mr}$, видно что на малых расстояниях эта скорость превысит критическую скорость Ландау. Следовательно, сердцевина вихря (его «кор», от английского «core») будет состоять не из сверхтекучей, а из нормальной жидкости. Рождение таких вихрей на неоднородностях поверхности экспериментальной ячейки в реальных экспериментах наступает на скоростях течения на порядок меньших скорости Ландау и ограничивает область существования сверхтекучести.

Отметим, что теорема о циркуляции допускает существование многоквантовых $n > 1$ вихрей. Однако такие состояния энергетически не выгодны. Кинетическая энергия n -квантового вихря в n^2 раз больше энергии одноквантового вихря, поэтому такому вихрю выгодно распаться с сохранением момента импульса на n одноквантовых вихрей.

Термодинамика сверхпроводников I рода.

Основные экспериментальные факты.

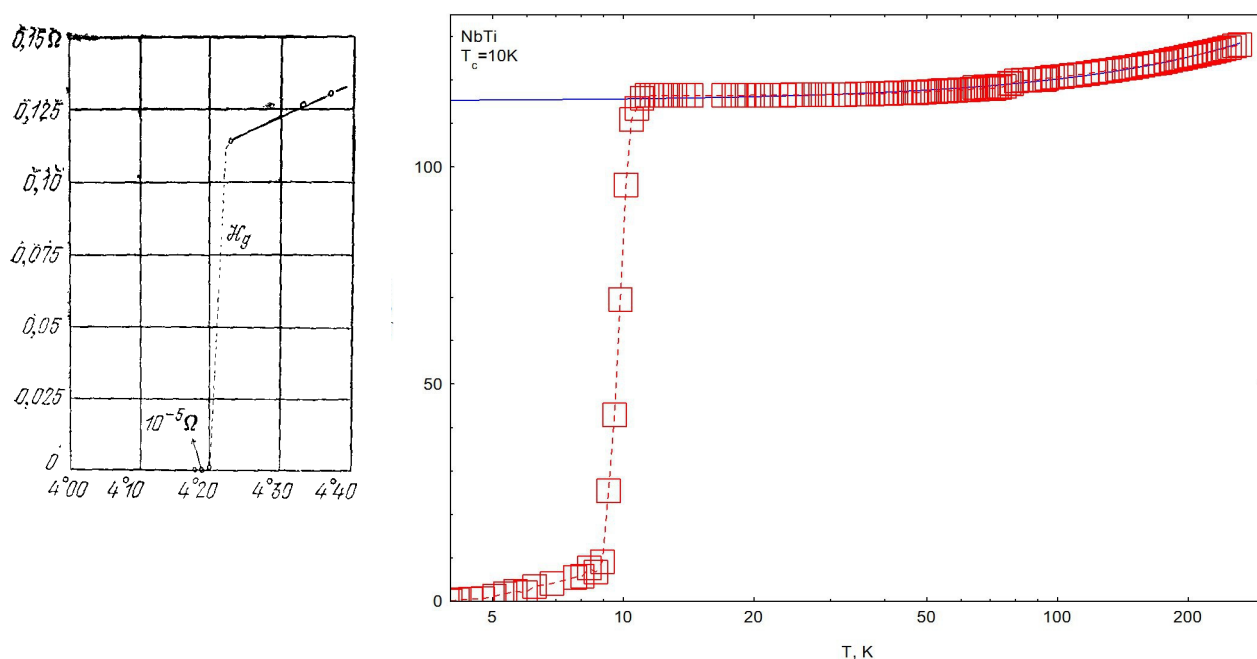


Рисунок 12 Слева: данные Камерлинг-Оннеса, первое наблюдение сверхпроводимости в ртути (1911). По книге [5]. Справа: зависимость сопротивления в проволочке NbTi от температуры, данные автора. Синяя кривая — линейная зависимость сопротивления от температуры выше точки перехода (по оси температур масштаб логарифмический). Данные получены на простом демонстрационном стенде, часть проволочки была при более высокой температуре и оставалась в нормальном состоянии, что объясняет остаточное сопротивление ниже температуры перехода.

Перечислим некоторые экспериментальные наблюдения²¹, необходимые для обоснования наших рассуждений.

Явление сверхпроводимости было открыто Камерлинг-Оннесом при изучении зависимости сопротивления ртути от температуры. Он обнаружил, что при температуре около 4.2 К сопротивление ртути скачком меняется не менее чем на 4 порядка (Рисунок 12). Аналогичное скачкообразное понижение сопротивления до нуля было обнаружено и в ряде других металлов и сплавов (при этом не все хорошие металлы становятся сверхпроводниками). Температуры перехода в сверхпроводящее состояние для некоторых металлов и сплавов представлены в таблицах 1 и 2. Точные измерения позволяют утверждать, что сопротивление ниже точки перехода точно обращается в ноль. Это проверялось, например, возбуждением в кольце из сверхпроводника индукционного тока, затухание которого далее контролировалось измерением магнитного поля этого витка. Эксперимент длящийся около года не показал заметного уменьшения тока в таком кольце.

Температуры перехода для чистых элементов составляют обычно градусы кельвина, в сплавах температура перехода может достигать 10-20К. В некоторых соединениях

²¹ Приводимая подборка экспериментальных фактов ориентирована на обсуждение термодинамики сверхпроводников I рода и не полна. Другие важные факты, такие как зависимость температуры перехода от изотопного состава (изотоп-эффект), необычные туннельные эффекты в сверхпроводниках (эффект Джозефсона) будут обсуждаться далее в соответствующих разделах курса.

(YBa₂Cu₃O₇ и другие оксиды) обнаружена сверхпроводимость при более высоких температурах, такие соединения называют высокотемпературными сверхпроводниками.

Оказалось, что сверхпроводящее состояние может быть разрушено приложением достаточно сильного магнитного поля. Величина этого поля, называемого критическим полем, растёт с понижением температуры и равна нулю в точке перехода. Характерные величины критического поля для чистых элементов обычно не больше килоэрстеда, для сплавов величина критического поля при самой низкой температуре может достигать 20 Тл (Nb₃Sn). Зависимость критического поля от температуры для элементов, демонстрирующих переход в сверхпроводящее состояние, имеет вид перевернутой параболы и может быть представлена эмпирическим законом $H_c(T) = H_{c0} \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right)$. Таким образом, на плоскости H-T может

быть построена фазовая диаграмма сверхпроводника (рисунок 13), температура и внешнее магнитное поле являются термодинамическими переменными, определяющими состояние сверхпроводника. Отсюда сразу следует, что сопряжённая к магнитному полю величина — намагниченность $\vec{M} = - \frac{dE}{d\vec{H}}$ (или индукция поля внутри сверхпроводника $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$) — будет функцией состояния сверхпроводника.

Таблица 1: Температура сверхпроводящего перехода и экстраполированное к нулевой температуре значение критического поля для некоторых элементов-сверхпроводников. Из книги [4].

Элемент	T_c , К	$H_c(0)$, Э	Элемент	T_c , К	$H_c(0)$, Э
Al	1.18	105	Os	0.66	70
Be	0.026		Pa	1.4	
Cd	0.52	28	Pb	7.20	803
Ga	1.08	59	Re	7.70	200
Hf	0.13		Ru	0.49	69
Hg- α	4.15	411	Sn	3.72	305
Hg- β	3.95	339	Ta	4.47	829
In	3.41	282	Tc	7.8	1410
Ir	0.11	16	Th	1.38	160
La- α	4.88	800	Ti	0.4	56
La- β	6	1100...1600	Tl	2.38	178
Lu	0.1		V	5.40	1408
Mo	0.92	96	W	0.015	1.15
Nb	9.25	2060	Zn	0,85	54

Таблица 2: Критические температуры некоторых сплавов и ВТСП. По книге [4].

Соединение	T_c , К	Соединение	T_c , К
Nb ₃ Sn	18.1	Bi ₂ Sr ₂ Ca ₂ Cu ₃ O ₁₀	111
(Nb ₃ Al) ₄ +Nb ₃ Ge	20	Tl ₂ Sr ₂ Ca ₂ Cu ₃ O ₁₀	123
La _{0.95} Sr _{0.075} CuO ₄	34	HgBa ₂ Ca ₂ Cu ₃ O ₈	133
YBa ₂ Cu ₃ O ₇	92.4		

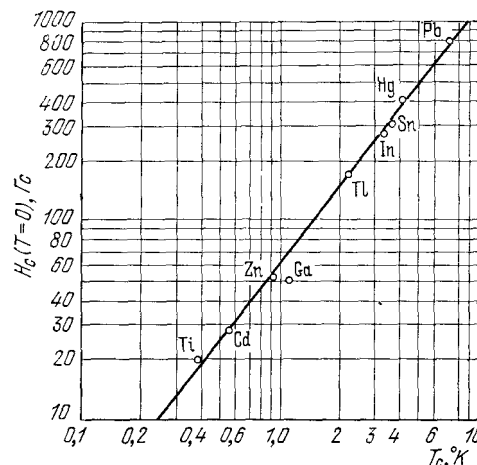
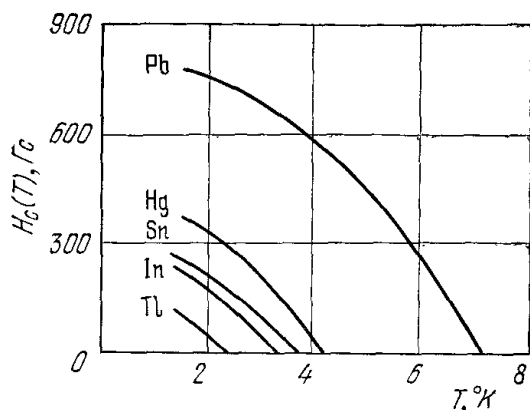


Рисунок 13 Слева: зависимость критического поля от температуры для некоторых элементов-сверхпроводников. Справа: связь критического поля с температурой перехода. Из книги [5].

Оказывается, что для многих элементов-сверхпроводников критическое поле и температура перехода связаны друг с другом: чем больше температура перехода, тем больше критическое поле (рисунок 13).

Наконец, было обнаружено, что сверхпроводник «выталкивает» из себя магнитное поле, этот эффект назвали эффектом Мейснера.²² Эффект Мейснера проявляется в том, что при переходе в сверхпроводящее состояние в образце сверхпроводника возникает диамагнитная намагниченность. Оказалось, что есть два типа сверхпроводников, называемых сверхпроводниками I и II рода. Сверхпроводники I рода демонстрируют полный эффект Мейснера: в толще сверхпроводящего образца везде $\vec{B}=0$ и намагниченность образца

$\vec{M} = -\frac{1}{4\pi} \vec{H}$ соответствует идеальному диамагнетик. Сверхпроводники II рода

демонстрируют частичный эффект Мейснера: при поле выше некоторого порогового значения (но ниже поля полного разрушения сверхпроводимости) магнитное поле как-то проникает вглубь образца и намагниченность образца оказывается меньше намагниченности идеального диамагнетика (рисунок 14). Для сверхпроводников второго рода выделяют два критических поля: нижнее критическое поле H_{c1} , ниже которого эффект Мейснера полный (это поле обычно относительно невелико и не превышает 1 кЭ), и верхнее критическое поле H_{c2} , в котором сверхпроводящее состояние (т.е. $\rho=0$) разрушается (верхнее критическое поле в рекордных сверхпроводниках II рода превышает 20 Тл). Как правило, чистые элементы оказываются сверхпроводниками I рода, а сплавы и сложные соединения — сверхпроводниками II рода. Сейчас мы будем рассматривать только свойства сверхпроводников I рода.

²² Иногда также называется эффектом Мейснера-Оксенфельда.

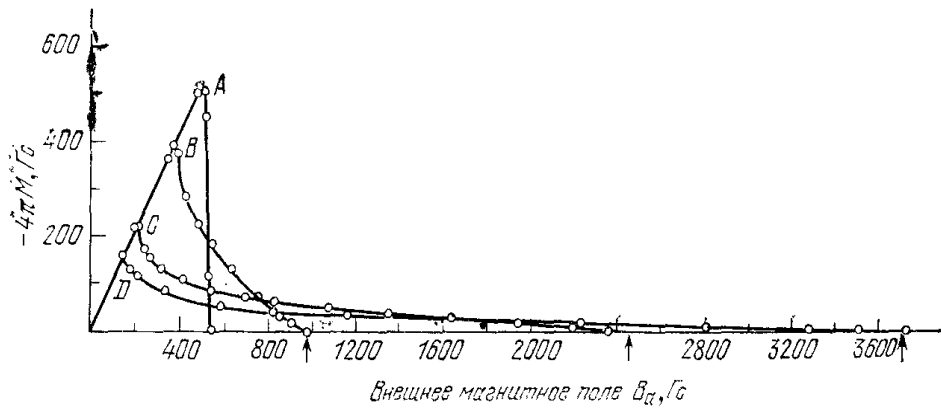


Рисунок 14 Кривые намагничивания различных сверхпроводников. (A) – чистый Pb, (B) – сплав Pb с 2.08 вес.% In, (C) – сплав Pb с 8.23 вес.% In, (D) – сплав Pb с 20.4 вес.% In. Чистый свинец является сверхпроводником I рода, сплавы — сверхпроводниками II рода. Стрелками отмечены значения верхнего критического поля. По книге [5].

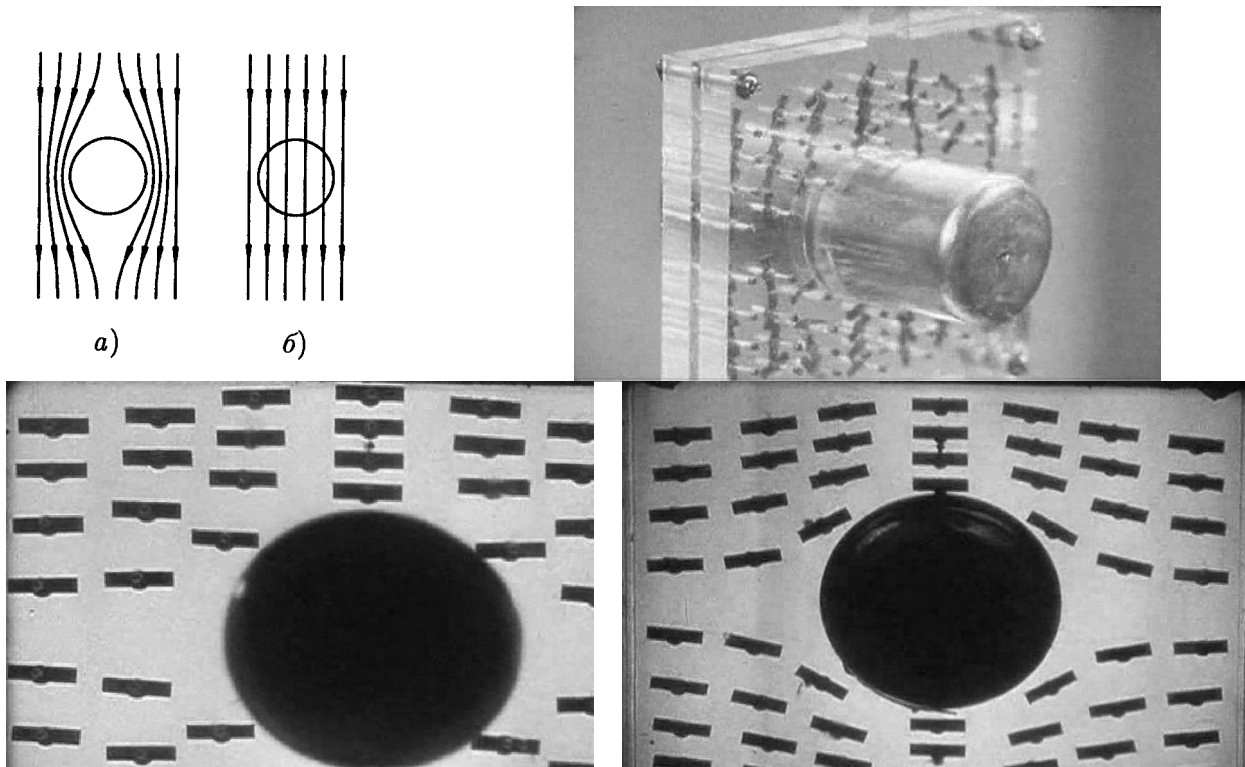


Рисунок 15 Верхний ряд: (слева) Схема отличия картины силовых линий магнитного поля для сверхпроводника (а) и «идеального проводника» (б) при переходе в состояние с нулевой проводимостью в присутствии магнитного поля. Из книги [4]. (справа) Устройство прибора для демонстрации эффекта Мейснера— оловянный цилиндр вставлен в каркас, в который вмонтирован массив намагниченных стрелок. Нижний ряд: Демонстрационный прибор в одном и том же горизонтально направленном магнитном поле (цилиндр в центре) при температуре выше температуры перехода в сверхпроводящее состояние (слева) и ниже температуры перехода (справа). Из демонстрационного фильма [3].

Магнитные свойства сверхпроводника первого рода.

Во-первых, отметим общее свойство сверхпроводников. Так как сопротивление в сверхпроводящем состоянии равно нулю, то сверхпроводник эквипотенциален $\varphi = const$ и, следовательно, $\vec{E} = 0$. Тогда из закона электромагнитной индукции следует, что поток вектора магнитной индукции через любой сверхпроводящий контур должен быть неизменен:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{S} = -c \int \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = 0. \quad \text{Это означает, что при помещении сверхпроводника в}$$

магнитное поле по поверхности сверхпроводника начинают течь бездиссипативные токи, поле которых компенсирует изменение внешнего поля и поддерживает поток через любой контур неизменным.

Это свойство — возникновение экранирующих индукционных токов — характерно и для обычных проводников. Поэтому гипотетический «идеальный проводник» (нормальный металл с нулевым сопротивлением) тоже обладал бы свойством сохранения потока вектора магнитной индукции через контур при изменении внешнего поля. Однако поведение сверхпроводника существенно отличается от поведения «идеального проводника»: сверхпроводник первого рода (и сверхпроводник второго рода в малых полях) при переходе в сверхпроводящее состояние *в присутствии магнитного поля* выталкивает из себя силовые линии магнитного поля (это и есть экспериментально наблюдаемый эффект Мейснера), в то время как при переходе в состояние «идеального проводника» силовые линии остались бы «вморожены» в образец (рисунок 15).

Например, если кольцо из сверхпроводящего материала поместить в магнитное поле и перевести в сверхпроводящее состояние, то при выталкивании магнитного поля из объёма сверхпроводника некоторые силовые линии окажутся «пойманными» в кольце. Если затем вывести поле, то в кольце возникнет незатухающий ток, создающий поток вектора магнитной индукции через кольцо в точности равный исходному. Этот способ возбуждения тока использовался в упоминавшихся уже опытах по исследованию затухания сверхпроводящего тока.

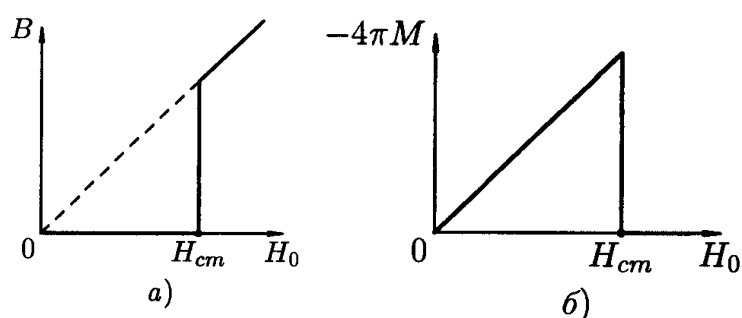


Рисунок 16 Зависимость индукции магнитного поля в толще сверхпроводника первого рода и магнитного момента единицы объёма от внешнего поля. Из книги [4].

Таким образом, условие $\rho = 0$ не даёт полного описания свойств сверхпроводника. Для сверхпроводников первого рода необходимо добавить условие $\vec{E} = 0$. Отсюда сразу следует в силу граничного условия $B_{\perp} = const$, что на границе сверхпроводника произвольной формы силовые линии должны быть касательны к сверхпроводнику. Из-за этого при «обтекании» силовыми линиями сверхпроводника сложной формы (например, цилиндра в поле, приложенном перпендикулярно к его оси на рисунке 15) в некоторых областях вне сверхпроводника густота силовых линий увеличится (верхняя и нижняя части цилиндра в

опыте на рисунке 15), то есть напряжённость внешнего поля будет меняться вдоль поверхности образца. Это может привести в достаточно сильном магнитном поле к ситуации, когда в некоторых точках напряжённость магнитного поля будет превышать критическую, а в некоторых останется ниже критического. Тогда образуется так называемое *промежуточное состояние*, в котором часть образца находится в нормальном, а часть в сверхпроводящем состоянии. Мы ограничимся рассмотрением простой геометрии бесконечно длинного цилиндра, ось которого параллельна полю, или плоскости из сверхпроводника, параллельной полю, где такие эффекты не возникают.

В силу условия²³ $\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_m$ мы можем найти плотность поверхностного экранирующего тока $\vec{j}_{\text{нов}} = \frac{c}{4\pi} [\vec{n} \times \vec{H}_0]$, где \vec{n} – единичный вектор внешне нормали к поверхности сверхпроводника, а \vec{H}_0 — напряжённость внешнего поля. В толще сверхпроводника экранирующих токов нет в силу условия $\vec{B} = 0$. Конечно, поверхностный экранирующий ток течёт в некотором тонком слое на поверхности, в этом слое индукция магнитного поля отлична от нуля. Глубина этого слоя, называемая глубиной проникновения типично порядка 10^{-5} см. Сейчас мы пренебрегаем этим поверхностным эффектом.

Свободная энергия сверхпроводящего состояния.

Пусть длинный цилиндр из сверхпроводника первого рода помещён в магнитное поле \vec{H} , параллельное оси цилиндра. Намагниченность единицы объёма $\vec{M} = -\frac{1}{4\pi} \vec{H}$. Значит, при увеличении поля от нуля до некоторого H_0 источник магнитного поля совершит работу над единицей объёма сверхпроводника²⁴ $A = -\int_0^{H_0} \vec{M} d\vec{H} = \frac{1}{8\pi} H_0^2$. Эта работа идёт на увеличение свободной энергии²⁵ сверхпроводника. Таким образом, свободная энергия сверхпроводника в поле

23 Во избежание путаницы с привычной формой записи уравнения Максвелла $\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ напомним, что в этом уравнении фигурирует плотность внешнего тока. Вспомним (см. [13] §29), что индукция поля в среде по определению есть средняя напряжённость магнитного поля. Уравнение Максвелла для напряжённости \vec{h} («в вакууме между атомов среды») с учётом движения зарядов $\text{rot } \vec{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \vec{v}$, здесь ρ – плотность заряда. При усреднении по времени и по пространству производная по времени для постоянного поля исчезает, а средняя напряжённость заменяется на индукцию. Получаем $\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \overline{\rho \vec{v}}$. Для диэлектрика интеграл по полной площади любого поперечного сечения тела $\int \overline{\rho \vec{v}} d\vec{S} = 0$ (полного тока нет), для проводника это же верно при отсутствии внешнего тока. Это позволяет связать среднее $\overline{\rho \vec{v}}$ с ротором некоторого вектора, отличного от нуля только внутри тела $\overline{\rho \vec{v}} = c \text{rot } \vec{M}$. Сравнивая с определением полного магнитного момента тела $\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int [\vec{r} \times \overline{\rho \vec{v}}] dV = \frac{1}{2} \int [\vec{r} \times \text{rot } \vec{M}] dV$, можно показать, что \vec{M} есть намагниченность единицы объёма. При наличии внешнего тока в проводнике $\overline{\rho \vec{v}} = c \text{rot } \vec{M} + \vec{j}$, первое слагаемое иногда называют плотностью молекулярных токов \vec{j}_m .

24 Напомним, что $dE = -\vec{M} d\vec{H}$.

25 Мы подразумеваем $T = \text{const}$ в ходе намагничивания, поэтому используем свободную энергию $F(T, H)$, а не термодинамическую энергию $E(S, H)$.

$$F_s(H, T) = F_s(H=0, T) + \frac{1}{8\pi} H^2 = F_{s0}(T) + \frac{1}{8\pi} H^2 .$$

Выгодность сверхпроводящего состояния говорит о том, что свободная энергия сверхпроводящей фазы F_{s0} меньше свободной энергии нормальной фазы F_{n0} . Переход в нормальное состояние произойдёт по достижении критического поля H_c . Пренебрегая зависимостью энергии нормального состояния от поля (магнитная восприимчивость металла мала по сравнению с идеальным диамагнетизмом сверхпроводника) мы можем тогда записать $F_{n0} - F_{s0} = \frac{1}{8\pi} H_c^2$. Таким образом, критическое поле является мерой выгодности сверхпроводящего состояния. Определённое таким образом критическое поле массивного образца в геометрии поля параллельного поверхности называют также термодинамическим критическим полем.

Отсюда можно найти энтропию сверхпроводящего состояния, используя термодинамическое соотношение $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$. Дифференцированием по температуре получаем:

$$S_s - S_n = \frac{1}{4\pi} H_c(T) \frac{\partial H_c}{\partial T} .$$

Отметим несколько следствий этого результата:

- Из теоремы Нернста следует, что энтропия обращается в ноль при $T=0$. Следовательно, $\frac{\partial H_c}{\partial T} = 0$ при нулевой температуре. То есть, кривая $H_c(T)$ должна приближаться к нулю температуры с горизонтальной касательной.
- Из экспериментального факта монотонного убывания критического поля с ростом температуры следует, что всегда $S_s < S_n$. То есть сверхпроводящее состояние является в каком-то смысле *более упорядоченным*, чем нормальное.
- При переходе в сверхпроводящее состояние в нулевом поле энтропия не меняется (т.к. $H_c(T_c) = 0$). А при переходе в сверхпроводящее состояние в конечном поле, наоборот, имеется скачок энтропии. Это означает, что в нулевом поле фазовый переход происходит без выделения или поглощения тепла и является переходом второго рода, а в магнитном поле сверхпроводящий фазовый переход является переходом первого рода. При этом при переходе в нормальное состояние тепло поглощается, а при переходе в сверхпроводящее состояние — отдаётся.

Скачок теплоёмкости при переходе в сверхпроводящее состояние.

Рассмотрим, как меняется теплоёмкость²⁶ при переходе в сверхпроводящее состояние. Пользуемся известным термодинамическим соотношением $C = T \frac{\partial S}{\partial T}$ и из полученного выше выражения для изменения энтропии получаем:

$$C_s - C_n = \frac{T}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)^2 + H_c \frac{\partial^2 H_c}{\partial T^2} \right] .$$

²⁶ Вычисления делаются в расчёте на единицу объёма, температура измеряется в энергетических единицах. При применении этих формул к задачам следует контролировать размерность.

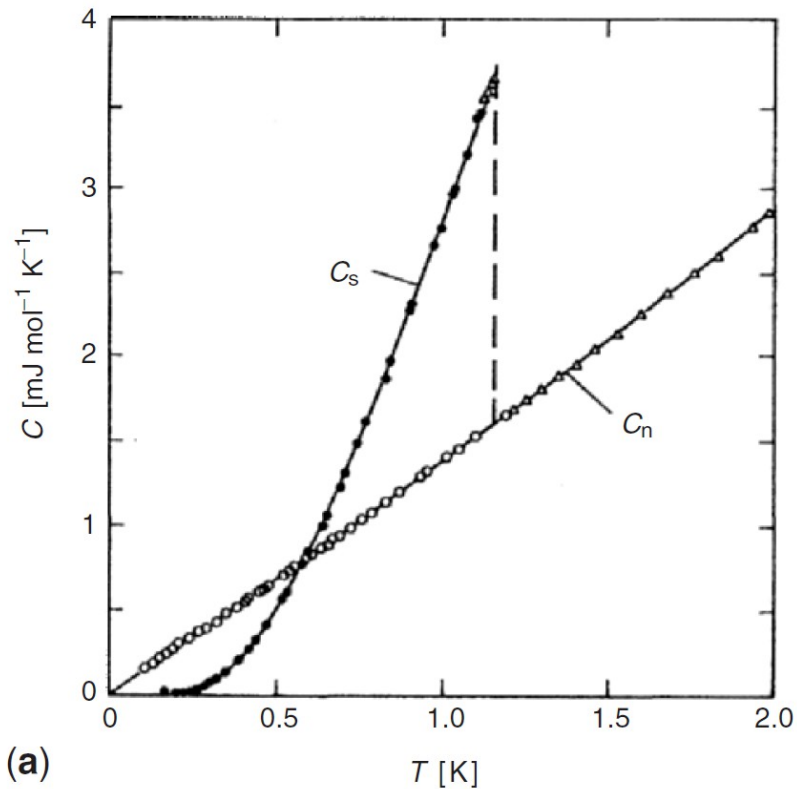


Рисунок 17 Теплоёмкость алюминия в сверхпроводящем (закрашенные символы) и нормальном (открытые символы) состояниях. Теплоёмкость в нормальном состоянии ниже T_c измерена в поле, большем критического. Из книги [6].

В частности, отсюда следует наличие скачка теплоёмкости в T_c при переходе в нулевом поле $\Delta C = \frac{T_c}{4\pi} \left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)^2$, эту формулу называют формулой Рутгерса. В сверхпроводящей фазе теплоёмкость (при переходе в нулевом поле) больше, чем в нормальной. С точностью эмпирической квадратичной аппроксимации зависимости критического поля от температуры $H_c(T) = H_{c0} \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]$ $\Delta C \approx \frac{H_{c0}^2}{\pi T_c}$.

Такой скачок действительно наблюдается (рисунок 17). При этом при достаточно низких температурах теплоёмкость сверхпроводящей фазы оказывается меньше теплоёмкости металла в нормальном состоянии при той же температуре (в нормальное состояние можно перейти, приложив поле выше критического). Такое пересечение кривых $C_s(T)$ и $C_n(T)$ является необходимым следствием отмеченных свойств энтропии: энтропия двух фаз совпадает при $T=0$ и в T_c , поэтому обязательно есть точка в которой $\frac{d}{dT}(S_n - S_s) = 0$, а в этой точке по определению равны и теплоёмкости двух фаз.