

Московский физико-технический институт  
Кафедра общей физики

Лекция 9

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СВЕРХПРОВОДНИКОВ. ОСНОВЫ  
МИКРОСКОПИКИ. СВЕРХПРОВОДНИКИ II РОДА.

заметки к лекциям по общей физике

В.Н.Глазков

Москва

2018

В данном пособии представлены материалы к лекции по теме «Электродинамика сверхпроводников. Основы микроскопии. Сверхпроводники II рода.» из курса «Квантовая макрофизика», преподаваемого на кафедре общей физики МФТИ.

Пособие не претендует на полноту изложения материала и в основном является авторскими заметками к лекциям, оно содержит основные сведения по этой теме курса.

Основным учебником является В.В.Шмидт «Введение в физику сверхпроводников» [1], темы этой лекции разбираются в главах II (параграфы 5, 6, 7, 8), VI (параграфы 43, 44, 45) и V (параграфы 27, 28, 29, 30, 31). Общие сведения содержатся также в книге Ч. Киттеля «Введение в физику твёрдого тела» [2] (глава 12). Построение энергетической диаграммы сверхпроводника обсуждается в компактной форме в приложении II к задачнику [3].

Разделы отмеченные символом † являются дополнительными.

**Основные понятия, вводимые на этой лекции:**

1. Уравнения Лондонов.
2. Глубина проникновения и длина когерентности.
3. Эффективное притяжение электронов в кристалле и образование куперовских пар.
4. Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника.
5. Вихри в сверхпроводнике II рода.

## Оглавление

Электродинамика сверхпроводников.....	5
Уравнения Лондонов.....	5
Первое уравнение Лондонов.....	5
Второе уравнение Лондонов.....	6
Альтернативный способ вывода уравнения Лондонов.....	7
Проникновение магнитного поля в сверхпроводник.....	8
Высокочастотные свойства сверхпроводника†.....	9
Квантовое обобщение уравнения Лондонов.....	11
«Конденсат» сверхпроводящих электронов.....	11
Квантование магнитного потока.....	12
Экспериментальное определение кванта потока.....	13
Основы микроскопии сверхпроводников.....	15
Основные экспериментальные факты.....	15
Спектр электронных возбуждений в сверхпроводнике. Роль щели в спектре возбуждений сверхпроводника.....	18
Критический ток сверхпроводника.....	20
Основные результаты модели БКШ. ....	22
Построение спектра возбуждений сверхпроводника. †.....	22
Основное состояние сверхпроводника: образование куперовских пар. ....	24
Роль электрон-фононного взаимодействия.....	26
Импульсы спариваемых электронов.....	28
Длина когерентности.....	29
Некоторые точные результаты модели БКШ.....	29
Сверхпроводники II рода.....	31
Магнитные свойства сверхпроводников второго рода. ....	31
Энергия границы раздела сверхпроводящей и нормальной фаз.....	31
Вихри Абрикосова.....	33
Магнитное поле внутри абрикосовского вихря. †.....	34
Критические поля сверхпроводника второго рода. †.....	35
Наблюдение решётки абрикосовских вихрей.....	35
Пиннинг вихревой решётки.....	39

## Список литературы

- 1: Шмидт В.В., Введение в физику сверхпроводников, М.:МЦНМО, 2000
- 2: Ч.Киттель, Введение в физику твёрдого тела., ,
- 3: под ред. В.А.Овчинкина, Сборник задач по общему курсу физики, часть 3: Атомная и ядерная физика. Строение вещества., Физматкнига, 2009
- 4: Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц, Теоретическая физика, том VIII: Электродинамика сплошных сред, Москва "Наука", 1982
- 5: M.Tinkham, Introduction to superconductivity, McGraw-Hill, Inc., 1996
- 6: wolframalpha.com, , 2017,
- 7: B.S.Deaver and W.M.Fairbank , Experimental evidence for quantized flux in superconducting cylinders, Physical Review Letters, 7, 43 (1961)
- 8: R.Doll and M.Naebauer, Experimental proof of magnetic flux quantization in a superconducting ring, Physical Review Letters, 7, 51 (1961)
- 9: Frank Pobell, Matter and Methods at Low Temperatures, Springer, 2007
- 10: А.А.Абрикосов, Основы теории металлов, Москва, Физматлит, 2010

- 11: CERN, LHC Machine Outreach: Super conducting cable, 2015, <http://lhc-machine-outreach.web.cern.ch/lhc-machine-outreach/components/cable.htm>
- 12: Oxford Instruments, Nb-Ti / Copper Matrix Monolith Superconducting Wire, 2015, <http://www.oxford-instruments.com/products/superconducting-magnets-and-wire/superconducting-wire/nb-ti-copper-matrix-monolith>
- 13: Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц, Теоретическая физика том 9: Статистическая физика часть 2, М.: Физматлит, 2002
- 14: U. Essmann, H. Träuble, The direct observation of individual flux lines in type II superconductors, *Physics Letters A*, 24, 526 (1967)
- 15: А.Жёлудев, Лекции по нейтронной дифракции, 2012, <http://www.neutron.ethz.ch/education/Lectures/>
- 16: , Вэб-сайт Института Лауэ-Ланжевена в Гренобле , , <http://www.ill.eu/>
- 17: S. Mühlbauer, C. Pfleiderer, P. Böni, M. Laver, E. M. Forgan, D. Fort, U. Keiderling, and G. Behr, Morphology of the Superconducting Vortex Lattice in Ultrapure Niobium, *Phys. Rev. Lett.*, 102, 136408 (2009)

# Электродинамика сверхпроводников.

## Уравнения Лондонов.

Для строгого описания свойств сверхпроводника в электромагнитном поле необходимо построение последовательной микроскопической теории. Однако феноменологическое описание этих свойств при помощи уравнений Лондонов<sup>1</sup> представляет интерес как благодаря простоте и иллюстративности получаемых результатов, так и как пример построения феноменологической теории для описания сложного и непонятного (на момент предложения этих уравнений) явления.

По сути, уравнения Лондона показывают нам, какие ограничения следуют из уравнений электродинамики (уравнений Максвелла), если наложить на них следующие из эксперимента условия:

1. возможность существования бездиссипативного (сверхпроводящего) тока;
2. существование эффекта Мейснера (абсолютного диамагнетизма).

Мы будем пока рассматривать сверхпроводники первого рода, в которых эффект Мейснера полный.

Будем считать<sup>2</sup>, что движение электронов в сверхпроводнике можно разделить на «нормальное» (диссипативное) и сверхпроводящее (бездиссипативное). Аналогиями плотности нормальной и сверхтекучей компонент будут концентрации нормальных и сверхпроводящих электронов  $n_n$  и  $n_s$ . Полная концентрация равна  $n = n_n + n_s$ , концентрация сверхпроводящих электронов меняется от нуля при температуре перехода до  $n$  при  $T = 0$ .

Подчеркнём также, что уравнения Лондонов, обсуждаемые далее, всегда предполагают локальность — динамика носителей сверхтекучего тока определяется электромагнитным полем в точке нахождения носителя. Это предположение, естественное для электронов, оказывается ограничено дальнейшим развитием представлений о природе сверхпроводимости: носителем заряда в сверхпроводящем движении как мы увидим далее является связанная пара электронов, имеющая в принципе ненулевой размер. Поэтому это предположение о локальности требует, чтобы поле менялось слабо на размере такой пары, что вообще говоря верно не всегда. Соответственно, это рассмотрение будет справедливо если возникающие масштабы длины будут велики по сравнению с размером пары.

## Первое уравнение Лондонов.

Будем считать, что  $n_s$  не меняется по образцу<sup>3</sup> и не зависит от имеющихся (слабых) электрического и магнитных полей. Электроны будем рассматривать в модели свободных электронов.

Уравнение динамики для сверхпроводящего электрона:

---

1 Получены немецкими физиками братьями Ф. и Г. Лондон (Fritz London, Heinz London) в 1935 году.

2 Это является в каком-то смысле аналогичным двухжидкостной модели сверхтекучего гелия.

3 Это априорное предположение может нарушаться на границе сверхпроводника, например при контакте сверхпроводника с нормальным металлом. Как мы увидим далее, возможность изменения концентрации сверхпроводящих электронов в пространстве задаёт ещё один пространственный масштаб в сверхпроводнике.

$$m \frac{d\vec{v}_s}{dt} = -e\vec{E},$$

где  $m$  – эффективная масса электрона, а  $\vec{v}_s$  – его скорость, константа элементарного заряда считается положительной. Мы получали аналогичное уравнение для нормальных электронов в металле, где вводилось время пробега  $\tau$ , приводящее к появлению конечной дрейфовой скорости и конечной проводимости. Для описания бездиссипативного тока мы искусственно полагаем время пробега сверхпроводящего электрона бесконечным.

Умножая обе части на  $(-en_s)$ , получим:

$$\frac{d}{dt}(-en_s\vec{v}_s) = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E},$$

$$\frac{d\vec{j}_s}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E},$$

где плотность сверхпроводящего тока  $\vec{j}_s = -en_s\vec{v}_s$ .

Полученное уравнение называют первым уравнением Лондонов. Из этого уравнения следует, что в стационарных условиях напряжённость электрического поля внутри сверхпроводника строго равна нулю, в противном случае имелось бы неограниченное ускорение сверхпроводящих электронов. Поэтому нормальные электроны остаются в покое и диссипации энергии нет.

## Второе уравнение Лондонов.

Выясним теперь как меняется магнитное поле в приповерхностном слое сверхпроводника. Под полем  $\vec{H}$  в этих рассуждениях мы будем иметь в виду истинное микроскопическое магнитное поле.<sup>4</sup> Для простоты рассуждений (чтобы не учитывать размагничивающие факторы) будем подразумевать «хорошую» геометрию образца: длинный цилиндр, параллельный внешнему полю. Внешнее поле (поле создаваемое внешним магнитом) будем считать однородным.

Сверхпроводящее движение электронов создаёт магнитное поле внутри цилиндра

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_s. \text{ Идеальный диамагнетизм сверхпроводника означает, что поле}$$

сверхпроводящего тока внутри сверхпроводника полностью компенсирует внешнее. Плотность кинетической энергии сверхпроводящего движения электронов

$$W_{\text{кин}} = n_s \frac{m v_s^2}{2} = \frac{m}{2e^2 n_s} j_s^2, \text{ с учётом выписанного уравнения Максвелла}$$

$$W_{\text{кин}} = \frac{\lambda^2}{8\pi} (\text{rot } \vec{H})^2, \text{ где } \lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \text{ задаёт некоторый масштаб длины.}$$

Тогда свободная энергия сверхпроводника в магнитном поле с учётом кинетической энергии сверхпроводящего тока есть  $F_s = F_{s0} + \frac{1}{8\pi} \int (\vec{H}^2 + \lambda^2 (\text{rot } \vec{H})^2) dV$ . Интегрирование идёт по всему объёму сверхпроводника, первое слагаемое под интегралом описывает проигрыш в энергии намагничивания (идеальный диамагнетизм сверхпроводника), а второе — проигрыш в кинетической энергии, связанный с движением сверхпроводящих электронов для создания экранирующего тока.

<sup>4</sup> В вакууме индукция и напряжённость магнитного поля совпадают, в среде магнитная индукция имеет смысл средней напряжённости микроскопического поля  $\vec{H}$  [4]

Для нахождения распределения магнитного поля в сверхпроводнике  $\vec{H}(\vec{r})$  воспользуемся тем, что это распределение поля должно минимизировать свободную энергию. Получается вариативная задача. При изменении распределения поля на  $\delta\vec{H}(\vec{r})$  изменение свободной энергии (в первом порядке по  $\delta\vec{H}$ )  $\delta F_s = \frac{1}{8\pi} \int (2\vec{H} \delta\vec{H} + 2\lambda^2 \text{rot} \vec{H} \text{rot} \delta\vec{H}) dV$ . При этом вне сверхпроводящего цилиндра напряжённость магнитного поля равна внешнему полю, это задаёт граничное условие для распределения  $H(r)$  и одновременно требует, чтобы на границе сверхпроводника  $\delta\vec{H}=0$ .

Пользуясь тождеством<sup>5</sup>  $\vec{a} \text{rot} \vec{b} = \vec{b} \text{rot} \vec{a} - \text{div}[\vec{a} \times \vec{b}]$ , преобразуем  $\text{rot} \vec{H} \text{rot} \delta\vec{H} = \delta\vec{H} \text{rot} \text{rot} \vec{H} - \text{div}[\text{rot} \vec{H} \times \delta\vec{H}]$ . При интегрировании по объёму сверхпроводника слагаемое с дивергенцией зануляется: оно сводится к потоку вектора  $[\text{rot} \vec{H} \times \delta\vec{H}]$  через поверхность сверхпроводника, а на поверхности в силу зафиксированного граничного условия  $\delta\vec{H}=0$ . Остаётся вариационное условие минимума  $0 = \delta F_s = \frac{1}{4\pi} \int (\vec{H} + \lambda^2 \text{rot} \text{rot} \vec{H}) \delta\vec{H} dV$ . В силу произвольности вариации поля  $\delta\vec{H}$ , это приводит к уравнению:

$$\vec{H} + \lambda^2 \text{rot} \text{rot} \vec{H} = 0.$$

Это уравнение называют вторым уравнением Лондонов (иногда просто уравнением Лондонов). Вспоминая, что  $\vec{j}_s = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \vec{H}$ , а  $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$ , можно получить другую форму записи этого уравнения:

$$\text{rot} \vec{A} + \frac{4\pi\lambda^2}{c} \text{rot} \vec{j}_s = 0.$$

Градиентная инвариантность позволяет добавить к вектор-потенциалу любой градиент скалярного поля. Удобно выбрать специальную (лондоновскую) калибровку  $\text{div} \vec{A} = 0$  и наложить граничное условие на границе сверхпроводника  $(\vec{A} \cdot \vec{n}) = 0$ , эти условия совпадают с условием непрерывности тока и условием отсутствия тока через границу. В такой калибровке  $\vec{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \vec{A}$ . Калибровка  $\text{div} \vec{A} = 0$  соответствует условию ненакопления носителей заряда  $\text{div} \vec{j}_s = 0$ .

Подставляя сюда  $\vec{j}_s = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \text{rot} \vec{A}$ , получаем уравнение на вектор-потенциал в лондоновской калибровке  $\vec{A} + \lambda^2 \text{rot} \text{rot} \vec{A} = 0$

## Альтернативный способ вывода уравнения Лондонов.

Отметим альтернативный способ вывода уравнений Лондонов [5]. Импульс электрона в присутствии магнитного поля равен  $\vec{p} = m\vec{v} - \frac{e}{c} \vec{A}$  (считаем константу элементарного заряда  $e > 0$ , что приводит к знаку «минус» в этом уравнении). Полагая, что

<sup>5</sup> Проверяется прямой подстановкой, удобно сгруппировать слагаемые с одинаковыми производными. Из  $\text{div}[\vec{a} \times \vec{b}]$  с производной  $\frac{\partial}{\partial x}$  войдёт  $\frac{\partial}{\partial x}(a_y b_z - a_z b_y)$ , из  $\vec{a} \text{rot} \vec{b}$  с такой производной войдёт  $-a_y \frac{\partial b_z}{\partial x} + a_z \frac{\partial b_y}{\partial x}$ , из  $\vec{b} \text{rot} \vec{a}$  аналогично  $-b_y \frac{\partial a_z}{\partial x} + b_z \frac{\partial a_y}{\partial x}$ . Дальше перегруппировкой получаем доказываемое тождество.

сверхпроводящее состояние есть основное состояние электронов в сверхпроводнике (в соответствии с экспериментом оно сохраняется до самых низких температур), и полагая, что в силу изотропии пространства в основном состоянии среднего импульса нет  $\langle \vec{p} \rangle = 0$ , получаем локальную связь средней скорости сверхпроводящих электронов с вектор-потенциалом  $\langle \vec{v}_s \rangle = \frac{e}{mc} \vec{A}$ . Откуда для сверхпроводящего тока сразу следует полученное ранее уравнение  $\vec{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \vec{A}$ .

## Проникновение магнитного поля в сверхпроводник.

В простейшем случае сверхпроводника, заполняющего полупространство<sup>6</sup>  $x > 0$  во внешнем поле параллельном границе ( $\vec{H} \parallel z$ ) у магнитного поля в сверхпроводнике есть только z-компонента, и она зависит только от координаты  $x$ . Тогда  $\text{rot } \vec{H} = -\vec{e}_y \frac{\partial H_z}{\partial x}$  и  $\text{rot rot } \vec{H} = -\vec{e}_z \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}$ . Получим для поля в сверхпроводнике уравнение  $H_z - \lambda^2 \frac{d^2 H_z}{dx^2} = 0$ , описывающее экспоненциальное затухание поля вглубь сверхпроводника  $H_z(x) = H_z(0) e^{-x/\lambda}$ . Растущее решение отбрасываем, как не соответствующее наблюдаемому эффекту Мейснера.

Введённый нами параметр  $\lambda$  называется глубиной проникновения. Как видно, сверхпроводящий ток  $\vec{j}_s = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \vec{H}$  также течёт в поверхностном слое толщиной порядка  $\lambda$  (в котором неоднородно поле). В простом случае заполняющего полупространство сверхпроводника для тока получаем единственную компоненту сверхпроводящего тока вдоль поверхности раздела  $j_y(x) = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{c H_z(0)}{4\pi\lambda} e^{-x/\lambda}$  (рисунок 1).

<sup>6</sup> Другой удобный случай цилиндрической геометрии с полем вдоль оси цилиндра оказывается сложнее. В силу аксиальной симметрии поле зависит только от радиуса. Тогда по известным формулам дифференциальной геометрии  $\text{rot } \vec{H} = -\vec{e}_\phi \frac{\partial H_z}{\partial \rho}$  и  $\text{rot rot } \vec{H} = -\vec{e}_z \left( \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right)$ , откуда для распределения поля получаем уравнение  $\frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \frac{1}{\lambda^2} H_z = 0$ , аналитически разрешимое в бесселевых функциях. Общее решение этого уравнения [6]  $H_z = C_1 J_0(i\rho/\lambda) + C_2 Y_0(-i\rho/\lambda)$ , где  $J_0$  и  $Y_0$  — функции Бесселя первого и второго сорта, соответственно.



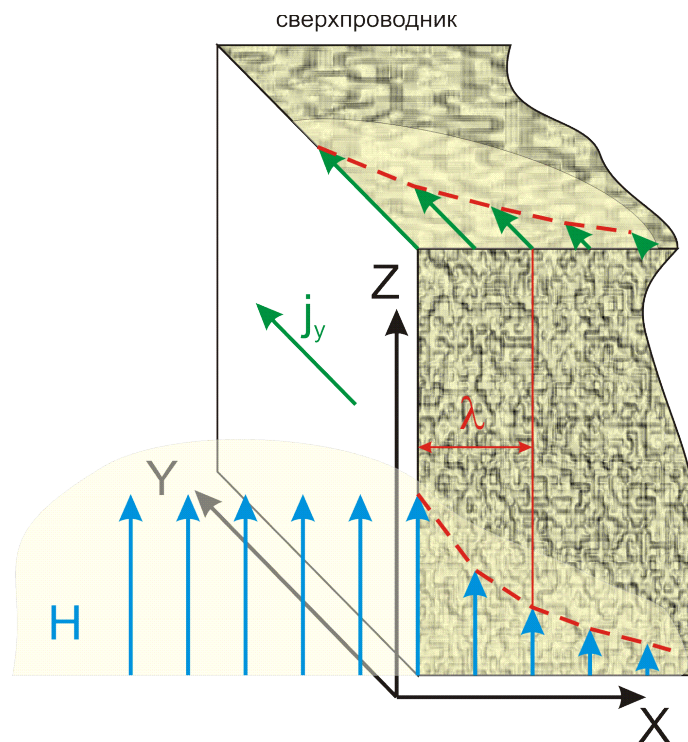


Рисунок 1: Проникновение магнитного поля в сверхпроводник I рода в модели Лондонов.

Для оценки величины параметра  $\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}$  воспользуемся тем, что при  $T=0$  все электроны участвуют только в сверхпроводящем движении. Оценивая  $n_s \approx 10^{22} \text{1/см}^3$ , получим  $\lambda(T=0) \sim 600 \text{ \AA}$ . В точке перехода в сверхпроводящее состояние глубина проникновения становится бесконечно большой ( $n_s$  обращается в ноль). Измеренная в реальных чистых сверхпроводниках глубина проникновения составляет от нескольких сотен до тысячи ангстрем.

Как уже отмечалось, лежащее в основе уравнений Лондонов предположение о локальности может не выполняться, если носителем заряда будет связанная пара электронов с достаточно большим расстоянием между электронами. Однако вблизи перехода глубина проникновения становится большой и предположение о локальности оказывается выполненным. Таким образом, модель Лондонов оправдана для всех сверхпроводников вблизи температуры перехода (иногда говорят, что вблизи  $T_c$  все сверхпроводники являются лондоновскими).

### Высокочастотные свойства сверхпроводника<sup>†</sup>.

Двухжидкостная модель сверхпроводника находит наглядное подтверждение в высокочастотных свойствах сверхпроводника. Первое уравнение Лондонов требует, чтобы статическое электрическое поле имело нулевую напряжённость. Однако, если создать в сверхпроводнике переменное<sup>7</sup> электрическое поле, то это ограничение пропадает. Тогда и сверхтекучий ток начинает зависеть от времени, и под действием электрического поля возникает обычное «нормальное» диссипативное движение нормальных электронов. То есть в сверхпроводнике возникнет диссипация энергии.

Качественно это может быть представлено как параллельное включение сверхпроводящего и

<sup>7</sup> Забегая вперёд, подчеркнём, что речь идёт о переменном поле на частоте меньшей щели в спектре возбуждений сверхпроводника.

нормального каналов. Импеданс нормального канала определяется в модели Друде-Лоренца  $\sigma_n = \frac{n_n e^2 \tau}{m}$ , сопротивление  $R = \frac{1}{\sigma_n} \frac{D}{S}$ , где  $D$  - длина образца, а  $S$  - площадь сечения. Импеданс сверхпроводящего канала индуктивный, для оценки можно взять легко оцениваемую кинетическую часть энергии сверхпроводящего движения (её вклад сравним с энергией создаваемого магнитного поля)  $W_{кин} = n_s \frac{m v_s^2}{2} = \frac{m}{2 e^2 n_s} j_s^2$ , откуда эффективная индуктивность<sup>8</sup>  $L_{эфф} \sim \frac{m}{e^2 n_s} \frac{D}{S}$ . Соответственно, отношение амплитуд токов в резистивном и индуктивном каналах  $\frac{J_n}{J_s} \approx \frac{|Z_s|}{R_n} \sim \frac{\omega L_{эфф}}{R} \approx \frac{n_n}{n_s} \omega \tau$ .

Потери будут пропорциональны квадрату частоты и зависеть от отношения концентраций нормальной и сверхпроводящих компонент. Прямым измерением высокочастотных потерь в сверхпроводнике является измерение добротности сверхпроводящего резонатора (рисунок 2). Видно, что добротность остаётся конечной даже в сверхпроводящей фазе и растёт с понижением температуры (уменьшением доли нормальных электронов). Выход на постоянную величину при совсем низких температурах вероятно связан с потерями через отверстия связи резонатора с внешней измерительной линией.

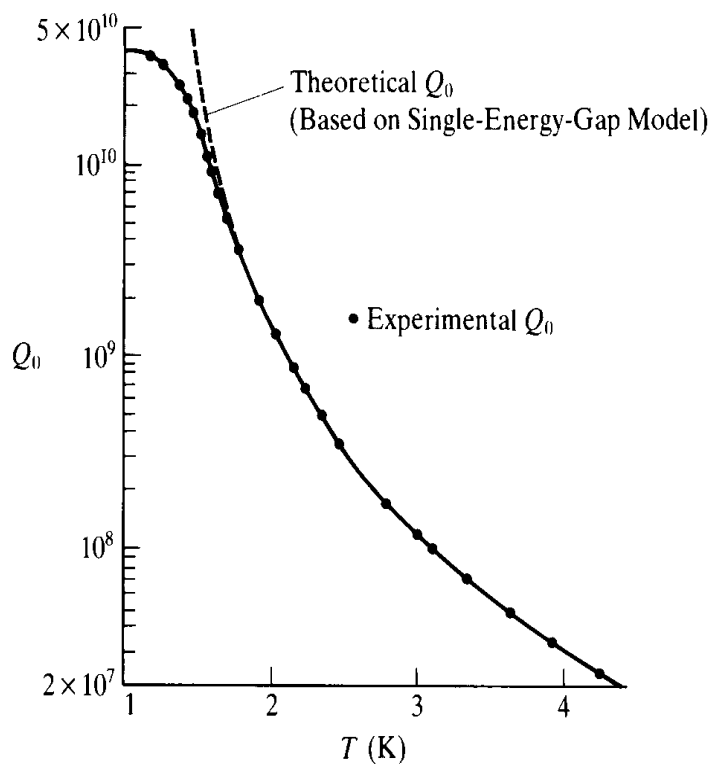


Рисунок 2 Зависимость добротности ниобиевого резонатора на частоте 11.2 ГГц от температуры. Температура сверхпроводящего перехода в ниобии 9.3К. Из книги [5].

<sup>8</sup> Интегрируем плотность кинетической энергии по объёму, считаем для оценки ток равномерно распределённым по образцу. Тогда  $j_s = \frac{J_s}{S}$  и  $E_{кин} = \int W_{кин} dV = \frac{m}{2 e^2 n_s} \frac{J_s^2}{S^2} SD = L_{эфф} \frac{I^2}{2}$

Более строгое вычисление свойств сверхпроводника в переменном поле предполагает одновременное решение первого уравнения Лондонов:

$$\frac{d\vec{j}_s}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E} = \frac{1}{\lambda} \vec{E} ,$$

и уравнения динамики для нормальных электронов в модели Друде-Лоренца:

$$\frac{m}{n_n e} \frac{d\vec{j}_n}{dt} = e \vec{E} - \frac{m}{n_n e} \frac{\vec{j}_n}{\tau}$$

$$\vec{E} = \frac{n_s}{n_n} \lambda \frac{d\vec{j}_n}{dt} + \frac{n_s}{n_n} \lambda \frac{\vec{j}_n}{\tau}$$

Считая, что напряжённость электрического поля и токи меняются по гармоническому закону  $\vec{E} = \vec{E}^{(0)} e^{i\omega t}$  и  $\vec{j}_{n,s} = \vec{j}_{n,s}^{(0)} e^{i\omega t}$ , получаем для амплитуд:

$$\vec{j}_s^{(0)} = -i \frac{1}{\lambda \omega} \vec{E}^{(0)}$$

$$\vec{j}_n^{(0)} = \frac{n_n \tau}{n_s \lambda} \frac{1 - i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \vec{E}^{(0)}$$

Полная плотность тока  $\vec{j} = \vec{j}_n + \vec{j}_s$ , что позволяет определить комплексную проводимость

$\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ , где действительная часть проводимости  $\sigma_1 = \frac{n_n \tau}{n_s \lambda} \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2}$  определяет потери и при  $\omega\tau \gg 1$  совпадает по зависимости от частоты с ранее сделанной грубой оценкой, а комплексная часть  $\sigma_2 = \frac{1}{\lambda \omega} \left[ 1 + \frac{n_n}{n_s} \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \right]$  определяет сдвиг фазы между током и полем в сверхпроводнике.

Более подробные вычисления глубины проникновения и поверхностного импеданса, важные для количественной интерпретации данных, представленных на рисунке 2 можно найти в литературе, например в [1].

## Квантовое обобщение уравнения Лондонов.

### «Конденсат» сверхпроводящих электронов.

Сверхтекучий ток может существовать и при  $T=0$ . Причём существование незатухающего экранирующего тока является свойством основного состояния сверхпроводника, помещённого во внешнее магнитное поле. Наконец, при  $T=0$  макроскопически большое количество электронов участвует в этом движении.

Эти свойства похожи на свойства сверхтекучей компоненты гелия-4. Микроскопическое рассмотрение сверхтекучести показывает, что при низких температурах формируется бозе-конденсат с макроскопическим числом атомов в состоянии с нулевой энергией, причём все частицы этого конденсата описываются одной волновой функцией. Таким образом, в сверхтекучей жидкости возникает новая характеристика — волновая функция конденсата  $\Psi(\vec{r}) = A e^{i\theta(\vec{r})}$ , наличие которой позволяет говорить о формировании нового фазового состояния квантовой жидкости. Из связи фазы волновой функции со скоростью сверхтекучего движения следует возможность вихревых состояний в сверхтекучем гелии-4. С точки зрения термодинамики, волновая функция конденсата является параметром порядка при фазовом переходе. Подчеркнём при этом, что в реальном гелии-4 из-за взаимодействия

атомов даже при  $T=0$  в состоянии конденсата оказывается около 10% атомов, но при этом в сверхтекучем движении участвуют все атомы (плотность нормальной компоненты обращается в ноль). С другой стороны, так как *все* атомы участвуют в сверхтекучем движении, то и атомы конденсата в нём тоже участвуют. А это позволяет сохранить связь скорости сверхтекучего движения с градиентом фазы конденсата, даже если только малая часть атомов оказывается в состоянии конденсата. Как мы видели, для возникновения сверхтекучести необходимо выполнение критерия Ландау для элементарных возбуждений: в этом смысле в микроскопической теории важно, что одновременно с образованием конденсата происходит перестройка спектра возбуждений квантовой жидкости к виду, допускающему ненулевую критическую скорость Ландау.

Оставляя пока ненадолго за рамками нашего рассмотрения вопрос о том, как может формироваться подобный конденсат в системе ферми-частиц, предположим, что формирование такого конденсата имеет место. Тогда при  $T=0$  сверхпроводящее движение носителей заряда в конденсате может быть описано волновой функцией  $\Psi(\vec{r})=A\sqrt{n_s}e^{i\Theta(\vec{r})}$ , где множитель  $A\sim 1$  связан с неизвестной нам пока микроскопической природой конденсата. По аналогии со сверхтекучестью, так как мы знаем, что при  $T=0$  все электроны участвуют только в сверхпроводящем движении, мы можем считать, что все электроны движутся со скоростью частиц конденсата.

Импульс носителя заряда равен тогда  $\hbar\vec{\nabla}\Theta$ , а с другой стороны импульс частицы конденсата массой  $\mu$  с зарядом  $(-q)$  (константа  $q>0$ ) в магнитном поле равен

$\vec{p}=\mu\vec{v}-\frac{q}{c}\vec{A}$ . Сопоставляя эти результаты, получаем для плотности сверхпроводящего

тока  $\vec{j}_s=-nq\vec{v}_s=-\frac{nq}{\mu}\left(\hbar\vec{\nabla}\Theta+\frac{q}{c}\vec{A}\right)=-\frac{c}{4\pi\lambda^2}\left(\vec{A}+\frac{\Phi_0}{2\pi}\vec{\nabla}\Theta\right)$ , где множитель перед скобкой выписан в виде, аналогичном уравнению Лондонов, а имеющая размерность магнитного потока константа  $\Phi_0=\frac{2\pi\hbar c}{q}=\frac{hc}{q}$ .<sup>9</sup> Эта константа задаёт некоторый масштаб магнитного потока в сверхпроводнике, численно (для заряда электрона) в СГС  $\Phi_0=4.14\cdot 10^{-7} Гс\cdot см^2$ .

Пользуясь уравнением Максвелла  $rot\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}$ , можно записать

$$\lambda^2 rot rot \vec{A} + \vec{A} = -\frac{\Phi_0}{2\pi} \vec{\nabla} \Theta.$$

Это уравнение и есть квантовое обобщение уравнения Лондонов. Для однородной фазы сверхпроводящего «конденсата»  $\vec{\nabla}\Theta=0$  оно совпадает с ранее полученным.

### Квантование магнитного потока.

Пусть в массивном сверхпроводнике имеется цилиндрическая полость. Пусть при  $T>T_c$  этот сверхпроводник помещён в магнитное поле, параллельное оси цилиндра. При переходе в сверхпроводящее состояние магнитное поле из объёма сверхпроводника будет вытеснено текущим по поверхности сверхпроводящим током, при этом в полости возникнет некоторый магнитный поток. Найдём его.

<sup>9</sup> Отметим, что выражение для кванта потока зависит от системы единиц, в СГС  $\Phi_0=\frac{hc}{q}$ , а в СИ

$$\Phi_0=\frac{h}{q}.$$

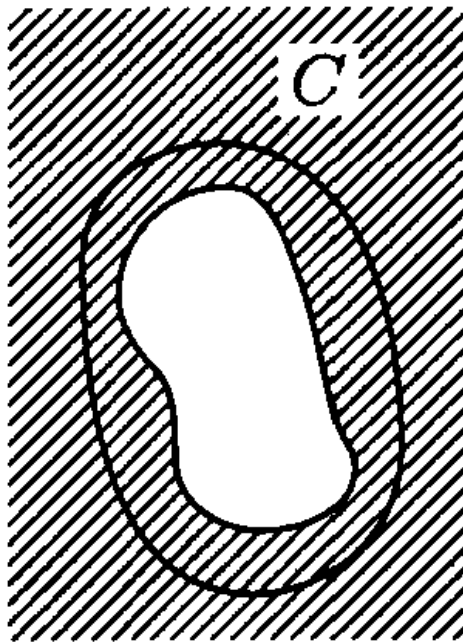


Рисунок 3: Цилиндрическая полость в массивном сверхпроводнике и контур обхода этой полости вдали от грани. Из книги [1].

Возьмём контур, лежащий в глубине сверхпроводника на расстоянии  $\gg \lambda$  от границ полости. В любой точке этого контура сверхпроводящий ток равен нулю. Однако теперь, при учёте фазы «конденсата», равенство нулю сверхпроводящего тока не означает равенство нулю вектор-потенциала:  $\vec{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \left( \vec{A} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \vec{\nabla} \Theta \right)$ . Интегрируя это равенство по выбранному контуру, получим:

$$\oint \vec{A} d\vec{l} = -\frac{\Phi_0}{2\pi} \oint \vec{\nabla} \Theta d\vec{l} .$$

В левой части имеем магнитный поток через контур<sup>10</sup>, в правой части интеграл есть набег фазы при обходе контура, который кратен  $2\pi$ . Таким образом, полный магнитный поток «захваченный» в массивном сверхпроводящем контуре  $\Phi = N \cdot \Phi_0$ , где  $N$  – целое, а

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{q} .$$

Полученное условие и есть условие квантования магнитного потока в массивном сверхпроводящем контуре: захваченный таким контуром магнитный поток обязан быть кратен кванту потока. Единственное существенное условие, использованное для вывода этого утверждения — чтобы толщина сверхпроводника была много больше глубины проникновения. Величину  $\Phi_0$  называют квантом потока.

### Экспериментальное определение кванта потока.

Квант потока  $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{q}$  получается в рамках лондоновского подхода, в рамках этого подхода мы должны подставить сюда заряд электрона. Получится величина  $\frac{2\pi\hbar c}{e} = \frac{hc}{e} = 4.14 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$ .

<sup>10</sup> Циркуляция по контуру равна потоку ротора через ограничиваемую площадь.

Измерение кванта потока в сверхпроводнике было впервые выполнено в начале 1960-х годов [7] [8]. Приведём здесь краткое описание красивого эксперимента Долла и Небауэра [8].

Образец в форме цилиндра приготавливался напылением свинца на кварцевый стержень и подвешивался на упругой нити (рисунок 4). Образец переводился в сверхпроводящее состояние в поле  $H_y$ , параллельном оси цилиндра, после чего поле выключалось. Сверхпроводящий ток, возникающий в момент выключения тока, создаёт магнитный поток через цилиндр и обладает некоторым магнитным моментом. Этот магнитный момент измерялся по отклику на приложенное в поперечном направлении поле  $H_x$ , для повышения чувствительности измерения производились по резонансной схеме на частоте собственных колебаний образца на упругом подвесе. Амплитуда установившихся колебаний пропорциональна произведению магнитного момента образца на вынуждающее поле, она измерялась по смещению «зайчика» от закреплённого на подвесе зеркала.

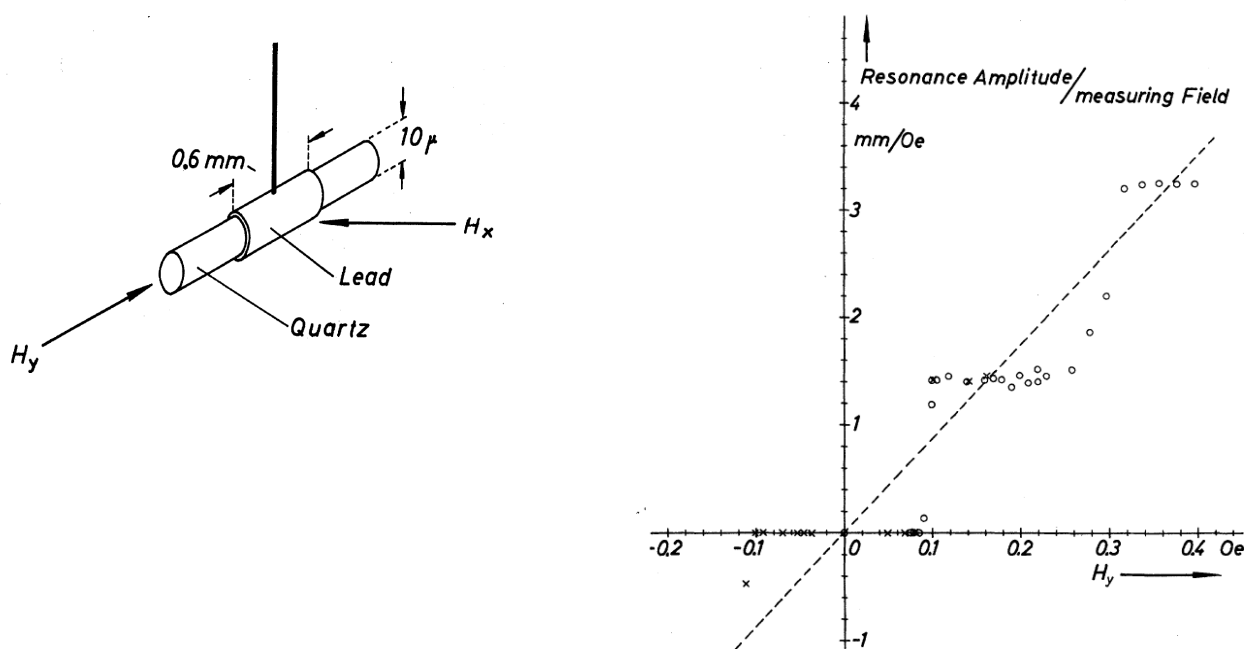


Рисунок 4 Эксперимент Долла и Небауэра по измерению квантования потока в сверхпроводящем кольце. Слева: схема образца и прикладываемых полей. Справа: зависимость нормированного отклика на вынуждающее поле от поля, создающего исходный магнитный поток. Из статьи [8].

Результат эксперимента показал, что действительно магнитный момент образца принимает дискретные значения (рисунок 4). Однако определённая из эксперимента величина кванта потока оказалась почти вдвое меньше сделанной выше оценки: мы видим из рисунка 4, что для перехода на новую амплитуду колебаний торсионного маятника (то есть, на новое значение захваченного потока) магнитное поле должно измениться на примерно  $0.2\mathcal{E}$ , изменение потока через кольцо при этом  $\Delta\Phi = \frac{\pi d^2}{4} \Delta B = 1.6 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$ . С повышением точности подобных экспериментов было установлено, что квант потока в сверхпроводнике равен  $\Phi_0 = \frac{\pi \hbar c}{e} = 2.07 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$ , то есть соответствует заряду носителя заряда вдвое отличающемуся от заряда электрона.

Наблюдение квантования потока поддерживает сделанное нами предположение о формировании конденсата электронов. Величина кванта потока указывает на то, что носителями сверхпроводящего тока являются пары электронов. Однако объяснение

причины формирования такого конденсата требует построения более серьёзной микроскопической теории.

## Основы микроскопии сверхпроводников.

### Основные экспериментальные факты.

Отметим основные экспериментальные факты, лежащие в основе микроскопической модели.

Во-первых, это уже отмеченное значение кванта потока в сверхпроводнике, указывающее на то, что носитель сверхпроводящего тока имеет заряд  $2e$ .

Вторым важным наблюдением является изотоп-эффект: зависимость температуры сверхпроводящего перехода от изотопного состава образца (рисунок 5). Оказалось, что температура перехода в одном и том же соединении с разным изотопным составом с экспериментальной точностью обратно пропорциональна корню из средней массы атомов кристаллической решётки  $T_c \propto \frac{1}{\sqrt{M}}$ . Это указывает на то, что формирование сверхпроводящего состояния существенным образом связано с кристаллической решёткой — это не «чисто электронное» свойство.

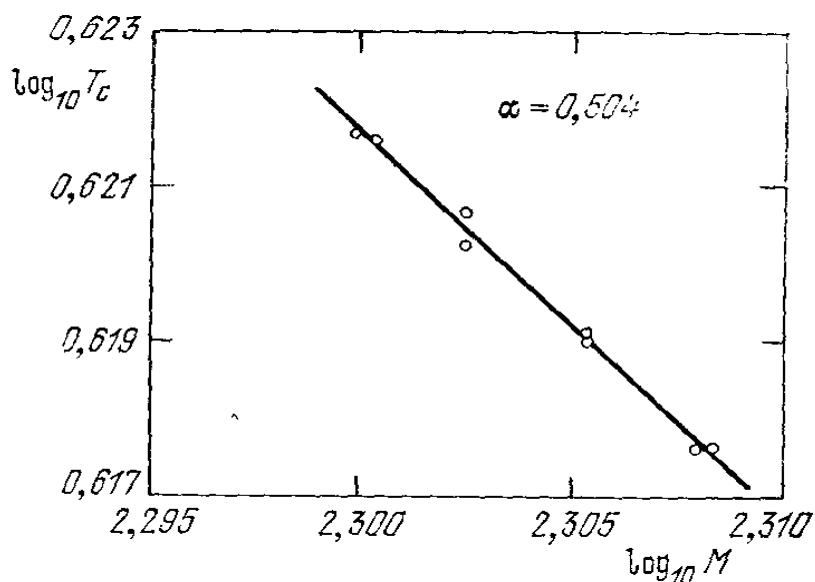


Рисунок 5: Зависимость температуры сверхпроводящего перехода в ртути от усреднённого массового числа изотопов в образце. Из книги [2].

Наконец, измерения теплоёмкости (см., например, данные в книгах [2] и [9]) и непосредственные спектроскопические измерения [2] показывают, что в спектре элементарных возбуждений сверхпроводника есть щель. Измерения теплоёмкости (рисунок б) показывают, что электронный вклад<sup>11</sup> в теплоёмкость в сверхпроводящем состоянии

<sup>11</sup> В теплоёмкость реального образца дают независимый вклад и колебания решётки и для определения электронного вклада в теплоёмкость нужно вычесть из полной теплоёмкости фононную её часть. Фононный вклад может быть определён, например в рамках модели Дебая (напомним, что речь идёт о низких температурах, при которых наблюдается обычная сверхпроводимость) или, например, экспериментально по наклону графика  $\frac{C}{T}$  как функции  $T^2$  в нормальной фазе металла. Это стандартная процедура при анализе теплоёмкости, однако нужно иметь в виду, что определение вклада различных степеней свободы

обращается в ноль гораздо быстрее, чем в нормальном: закон спадения теплоёмкости с охлаждением оказывается термоактивационным  $C \propto e^{-\Delta/T}$  с щелью, близкой по порядку величины к температуре перехода. Причём этот закон оказывается достаточно универсальным: после перенормировки на температуру перехода данные по теплоёмкости для различных сверхпроводников ложатся на одну функциональную зависимость и щель в спектре возбуждений  $\Delta \approx 1.5 T_c$ .

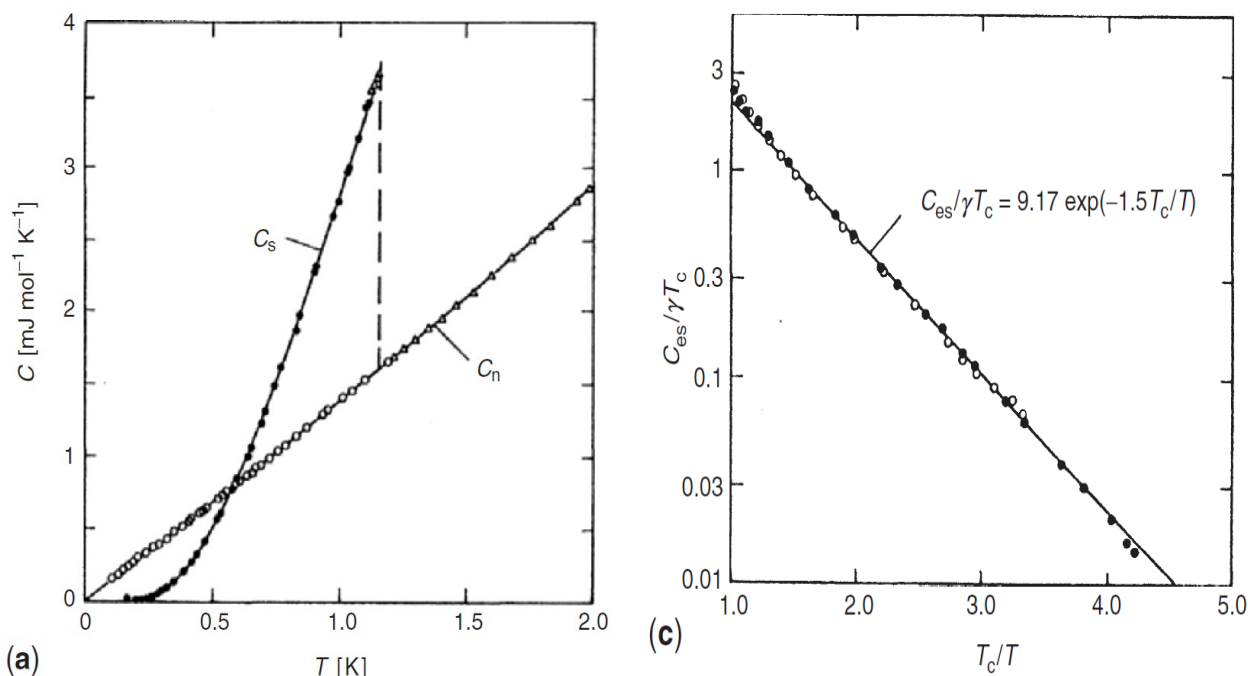


Рисунок 6 Слева: электронный вклад в теплоёмкость алюминия в нормальном (открытые символы) и сверхпроводящем (закрашенные) состоянии. Измерения в нормальном состоянии производились в поле выше критического. Справа: электронный вклад в теплоёмкость ванадия (закрашенные символы) и олова (открытые символы) как функция нормированной температуры. Для ванадия  $T_c=5.30\text{ K}$ , для свинца  $T_c=7.19\text{ K}$ . Свинец является сверхпроводником первого рода, а ванадий (который вместе с ниобием является редким исключением для чистых сверхпроводников) — сверхпроводником второго рода. Теплоёмкость нормирована на теплоёмкость нормальной фазы в точке перехода  $\gamma T_c$ . Из книги Побелла [9].

Измерение поверхностного импеданса в сверхпроводниках при падении на сверхпроводник СВЧ излучения (фактически, это измерение сопротивления сверхпроводника на высоких частотах) показало, что на частотах в сотни гигагерц и выше в этих измерениях (рисунок 7) пропадает различие между сверхпроводящим и нормальным состояниями. Обратим внимание, что энергия кванта СВЧ-излучения на частоте около 240 ГГц равна 10К — то есть это также величина порядка температуры перехода в сверхпроводящее состояние в чистых сверхпроводниках.

Возникновение потерь в сверхпроводнике на переменном токе может быть объяснено в двухжидкостной модели, однако такое объяснение не сможет предсказать достаточно резкий, практически пороговый, характер возникновения в сверхпроводнике таких же потерь, что и в нормальном металле. Приводившиеся ранее (рисунок 2) экспериментальные данные по

требует аккуратности, так как от корректности этой процедуры зависит достоверность конечного результата.



потерям (по измерению добротности) в сверхпроводящем СВЧ-резонаторе, которые хорошо объяснялись двухжидкостной моделью, были получены на частоте более чем на порядок меньшей этого порога поглощения. Однако такая пороговая картина логично вписывается в картину существования щели в спектре возбуждений — физика этого порога поглощения оказывается такой же, как физика возникновения поглощения света в полупроводнике при превышении энергией фотона ширины запрещённой зоны. Характерная величина этой щели соответствует (в единицах температуры) нескольким Кельвин, то есть, как и в анализе данных теплоёмкости, оказывается величиной порядка критической температуры. Точные измерения показывают, что измеряемая пороговая частота поглощения в энергетических единицах оказывается вдвое больше щели, как мы увидим далее это отличие связано с тем, что носителем заряда является связанная пара электронов. Спектроскопические измерения позволяют определить зависимость щели от температуры (рисунок 8). Оказывается, что щель в спектре зануляется в точке перехода — то есть является неотъемлемым свойством сверхпроводящего состояния, и зависимость щели от температуры для многих сверхпроводников следует какому-то универсальному закону.

Обратите внимание, что щель в спектре электронных возбуждений имеет масштаб нескольких Кельвин, максимум нескольких десятков Кельвин, в то время как другой энергетический масштаб электронной системы — энергия Ферми — измеряется электронвольтами, является величиной на 3-4 порядка большей.

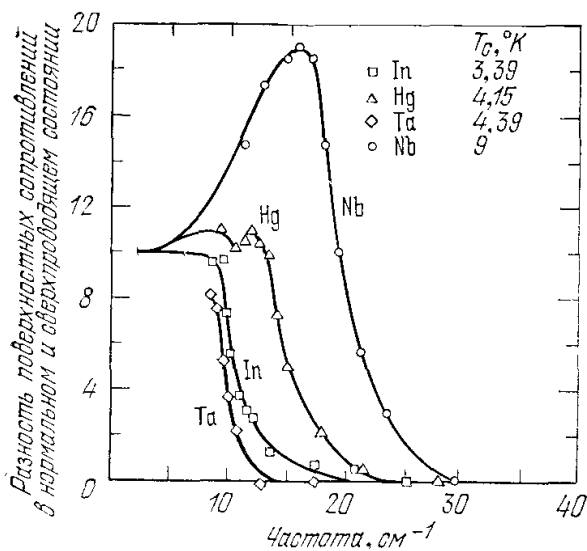


Рисунок 7 Разности поверхностных сопротивлений сверхпроводящей и нормальной фаз в СВЧ диапазоне. Частота  $10\text{ см}^{-1}$  соответствует  $300\text{ ГГц}$ . Из книги [2].

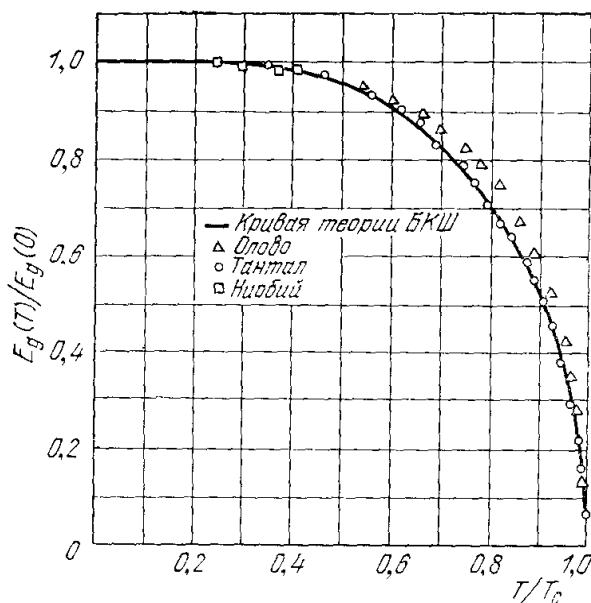


Рисунок 8 Зависимость щели в спектре сверхпроводника от температуры. Из книги [2].

## Спектр электронных возбуждений в сверхпроводнике. Роль щели в спектре возбуждений сверхпроводника.

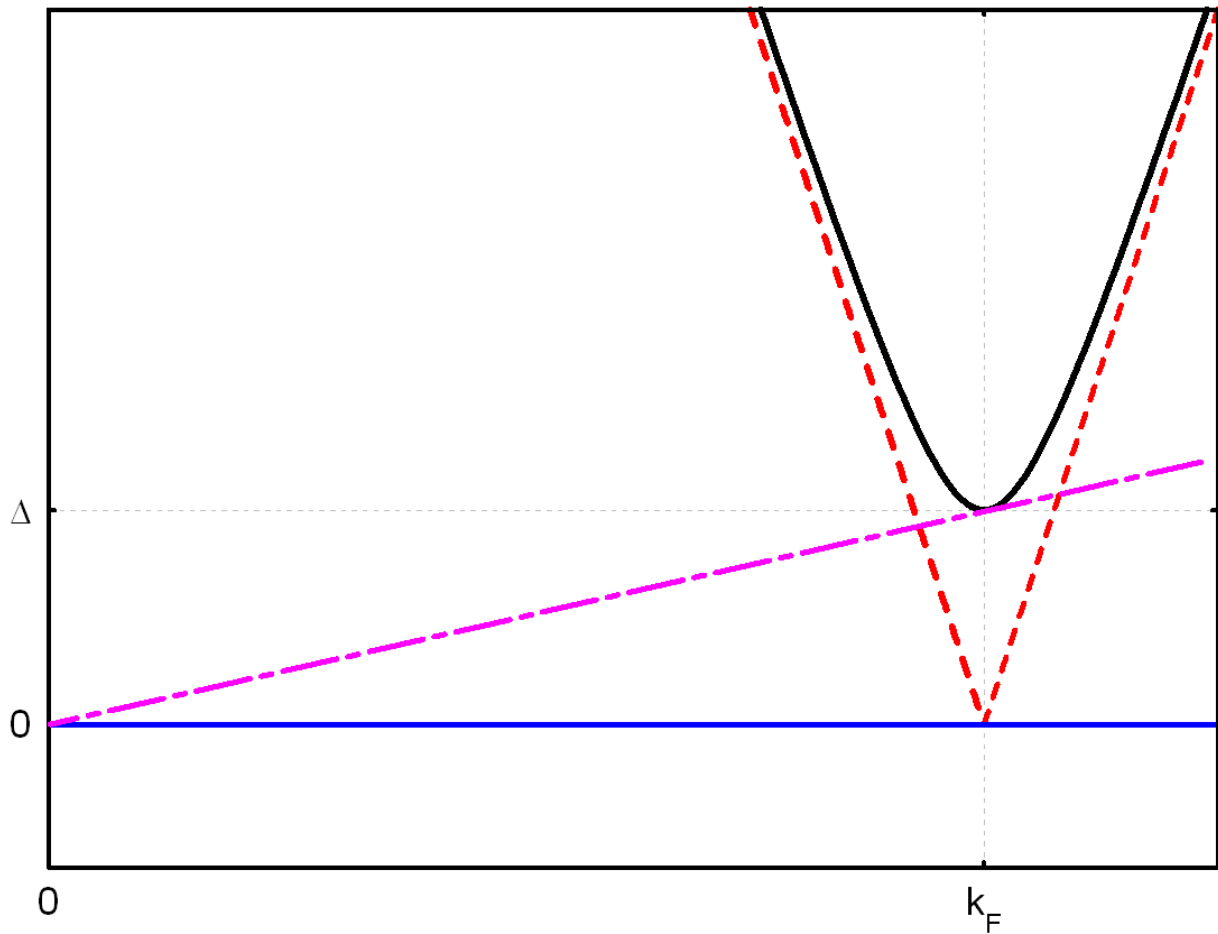


Рисунок 9: Спектр возбуждений в нормальном металле (пунктир) и сверхпроводнике (сплошная линия). Штрих-пунктирная линия показывает построение критической скорости Ландау. Нулевой уровень соответствует энергии основного состояния.

Рассмотрим сначала связь щели в спектре со сверхпроводящими свойствами на феноменологическом уровне, не рассматривая происхождение щели.

Напомним построение спектра возбуждений в металле. Для простоты считаем электроны почти свободными, и считаем, что ферми-поверхность лежит внутри первой зоны Бриллюэна и проходит достаточно далеко от её границ. Возбуждения в металле затрагивают только электроны с энергией вблизи от фермиевской. Эти возбуждения можно описывать либо на языке перехода «реального» электрона из состояния из-под поверхности Ферми в состояние над поверхностью Ферми, либо на языке рождения пары частица-античастица. При этом для малых отклонений от поверхности Ферми можно считать спектр этих частиц и античастиц линейным и обращаемым в ноль при  $k = k_F$  :  $\varepsilon = \hbar v_F |k - k_F|$  .

Эксперимент указывает на появление щели в спектре возбуждений сверхпроводящего состояния. Причём, так как щель непрерывно возникает при переходе в сверхпроводящее состояние, это означает, что бесщелевой спектр электронных возбуждений нормального металла должен плавно преобразоваться в щелевой спектр возбуждений в сверхпроводнике. Так как масштаб энергии щели много меньше энергии Ферми, это означает, что щель в спектре должна возникать на фермиевском волновом векторе (возможные смещения будут

давать эффекты следующего порядка малости). Это позволяет феноменологически нарисовать вид спектра возбуждений с квадратичным минимумом на фермиевском волновом векторе (рисунок 9). Для описания низкотемпературных свойств поведение спектра вдали от минимума не существенно. С учётом требования непрерывности перехода спектра квазичастиц сверхпроводника в спектр квазичастиц нормального металла, можно «угадать» вид этого спектра:  $\varepsilon(k) = \sqrt{\Delta^2 + \hbar^2 v_F^2 (k - k_F)^2}$ .

Отметим важные следствия из появления щели.

Во-первых, как это уже было для полупроводников и для ротонов в гелии-4, наличие такого минимума автоматически приводит к появлению экстремума в плотности состояний

$$D(\varepsilon)|_{k > k_F} = \frac{dN}{d\varepsilon} = \frac{dN}{d|k|} \frac{1}{d\varepsilon/d|k|} = \frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 2\sqrt{\Delta^2 + \hbar^2 v_F^2 (k - k_F)^2} \frac{1}{\hbar^2 v_F^2 2(k - k_F)} \approx$$

$$\approx \frac{V k_F^2}{\pi^2 \hbar v_F} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} = \frac{V m k_F}{\pi^2 \hbar^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} = N_{k_F}^{(0)} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}}$$

где  $N_{k_F}^{(0)}$  — это плотность состояний нормального состояния (ферми-газа в нашей модели) на поверхности Ферми. Во второй строке мы воспользовались близостью к поверхности Ферми и заменили слабо меняющиеся в окрестности  $k = k_F$  множители их значениями при  $k_F$ . Аналогичный вклад дадут состояния с  $k < k_F$ . Таким образом, в тепловые свойства (теплоёмкость, например) сверхпроводника при низких температурах доминирующий вклад будут давать возбуждения на «дне» спектра. Схематически, сопоставляя спектр с  $k < k_F$  с состояниями типа дырок и пользуясь обычным соглашением, что для дырок энергия отсчитывается в обратном направлении, плотность состояний может быть графически представлена в виде, показанном на рисунке 10.

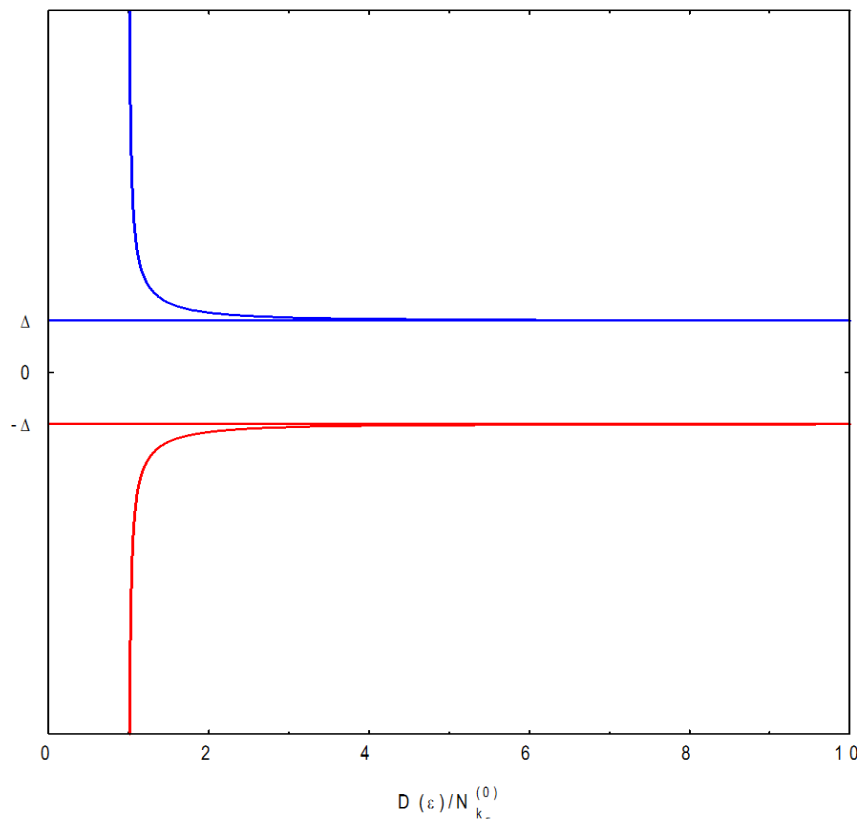


Рисунок 10: Плотность состояний как функция энергии для возбуждений типа частиц (синяя кривая) и типа дырок (красная кривая).

Во-вторых, наличие щели в спектре делает конечной критическую скорость в критерии Ландау  $v_L = \min \frac{\varepsilon(p)}{p} \approx \frac{\Delta}{\hbar k_F}$ . При меньших скоростях дрейфового течения электронов в сверхпроводнике оказывается невозможен их переход в возбуждённое состояние и течение оказывается бездиссипативным. Таким образом, наличие щели в спектре является ключевым свойством для объяснения сверхпроводимости.

### Критический ток сверхпроводника.

Наличие критической скорости приводит к тому, что существует критическая плотность тока

$$j_c = n e v_L \approx \frac{n e \Delta}{\hbar k_F} \simeq \frac{e \Delta}{3 \hbar} n^{2/3} \simeq \frac{e \Delta}{3 \hbar a^2},$$

здесь мы для оценки считаем равными концентрацию носителей сверхтекучего тока и полную концентрацию электронов и заменяем  $\sqrt[3]{3\pi^2}$  на 3 для оценки,  $a$  — постоянная решётки. Ток с плотностью большей критической должен становиться диссипативным — то есть разрушать сверхпроводимость.

С другой стороны, как мы уже знаем, сверхпроводимость разрушается внешним полем. Для объединения этих двух явлений естественно считать, что при критическом токе через сверхпроводник магнитное поле на его поверхности достигает критического значения. Такой процесс разрушения сверхпроводимости критическим током будет лавинообразным: при переходе поверхностного слоя в нормальное состояние сверхтекучий ток, текущий вблизи поверхности сверхпроводника, начнёт течь по «сердцевине» проводника, уменьшение эффективного радиуса сверхпроводника приведёт к тому, что на его поверхности поле станет ещё больше ( $H \propto \frac{1}{r}$ ), что приведёт к потере сверхпроводимости.<sup>12</sup>

Оценим, насколько такой механизм разрушения сверхпроводимости критическим током соответствует наблюдаемым явлениям. Для щели  $\Delta = 10\text{К}$  критическая плотность тока  $j_c \sim 2 \cdot 10^{17} \text{ед.СГС}/\text{см}^2 \sim 10^8 \text{А}/\text{см}^2$ . Сверхпроводящий ток течёт в слое, толщиной равной глубине проникновения  $\lambda \sim 1000 \text{Å} = 10^{-5} \text{см}$ , что делает бессмысленным изготовление проводов большого диаметра из сверхпроводника. Реально используемый для пропускания тока сверхпроводящий кабель состоит из множества тонких сверхпроводящих нитей в, обычно, медной матрице. Такая конструкция позволяет максимально эффективно использовать сечение сверхпроводника, обеспечивает достаточно высокие механические свойства<sup>13</sup> и обеспечивает шунтирование участков сверхпроводника при потере сверхпроводящих свойств (например, при случайном превышении критического поля). Пример конструкции сверхпроводящего кабеля, используемого на Большом адронном коллайдере [11] показан на рисунке 11. Один сверхпроводящий «волосок» такого кабеля имеет диаметр 6 мкм и может пропускать по нашей оценке сверхпроводящий ток до  $J_c \simeq j_c \pi d \lambda \sim 2 \text{А}$ .

12 В окрестности критического тока задача оказывается несколько интереснее. Действительно, если сверхпроводимость полностью разрушится, то нормальный ток, текущий по всему сечению проводника создаёт внутри проводника поле *меньше* критического. Поэтому возникает некоторое равновесное чередование сверхпроводящей и нормальной фаз, промежуточное состояние. Рассмотрение этой задачи выходит за рамки курса. Решение задачи для цилиндрического сверхпроводника есть в книге [10] (§15.4).

13 Например, при использовании в обмотке сверхпроводящего магнита провод обмотки должен выдерживать действующую «на разрыв» силу Ампера. При токе 10А и поле 10Тл эта сила достигает 1 Н на сантиметр провода — эквивалент грузу в 100 граммов, который конечно же не выдержать сверхпроводящему «волоску».

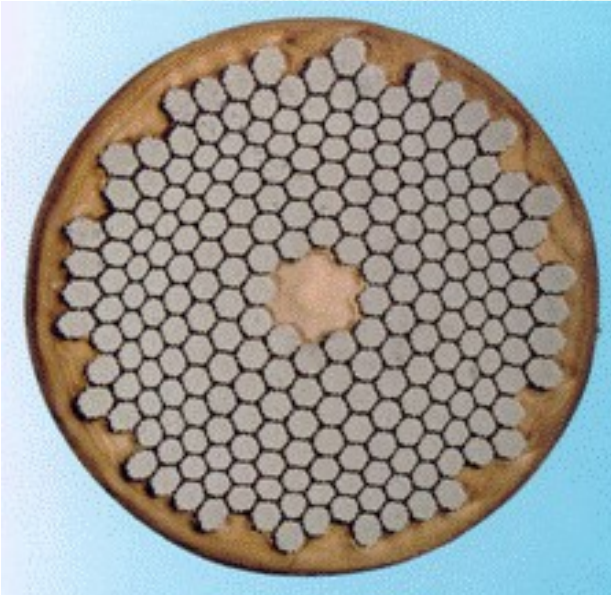
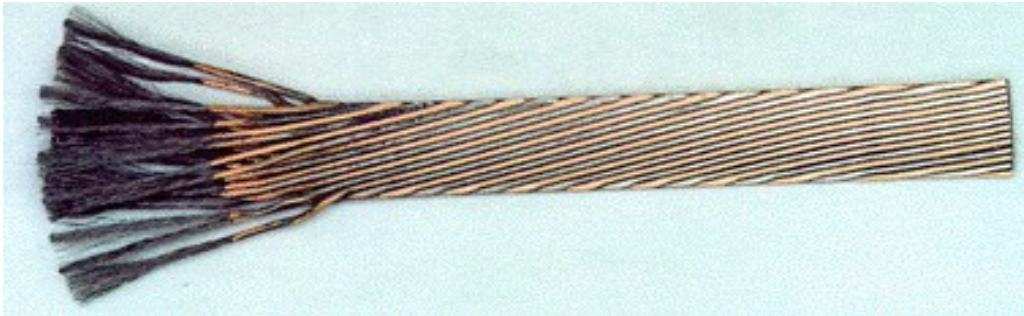


Рисунок 11 Структура сверхпроводящего кабеля, используемого на Большом адронном коллайдере [11]. Сверху: многожильный кабель (36 жил, полный диаметр около 15 мм), снизу: сечение одной жилы (диаметр около 1.5 мм) в разных масштабах. Каждая жила содержит около 6300 «волосков» сверхпроводящего провода (NbTi) толщиной около 6 мкм в матрице из бескислородной меди.

Соответственно, критический ток всего кабеля БАК будет измеряться десятками килоампер. Используемые во многих лабораторных установках (в частности, в сверхпроводящих соленоидах) коммерчески производимые сверхпроводящие кабели содержат обычно несколько десятков сверхпроводящих «волосков» и критические токи измеряются сотнями ампер для кабеля диаметром около миллиметра [12]. Сверхпроводящие провода без медной матрицы также выпускаются коммерчески и используются в различных лабораторных установках.

Наконец, оценим соответствует ли наша оценка критического тока известным значениям критического поля. Для цилиндрического провода на его поверхности по теореме о циркуляции  $2\pi r H = \frac{4\pi}{c} J$ , в критических условиях  $H_c = \frac{2J_c}{cr} = \frac{2j_c \lambda 2\pi r}{rc} = \frac{4\pi}{c} j_c \lambda$ .

Для глубины проникновения  $\lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}} \approx \frac{1}{3.5} \frac{c}{e} \sqrt{m} a^{3/2}$ , откуда  $H_c \approx \frac{\Delta \sqrt{m}}{\hbar \sqrt{a}} \approx 200 \text{ Э}$ . Это значение критического поля действительно достаточно типично для сверхпроводников первого рода.

## Основные результаты модели БКШ.

Последовательный вывод уравнений микроскопической теории сверхпроводимости не входит в рамки нашего курса, его можно найти в литературе (например [1], [5], [13]). Здесь мы ограничимся качественными соображениями и приведём основные результаты этой модели. Микроскопическая теория сверхпроводимости, была разработана Бардиным, Купером и Шриффером в 50-х годах 20 века. За эту теорию, часто называемую по первым буквам фамилий создателей теорией БКШ, авторы получили Нобелевскую премию 1972 года.

### Построение спектра возбуждений сверхпроводника.<sup>†</sup>

Проследим, не вдаваясь в технические детали вычислений, как возникает щелевой спектр возбуждений сверхпроводника в теории. Для этого необходимо учитывать взаимодействие между электронами, что удобно делать в рамках формализма вторичного квантования.

Подход вторичного квантования, который мы уже упоминали при описании квантования колебаний решётки и при рассмотрении электронов в металле, рассматривает описание состояния системы на языке чисел заполнения различных квантовых состояний

$\Psi = |N_1, N_2, \dots, N_k, \dots\rangle$  и вводит операторы уничтожения и рождения частиц, действующие на эти числа заполнения:  $\hat{a}_k |N_1, N_2, \dots, N_k, \dots\rangle = \sqrt{N_k} |N_1, N_2, \dots, N_k - 1, \dots\rangle$  и  $\hat{a}_k^+ |N_1, N_2, \dots, N_k, \dots\rangle = \sqrt{N_k + 1} |N_1, N_2, \dots, N_k + 1, \dots\rangle$ . Числа заполнения могут быть выражены через эти операторы:  $\hat{a}_k \hat{a}_k^+ = N_k + 1$  и  $\hat{a}_k^+ \hat{a}_k = N_k$ . Для системы ферми-частиц числа заполнения могут быть только 0 или 1, что приводит к «антикоммутиационному» соотношению<sup>14</sup>  $\{\hat{a}_k, \hat{a}_k^+\} = \hat{a}_k \hat{a}_k^+ + \hat{a}_k^+ \hat{a}_k = 1$

Гамильтониан системы взаимодействующих электронов может быть представлен в виде

$$\hat{H} = \sum_k E_k^{(0)} \hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \sum_{k_1, k_2, k_1', k_2'} E_{k_1, k_2, k_1', k_2'}^{(2)} \hat{a}_{k_1}^+ \hat{a}_{k_2}^+ \hat{a}_{k_1} \hat{a}_{k_2},$$

здесь  $E_k^{(0)}$  это энергия электрона с импульсом  $k$ ,  $E_{k_1, k_2, k_1', k_2'}^{(2)}$  это матричный элемент оператора взаимодействия, ответственный за процесс в котором из пары электронов в состояниях  $k_1$  и  $k_2$  получают электроны в состояниях  $k_1'$  и  $k_2'$ . Мы для простоты опускаем векторное обозначение у импульса и не учитываем спиновый индекс (у каждого электрона есть две возможные проекции спина).

Переход к некоторым квазичастицам формально эквивалентен некоторому преобразованию операторов рождения и уничтожения исходных («настоящих») частиц. Если в результате такого преобразования удастся получить представление гамильтониана, содержащее только слагаемое типа первого  $\sum_k E_k^{(0)} \hat{a}_k^+ \hat{a}_k$ , это будет означать что система может рассматриваться как идеальный газ квазичастиц, спектр которых (зависимость энергии от импульса) будет описываться законом  $\varepsilon(k) = E_k^{(0)}$ .

Искать такое преобразование в совсем общем виде слишком сложно, поэтому можно сделать несколько упрощающих предположений. Как мы увидим позже, основной вклад дают электроны с противоположными импульсами, поэтому можно считать  $k_2 = -k_1$  и  $k_2' = -k_1'$ . Из-за большого количества электронов акты взаимодействия случаются часто, и тогда можно считать, что процессы уничтожения пары  $(k, -k)$  и рождения пары

<sup>14</sup> Проверяется прямой подстановкой. Под действием этого оператора не меняется волновая функция, значит он эквивалентен некоторому скаляру. Если число заполнения k-ого состояния 0, то 1 даёт первое слагаемое, а второе даёт нулевой вклад, если число заполнения k-ого состояния равно 1, то 1 даёт второе слагаемое, а первое даёт нулевой вклад.

$(k', -k')$  происходят независимо. Дополнительно для упрощения положим, что матричный элемент такого рождения или уничтожения пары не зависит от волнового вектора, так как в силу специфики ферми-системы взаимодействуют только электроны вблизи ферми-поверхности и что матричный элемент взаимодействия вещественен. В этих предположениях получим гамильтониан модели БКШ

$$\hat{H} = \sum_k E_k^{(0)} \hat{a}_k^+ \hat{a}_k + E^{(2)} \sum_k (\hat{a}_k \hat{a}_{-k} + \hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}^+)$$

Этот гамильтониан квадратичен по операторам рождения и уничтожения, но не имеет вида гамильтониана идеального газа частиц. Формально задача становится аналогична математической задаче о диагонализации квадратичной формы линейным преобразованием (и поэтому заведомо разрешима) и мы ищем подстановку вида<sup>15</sup>  $\hat{b}_k = u_k \hat{a}_k + v_k \hat{a}_{-k}^+$ . При этом дополнительно требуется фермиевость операторов  $\hat{b}_k$ , что даёт условие  $u_k^2 + v_k^2 = 1$ .

В результате при правильном подборе коэффициентов  $u_k$  и  $v_k$  (эти вычисления имеются в литературе, например [1], [13]) получим гамильтониан вида

$$\hat{H} = E_0 + \sum_k \varepsilon(k) \hat{b}_k^+ \hat{b}_k$$

где  $E_0$  это энергия основного состояния (отсутствие квазичастиц), а второе слагаемое описывает энергию идеального газа квазичастиц. Оказывается, что при притяжении между «настоящими» частицами ( $E^{(2)} > 0$ ) спектр  $\varepsilon(k)$  оказывается квадратичным с щелью, его вид совпадает с угаданной нами ранее формой  $\varepsilon(k) = \sqrt{\Delta^2 + \hbar^2 v_F^2 (k - k_F)^2}$ . Следовательно, в системе электронов с притяжением возникнет сверхпроводимость при не слишком больших скоростях движения электронов.

Что представляют из себя эти новые квазичастицы, являющиеся элементарными возбуждениями сверхпроводника? Для ответа на этот вопрос надо просто рассмотреть как изменятся числа заполнения электронов по состояниям при действии оператора рождения или уничтожения новой квазичастицы. Оператор уничтожения  $\hat{b}_k = u_k \hat{a}_k + v_k \hat{a}_{-k}^+$  создаёт электрон в состоянии с импульсом  $-k$  и дырку в состоянии с импульсом  $k$ . Наша квазичастица, таким образом, это некоторое смешанное состояние электрона и дырки.

Точный расчёт для амплитуд  $u_p$  и  $v_p$  даёт [13]  $\left. \begin{matrix} u_p^2 \\ v_p^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\hbar v_F (k - k_F)}{\sqrt{\Delta^2 + \hbar^2 v_F^2 (k - k_F)^2}} \right)$ . Это

выражение имеет простой наглядный смысл при сравнении с рисунком 9: вдали от фермиевского импульса квазичастица возбуждения сверхпроводника почти совпадает по своим свойствам с электронным или дырочным возбуждением нормального металла, а вблизи фермиевского импульса является смесью электрона и дырки.

15 При рассмотрении с учётом спиновых индексов преобразование имеет вид [13]  $\hat{b}_{k,\downarrow} = u_p \hat{a}_{k,\downarrow} + v_p \hat{a}_{-k,\uparrow}^+$  и  $\hat{b}_{k,\uparrow} = u_p \hat{a}_{k,\uparrow} - v_p \hat{a}_{-k,\downarrow}^+$ , то есть в этой модели автоматически учитывается спаривание электронов с противоположными значениями проекции спина.

## Основное состояние сверхпроводника: образование куперовских пар.

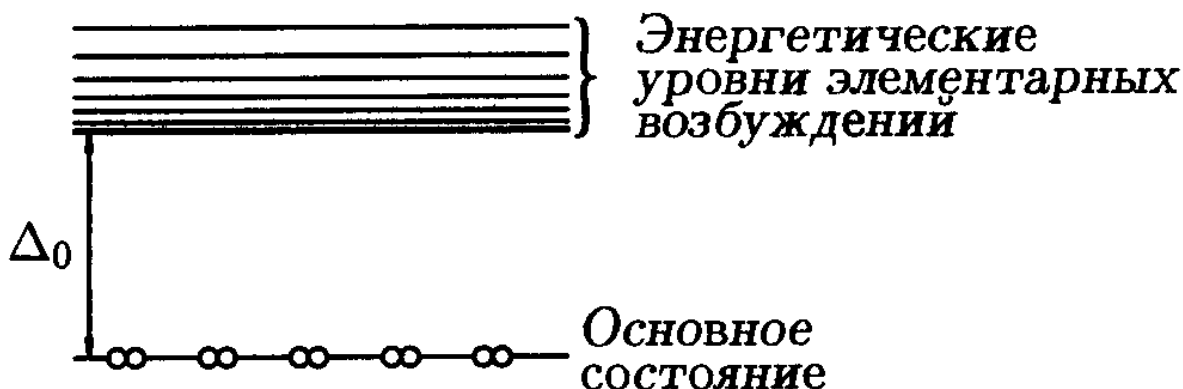


Рисунок 12 Схематическое представление основного состояния и спектра элементарных возбуждений сверхпроводника. Из книги [1].

Мы уже отмечали, что принципиальным свойством сверхпроводящего состояния является то, что это основное состояние допускает перенос электрического тока, и то, что в этом основном состоянии должно оказаться макроскопически большое количество электронов (чтобы создать макроскопически большой ток).

С аналогичным явлением мы сталкивались при рассмотрении сверхтекучести в гелии-4. Электроны, являясь фермионами, в силу запрета Паули не могут образовать аналогичный конденсат. Однако, если в силу каких-то причин пара электронов (а на то, что важны именно пары нам указывают опыты по измерению кванта потока) образует связанное состояние, то по правилам сложения момента полный спиновый момент пары будет равен нулю или 1.<sup>16</sup> Такая пара будет бозоном (частицей с целым спином), будет подчиняться статистике Бозе-Эйнштейна, для таких пар будет возможно образование конденсата макроскопического числа частиц в основном состоянии. Такая пара будет иметь заряд  $2e$ , что естественно объяснит и наблюдаемое значение кванта магнитного потока.

Терминологически спаривание в сверхпроводниках характеризуют полным орбитальным моментом пары. Если полный орбитальный момент равен нулю, то говорят об s-спаривании, если равен единице — о p-спаривании,  $L=2$  соответствует d-спариванию. В обычных сверхпроводниках имеет место s-спаривание, в ВТСП и необычных сверхпроводниках может реализовываться и d-спаривание. По полному спину пара может быть в синглетном или триплетном состоянии, полный спин пары оказывается связан с типом спаривания из-за запрета Паули: волновая функция пары фермионов  $\Psi_{12} = \Psi(r_1, s_1; r_2, s_2)$  должна быть нечётной по перестановкам  $\Psi_{12} = -\Psi_{21}$ . Напомним, что чётность состояния с моментом импульса  $L$  равна  $(-1)^L$ , синглетное состояние  $S=0$  нечётно по перестановке<sup>17</sup>, а триплетное  $S=1$  — чётно по перестановке. Таким образом, при s-спаривании с необходимостью получаем синглетное спиновое состояние, при p-спаривании — триплетное, при d-спаривании — опять синглетное.

Таким образом, возможность появления макроскопического числа частиц в квантовом основном состоянии и наблюдаемое квантование магнитного потока можно объяснить предположением, что происходит образование связанных пар электронов, называемых

<sup>16</sup> В единицах  $\hbar$ .

<sup>17</sup> Напомним спиновую часть волновой функции синглетного состояния  $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ .



куперовскими парами.

Разрушение такой пары равносильно появлению электронных возбуждений в сверхпроводнике, поэтому энергия связи пары должна быть равна удвоенной щели в спектре электронных возбуждений сверхпроводника (при разрушении пары оба её электрона уходят в возбуждённые состояния. Поэтому в опытах по измерению высокочастотного поглощения пороговая энергия фотона вдвое больше «термодинамической» щели.<sup>18</sup>

Отметим также, что такая связанная пара в s-состоянии (с синглетной спиновой частью волновой функции) «по определению» становится невыгодной в магнитном поле: зеемановская энергия минимизируется, если оба электронных магнитных момента сонаправлены с полем. Это позволяет определить так называемый парамагнитный предел Клогстона: поле, в котором выигрыш в зеемановской энергии превзойдёт энергию связи пары  $g\mu_B H_c \sim 2\Delta$  и  $H_c \sim \Delta/\mu_B$ . Для щели в 10К получаем оценку около 7Тл. Это число заметно больше характерных величин критических полей в сверхпроводниках первого рода. Это связано с тем, что перенормировка импульса в магнитном поле фактически «разгоняет» электроны так, что пары начинают разрушаться кинетическим механизмом. Однако предел Клогстона можно достичь в тонких плёнках в поле, параллельном плёнкам, когда орбитальное движение оказывается подавлено. В то же время, предел Клогстона накладывает принципиальное ограничение сверху на область полей, в которой может существовать сверхпроводимость с s-спариванием.

Картина образования пар представляет наглядную интерпретацию явления сверхпроводимости и удобна для решения многих задач. Однако, как мы увидим далее, формирование этих пар носит динамический характер, поэтому качественное представление о куперовских парах является в определённом смысле условным. Во многих задачах (например, задачах туннелирования) рассуждения оказываются более наглядными в «полупроводниковой модели» сверхпроводника. Мы уже получили зависимость плотности состояний для возбуждений сверхпроводника от энергии возбуждения, которую можно разнести на две ветви: «электронно-подобную» и «дырочно-подобную» (рисунок 10). Можно модернизировать эту картину, сделав более явной аналогию с полупроводником. Будем считать, что при  $T=0$  все состояния «дырочно-подобной» ветви заняты, и равновесное рождение возбуждений это просто переход этой частицы из «дырочно-подобной» в «электронно-подобную» ветви спектра (такая интерпретация автоматически учитывает равновероятность рождения возбуждения электронного или дырочного типа). Можно показать, что число состояний в каждой ветви совпадает с числом электронных состояний в нормальном металле. Таким образом, можно получить одноэлектронную аналогию *возбуждений* в сверхпроводнике. Минимальная энергия такого одноэлектронного возбуждения равна  $2\Delta$ , по аналогии с полупроводником «потолок» заполненных состояний «дырочно-подобной» ветви и «дно» свободных при  $T=0$  состояний «электронно-подобной» ветви отстоят от уровня энергии Ферми нормального состояния на  $\mp\Delta$  (рисунок 13). Тогда, как и в полупроводнике, химпотенциал окажется посередине «запрещённой зоны» и термодинамические свойства (теплоёмкость, теплопроводность) будут определяться щелью  $\Delta$ . А вот перевод электрона из сверхпроводящего состояния в возбуждённое будет требовать энергии  $2\Delta$ . Однако эта «полупроводниковая модель» по своему построению описывает *только свойства возбуждений!* Основное состояние (сверхпроводящий конденсат) остаётся скрытым вне этой модели — поэтому, в отличие от полупроводника с нулевой проводимостью при  $T=0$ , сверхпроводник демонстрирует нулевое сопротивление.

<sup>18</sup> С похожим отличием в два раза мы уже сталкивались при изучении полупроводников — в чистом полупроводнике показатель экспоненты в зависимости концентрации электронов от температуры равен половине ширины запрещённой зоны.

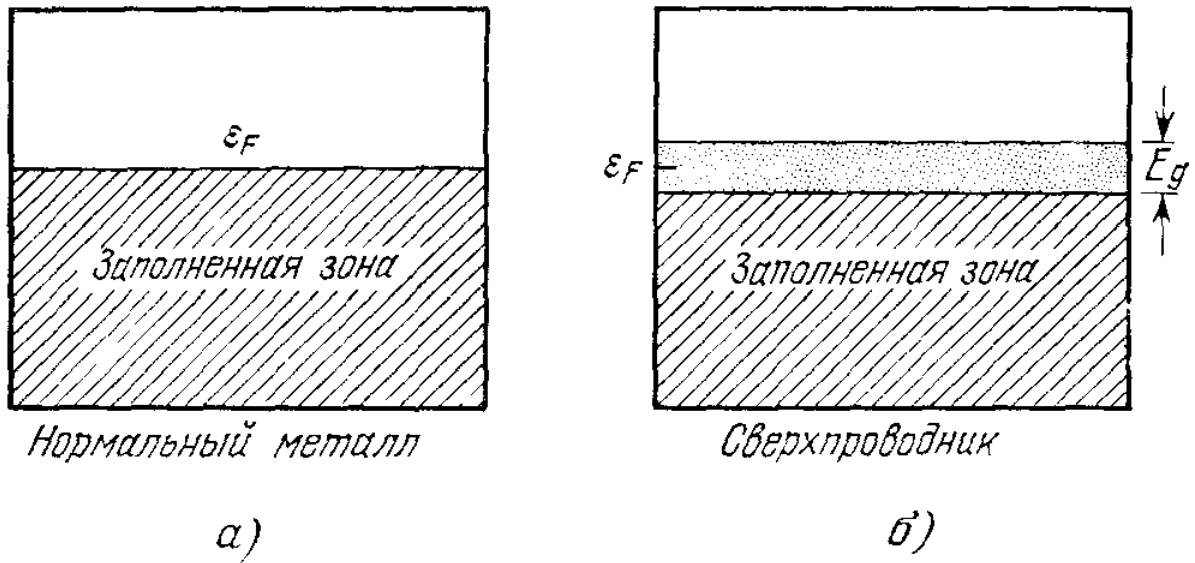


Рисунок 13: Слева: зонная структура нормального металла. Справа: структура электронных уровней в сверхпроводящем состоянии в «полупроводниковой модели». Из книги [2].

### Роль электрон-фононного взаимодействия.

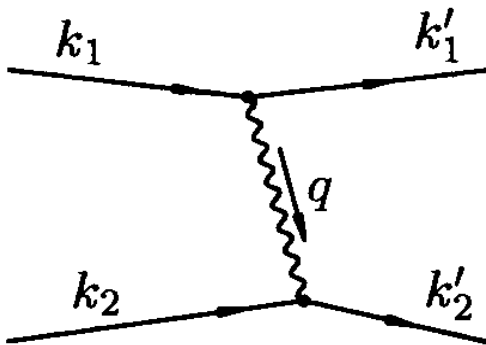


Рисунок 14 Диаграмма взаимодействия электронов через обмен фононом. Из книги [1].

Для образования связанного состояния нужно какое-то притяжение между электронами. Возникновение притяжения между одноимённо заряженными частицами вообще говоря не тривиально. Более того, так как между электронами всегда есть отталкивание, то, даже когда мы укажем на механизм появления такого притяжения, необходимо иметь в виду, что в реальных металлах это притяжение всегда будет конкурировать с кулоновским отталкиванием (которое, как мы отмечали при рассмотрении ферми-газов в металле остаётся достаточно сильным). Эта конкуренция объясняет, почему не все металлы становятся сверхпроводниками.<sup>19</sup>

Одна из главных идей теории БКШ похожа на уже известную нам из атомной физики концепцию взаимодействия путём обмена виртуальными частицами. Пусть при  $T=0$  электрон в состоянии  $\vec{k}_1$  провзаимодействовал с решёткой и породил фонон. При этом изменилось состояние электрона:  $\vec{k}_1 = \vec{k}'_1 + \vec{K}$ , где  $\vec{k}'_1$  — новое состояние электрона, а  $\vec{K}$  — волновой вектор возбуждённого фонона. Пусть теперь этот фонон поглотился вторым электроном:  $\vec{k}_2 + \vec{K} = \vec{k}'_2$ . В результате кристалл остался в основном состоянии (значит такой процесс может иметь место и при  $T=0$ ), а электроны изменили свои состояния:  $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}'_1 + \vec{k}'_2$ , что соответствует существованию между ними эффективного взаимодействия (рисунок 14).

Каков знак и характерная величина этого взаимодействия?

<sup>19</sup> При этом в ферромагнитных металлах сверхпроводимость с s-спариванием дополнительно подавляется взаимодействием с магнитным полем.

Максимальная энергия фонона порядка дебаевской температуры, которая мала по сравнению с фермиевской энергией. Поэтому взаимодействовать таким образом могут только электроны вблизи поверхности Ферми. Запрет Паули не позволяет электронам глубоко под ферми-поверхностью изменить своё состояние.

На качественном уровне знак взаимодействия легко понять, рассмотрев движение электронов (волновых пакетов) в реальном пространстве: двигаясь по решётке, электрон взаимодействует с положительными ионами и притягивает их к себе. В результате сразу после пролёта электрона по его траектории образуется область смещённых ионов, создающая избыточный положительный заряд. Этот избыточный заряд, конечно же релаксирует со временем порядка обратной дебаевской частоты, но если в течение этого времени релаксации рядом окажется второй электрон, то он испытает притяжение к этой области избыточного положительного заряда. Исключая «промежуточное звено» получаем, что второй электрон притягивается к траектории первого электрона, то есть имеет место притяжение между электронами. Так как масса атомов решётки определяет, насколько сильно решётка откликается на движение электрона, то сила этого эффективного взаимодействия будет зависеть от массы, что даёт по меньшей мере качественное объяснение изотоп-эффекта.<sup>20</sup>

В импульсном представлении электроны делокализованы, но идея остаётся такой же. Переход электрона из состояния с волновым вектором  $\vec{k}$  в состояние с волновым вектором  $\vec{k}'$  приводит к появлению модуляций электронной плотности. Эти модуляции электронной плотности вызовут смещения ионов решётки. Если частота этой модуляции меньше собственной частоты колебаний решётки (то есть дебаевской), то такие вынужденные колебания будут идти в фазе с «вынуждающей силой». Эти колебания ионного остова в свою очередь могут вызвать переход другого электрона в новое состояние.

Это взаимодействие приведёт к изменению функции распределения электронов по импульсам: если в отсутствие взаимодействия для свободных электронов оказываются заняты при  $T=0$  состояния с  $k < k_F$ , то теперь становится выгодно «размыть» ступеньку фермиевского распределения: можно немного проиграть в кинетической энергии, поместив электрон в состояние с импульсом  $k > k_F$ , если при этом в потенциальной энергии удастся выиграть больше. Так как обмен энергии при взаимодействии не может быть больше энергии связи куперовской пары, размытая область функции распределения имеет в импульсном пространстве ширину  $\frac{\delta k}{k_f} \sim \frac{\Delta}{\epsilon_F}$ .

---

20 Дополнительно можно отметить, что на рисунке 5 температура перехода в сверхпроводящее состояние уменьшается с ростом массы изотопа. Это соответствует представленной качественной картине: более лёгкие атомы больше смещаются, что приводит к большему перераспределению заряда и к более сильному притяжению. Поэтому для более лёгкого изотопного состава выигрыш в энергии сверхпроводящего состояния проявляется при более высокой температуре.

## Импульсы спариваемых электронов.

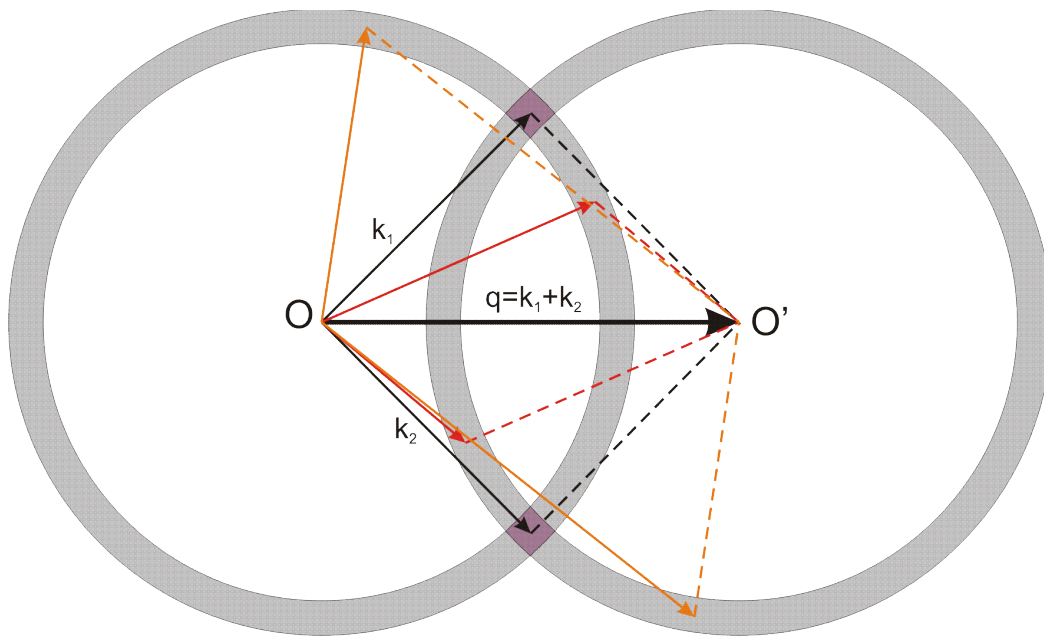


Рисунок 15 Построение доступной области в  $k$ -пространстве при рассеянии двух электронов.  $k_{1,2}$  – начальные импульсы электронов. Фиолетовой заливкой показано сечение кольца, в которое могут попасть конечные импульсы электронов с сохранением энергии и импульса. Красным и оранжевым цветом схематически построено гипотетическое положение в  $k$ -пространстве пары электронов с тем же полным импульсом, если импульс одного из электронов оказывается вне кольца доступных состояний. Видно, что при этом энергия второго электрона существенно отличается от энергии Ферми и следовательно взаимодействие таких электронов подавлено запретом Паули.

Пусть есть два электрона с волновыми векторами  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$ . В процессе взаимодействия должны сохраняться полная энергия и импульс. Кроме того, принцип Паули требует, чтобы после рассеяния электроны попали в свободные состояния.

Отсюда следует, как это нам уже встречалось при рассмотрении рассеяния электронов в металле, что и начальные, и конечные состояния должны лежать в размытом слое функции распределения вблизи поверхности Ферми. Величина размытия определяется энергией взаимодействия  $\frac{\Delta k}{k_F} \simeq \frac{U}{\epsilon_F}$ . Это требование и закон сохранения импульса могут быть

наглядно представлены (рисунок 15). Пусть  $\vec{q} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$  полный импульс пары. Построим две сферы радиуса  $k_F$ , с центрами, смещёнными на вектор  $\vec{q}$ , и «размоем» их поверхности на величину, соответствующую характерной энергии межэлектронного взаимодействия. Тогда при  $(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \neq 0$  количество доступных начальных и конечных состояний, для которых одновременно выполнимы требования закона сохранения импульса, запрета Паули и обмена энергией заданного масштаба, оказывается ограничено достаточно узким «кольцом» в размытом слое функции распределения.

Эти условия, однако, специально выделяют случай, когда полный импульс пары электронов равен нулю. В этом случае после взаимодействия оказывается доступно максимальное количество состояний: после рассеяния электроны могут оказаться в любой паре диаметрально противоположных точек размытого слоя. Поэтому основной вклад в образование связанных состояний даёт взаимодействие пар электронов с волновыми векторами  $\vec{k}$  и  $-\vec{k}$ .

Элементарное возбуждение в модели БКШ, как мы видели, является смесью электрона с волновым вектором  $\vec{k}$  и дырки с волновым вектором  $-\vec{k}$ , то есть действительно соответствует разрушению коррелированного состояния электронов в паре: один из электронов «выбивается», на его месте появляется вакансия-дырка.

## Длина когерентности.

Так как волновые вектора спариваемых электронов противоположны, то спариваемые электроны оказываются движущимися в противоположных направлениях. Поэтому образование куперовских пар носит динамический характер. На качественном уровне можно это себе представить как то, что в «море» макроскопического числа куперовских пар в конденсате всё время рвутся связи каких-то пар и тут же образуются новые. Это логично, так как все электроны конденсата эквивалентны и нет специальных причин, чтобы какие-то два электрона оставались в связанном состоянии вечно.

Тогда возникает ещё один масштаб длины в сверхпроводнике: характерный размер куперовской пары (расстояние, на котором поведение двух электронов можно считать скоррелированным). Эту длину называют длиной когерентности.

Оценим, как связана длина когерентности с другими характеристиками сверхпроводника. В основном состоянии функция распределения электронов отличается от функции распределения ферми-газа в узком слое размытия шириной  $\Delta k \sim k_F \frac{\Delta}{\epsilon_F}$ . Это означает, что волновая функция электрона в основном состоянии сверхпроводника отличается от волновой функции электрона в основном состоянии нормального металла некоторыми модуляциями с распределением волновых векторов в интервале порядка  $\Delta k$ . Характерная длина определяется длиной цуга с распределением волновых векторов в данном интервале:

$$\Delta x \sim \frac{1}{\Delta k}, \text{ она и задаст нам этот новый пространственный масштаб.}$$

Итак, для оценки длины когерентности получаем  $\xi \sim \frac{1}{k_F} \frac{\epsilon_F}{\Delta} \sim a \frac{\epsilon_F}{\Delta}$ , где  $a$  — период решётки. Для величины щели в 10К получаем характерную величину  $\sim 10^{-4} \text{ см}$ . Эта величина сравнима с лондоновской глубиной проникновения при низких температурах. Длина корреляции оказывается существенно больше межатомного расстояния, что ещё раз подчёркивает условность понятия связанных куперовских пар.

## Некоторые точные результаты модели БКШ.

Приведём для сведения некоторые важные результаты модели БКШ. Для удобства использования здесь в запись возвращена постоянная Больцмана.

1. Щель в спектре электронных возбуждений связана с температурой Дебая  $\Theta_D$ , плотностью состояний на уровне Ферми  $N^{(0)}$  и матричным элементом электрон-электронного взаимодействия  $V$ : 
$$\Delta = \frac{k_B \Theta_D}{sh(1/(N^{(0)} V))} \approx 2 k_B \Theta_D \exp(-1/(N^{(0)} V)).$$
2. Для большинства нормальных сверхпроводников  $N^{(0)} V \simeq 0.3$  или меньше, что даёт принципиальное ограничение на щель в сверхпроводнике  $\Delta \sim 10\text{К}$ . В сверхпроводниках с формированием куперовских пар за счёт электрон-фононного взаимодействия величина энергетической щели не может превышать 10-20К. Этот

результат даёт правильное описание изотоп-эффекта, так как  $\Theta_D \propto \frac{1}{\sqrt{M}}$ .

3. Энергия сверхпроводящего состояния меньше энергии нормального состояния на величину  $\Delta E = E_s - E_n = -\frac{N^{(0)} \Delta^2}{2}$ , где  $N^{(0)}$  — плотность состояний в нормальной фазе на поверхности Ферми. Наглядной интерпретацией этого результата является представление о том, что  $N^{(0)} \Delta$  электронов из приповерхностного слоя ферми-сферы образовали  $\frac{N^{(0)} \Delta}{2}$  пар с энергией связи  $\Delta$ , что и приводит к указанному выигрышу в энергии.
4. Энергетическая щель связана с температурой перехода соотношением  $2\Delta = 3.52 k_B T_c$
5. Длина когерентности может быть точно выражена через фермиевский импульс и температуру перехода  $\xi = 0.18 \frac{\hbar v_F}{k_B T_c}$ .

## Сверхпроводники II рода.

### Магнитные свойства сверхпроводников второго рода.

Сверхпроводниками второго рода называют сверхпроводники, в которых выше некоторого поля эффект Мейснера становится неполным (рисунок 16).

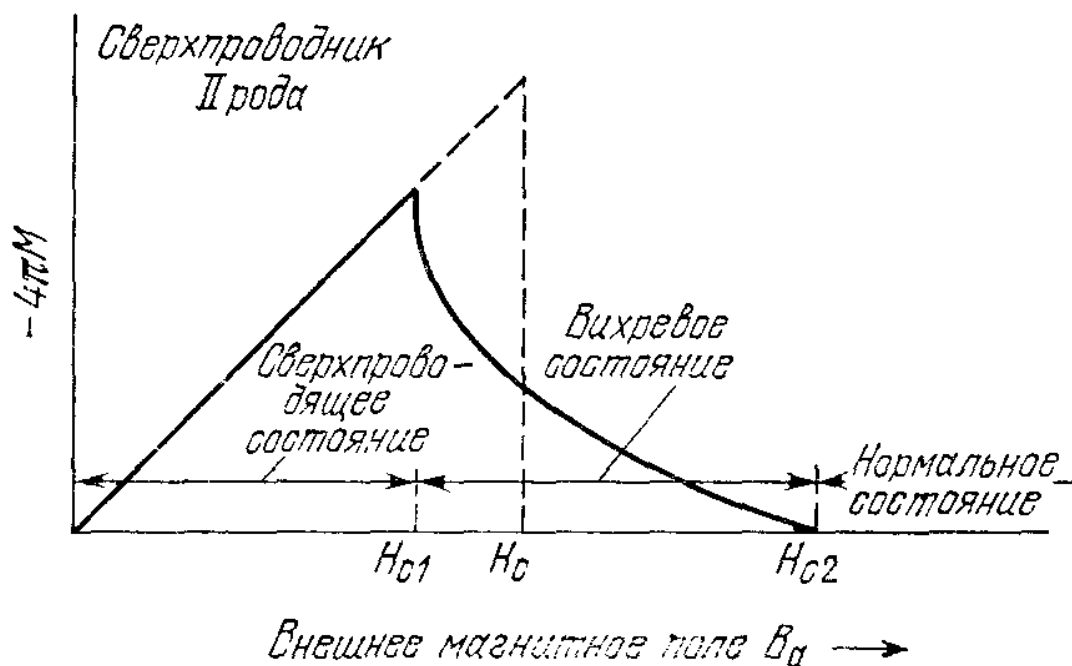


Рисунок 16: Магнитный момент сверхпроводника второго рода в магнитном поле. Из книги [2].

В магнитном поле массивный образец сверхпроводника второго рода характеризуется двумя критическими полями. Первое критическое поле  $H_{c1}$  соответствует моменту, когда эффект Мейснера перестаёт быть полным. Выше этого поля магнитное поле начинает каким-то образом проникать в сверхпроводник, но при этом сопротивление образца остаётся нулевым. Сверхпроводимость полностью разрушается во втором критическом поле  $H_{c2}$ , которое может достигать десятков тесла и существенно превосходит и первое критическое поле и термодинамическое критическое поле  $H_c$ , определяемое по разности энергий сверхпроводящего и нормального состояний.

Сверхпроводниками второго рода является большинство сплавов (в том числе широко используемые в сверхпроводящих кабелях сплавы NbTi и Nb<sub>3</sub>Sn) и ВТСП соединения.

### Энергия границы раздела сверхпроводящей и нормальной фаз.

Рассмотрим границу сверхпроводящей и нормальной фаз в магнитном поле, параллельном границе. Для существования такой границы нужно, чтобы поле на границе было равно критическому  $H_c$ .

Вдали от границы раздела в нормальном металле магнитное поле есть, а в сверхпроводнике — нет. Проникновение магнитного поля в сверхпроводник описывается глубиной проникновения  $\lambda$ . Сверхпроводящие свойства сверхпроводника связаны с формированием куперовских пар, имеющих пространственный масштаб длины когерентности  $\xi$ .

Куперовских пар нет в глубине нормального металла, их концентрация равна равновесной в глубине сверхпроводника и плавно меняется с постоянной длины  $\xi$  вблизи границы (рисунок 17).

Проникновение поля вглубь сверхпроводника подавляет диамагнитный отклик сверхпроводника и уменьшает его энергию (на единицу площади границы) на величину

$$\sigma_\lambda \simeq -\frac{H_c^2}{8\pi} \lambda \quad (\text{это выражает невыгодность диамагнитного состояния сверхпроводника в поле } H_c).$$

С другой стороны, понижение количества куперовских пар вблизи границы увеличивает энергию сверхпроводника на величину  $\sigma_\xi \simeq \frac{H_c^2}{8\pi} \xi$  (здесь мы пользуемся тем,

что связанный с формированием сверхпроводящего состояния – то есть именно с формированием куперовских пар – выигрыш в плотности энергии сверхпроводящего состояния также выражается через критическое поле и равен  $\frac{H_c^2}{8\pi}$  ). Тогда полная

поверхностная энергия границы раздела двух фаз зависит от соотношения между глубиной проникновения и длиной когерентности: она может быть как положительна, так и отрицательна.

Точный расчёт показывает, что при значении параметра  $\kappa = \frac{\lambda}{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  эти два вклада компенсируют друг друга, при  $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$  поверхностная энергия положительна, а при

$\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$  поверхностная энергия отрицательна. На языке нашего качественного рассмотрения в первом случае доминирует проигрыш за счёт неоднородности концентрации куперовских пар, а во втором — выигрыш за счёт намагничивания приграничного слоя.

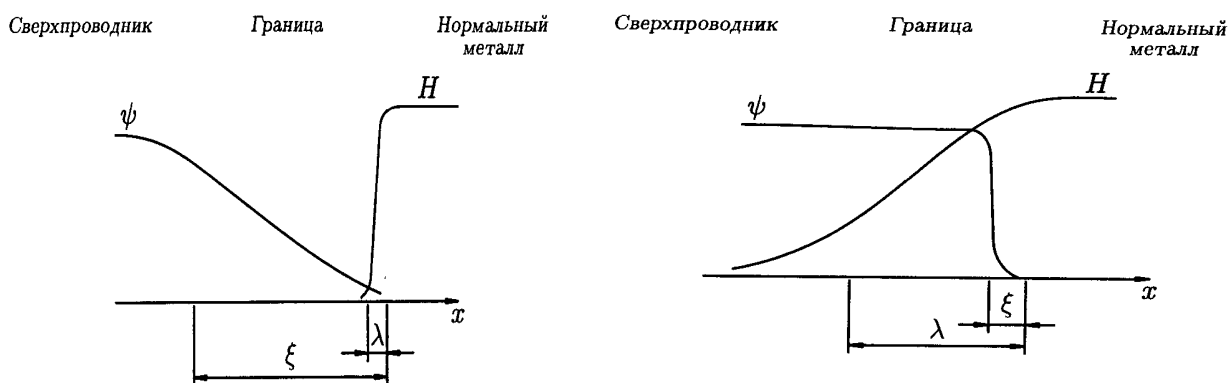


Рисунок 17 Проникновение магнитного поля и изменение концентрации куперовских пар на границе сверхпроводящей и нормальной фаз для разного соотношения между глубиной проникновения и длиной когерентности. Из книги [1].

Положительность поверхностной энергии означает, что создание такой границы энергетически невыгодно и однородно намагниченный образец находится либо в сверхпроводящем, либо в нормальном состоянии. Это соответствует сверхпроводнику первого рода: сверхпроводимость полностью разрушается в критическом поле во всём образце (мы не рассматриваем здесь зависящее от формы образца промежуточное состояние сверхпроводника первого рода). Таким образом, в сверхпроводниках первого рода глубина проникновения  $\lambda < \xi/\sqrt{2}$  .



Отрицательность поверхностной энергии позволяет получить выигрыш за счёт создания границы сверхпроводящей и нормальной фаз: может оказаться выгодно подавить сверхпроводимость в какой-то области образца, проиграв на этом энергию сверхпроводящего состояния, но выиграв в энергии магнитного поля внутри нормальной области и энергии границы. Это соответствует частичному проникновению магнитного поля в образец и сверхпроводникам второго рода. Такое состояние сверхпроводника называют *смешанным* или *шубниковским*.

### Вихри Абрикосова.

Рассмотрим подробнее, как магнитное поле проникает в образец сверхпроводника второго рода. Пусть поле близко к первому критическому. Тогда проникновение поля мало: доля «объёма» нормальной фазы маленькая и каждая из областей нормальной фазы находится далеко от других. Будем считать  $\xi \ll \lambda$ , тогда можно пользоваться уравнениями Лондонов для определения поля в сверхпроводнике. В приближении непрерывной среды задача об одной области нормальной фазы имеет цилиндрическую симметрию, эту область по аналогии со случаем сверхтекучести называют вихрем.

Как мы увидим далее каждый вихрь содержит один квант потока. В силу малости кванта потока это означает, что размер области нормальной фазы в сердцевине (или *коре*) вихря можно считать практически нулевым. Концентрация куперовских пар восстанавливается на малом расстоянии порядка  $\xi$  от центра вихря, а магнитное поле затухает на большем расстоянии порядка  $\lambda$  (рисунок 18).

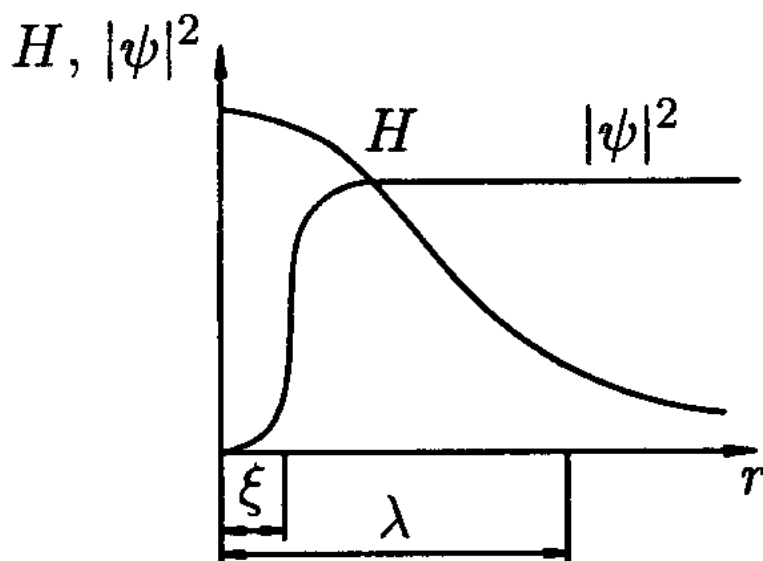


Рисунок 18: Распределение магнитного поля и концентрации куперовских пар в одиночном вихре. Из книги [1].

Для магнитного поля в сверхпроводнике можем записать обобщённое уравнение Лондонов

$$\lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} + \vec{A} = -\frac{\Phi_0}{2\pi} \vec{\nabla} \Theta, \text{ где } \Theta \text{ — фаза волновой функции основного состояния.}$$

Возьмём ротор от обеих частей, проинтегрируем по площадке, включающей вихрь и воспользуемся теоремой Стокса:

$$\lambda^2 \text{rot rot } \vec{H} + \vec{H} = -\frac{\Phi_0}{2\pi} \text{rot } \vec{\nabla} \Theta$$

$$\lambda^2 \oint \text{rot } \vec{H} d\vec{l} + \Phi = -\frac{\Phi_0}{2\pi} \oint \vec{\nabla} \Theta d\vec{l}$$

Если ограничивающий площадку контур уходит далеко вглубь сверхпроводника, то интеграл в левой части зануляется (поле равно нулю), а интеграл в правой части есть кратное  $2\pi$  для однозначности волновой функции. Отсюда полный поток  $\Phi = n\Phi_0$  кратен кванту потока.

### Магнитное поле внутри абрикосовского вихря.<sup>†</sup>

Заметим, что если контур интегрирования не будет включать вихрь, то интеграл  $\oint \vec{\nabla} \Theta d\vec{l} = 0$ . То есть  $\text{rot } \vec{\nabla} \Theta$  должен иметь особенность в месте расположения вихря, аналогичную дельта-функции, так как только включение этой точки в контур, по которому идёт интегрирование даёт ненулевой набег фазы. В результате получаем, что  $\text{rot } \vec{\nabla} \Theta = 2\pi n \delta(\vec{r}) \vec{e}$ , где  $\vec{e}$  — единичный вектор вдоль оси вихря, расположенного в точке  $\vec{r} = 0$ ,  $n$  — число квантов потока.

Тогда получаем уравнение для поля:

$$\lambda^2 \text{rot rot } \vec{H} + \vec{H} = \Phi_0 n \delta(\vec{r}) \vec{e}$$

(знак в правой части убран в множитель  $n$ ) с граничным условием  $H(r \rightarrow \infty) = 0$ . Такое уравнение<sup>21</sup> решается через функцию Макдональда  $K_0(z)$

$$H = \frac{n\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(r/\lambda), \text{ где функция Макдональда имеет асимптотики}$$

$$K_0(z) \propto \begin{cases} \ln(1/z), & z \ll 1 \\ e^{-z}/\sqrt{z}, & z \gg 1 \end{cases}$$

Расходимость в центре вихря устраняется обрезкой на расстоянии  $\xi$  так как внутри области радиуса  $\xi$  сверхпроводимость сильно подавлена и уравнения Лондонов заведомо неприменимы. Поэтому поле в центре вихря  $H(0) \simeq \frac{n\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\xi}$ .

Вспомним, что энергия сверхпроводника, в который проникло магнитное поле  $F_s = F_{s0} + \frac{1}{8\pi} \int (\vec{H}^2 + \lambda^2 (\text{rot } \vec{H})^2) dV$ . Отсюда видно, что в  $n$ -квантовом вихре проигрыш в энергии в  $n^2$  раз больше, чем в одноквантовом. Поэтому оказывается энергетически выгодно создать  $n$  одноквантовых вихрей, чтобы принять тот же магнитный поток.

Таким образом, магнитное поле проникает в сверхпроводник второго рода в виде вихрей, с каждым из которых связан квант потока  $\Phi_0$ .

<sup>21</sup> Если поле  $\vec{H}$  параллельно оси  $z$  и зависит только от расстояния до оси вихря, то по формулам для ротора

в цилиндрических координатах  $\text{rot } \vec{H} = -\frac{\partial H}{\partial r} \vec{e}_\phi$  и  $\text{rot rot } \vec{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( -\frac{\partial H}{\partial r} \right) \right) \vec{e}_z$  и в левой

части остаётся для  $z$ -проекции поля  $\lambda^2 \left( -\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) + H^2$ , то есть действительно для поля в

цилиндрической геометрии будет не «чистая экспонента» в зависимости поля от радиуса.

## Критические поля сверхпроводника второго рода.<sup>†</sup>

Теперь мы можем интерпретировать критические поля сверхпроводника второго рода.

Первое критическое поле  $H_{c1}$  соответствует моменту, когда становится выгодно рождение вихрей. Найдём энергию одиночного вихря:

$$F_s = F_{s0} + \frac{1}{8\pi} \int (\vec{H}^2 + \lambda^2 (\text{rot } \vec{H})^2) dV .$$

Воспользуемся тем, что  $(\text{rot } \vec{H})^2 = \vec{H} \text{rot rot } \vec{H} - \text{div} [\text{rot } \vec{H} \times \vec{H}]$ . В качестве объёма выберем бесконечный слой единичной толщины перпендикулярный вихрю. Тогда интеграл от дивергенции превратится в поток вектора  $[\text{rot } \vec{H} \times \vec{H}]$  через ограничивающие плоскости выбранного слоя. Так как поле  $\vec{H}$  нормально к плоскостям, этот вектор оказывается лежащим в плоскости и его поток зануляется, на далёких боковых стенках вклад также зануляется из-за экспоненциального спадения поля. Тогда для энергии вихря (на единицу длины) остаётся  $\varepsilon = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H} (\vec{H} + \lambda^2 \text{rot rot } \vec{H}) dV$ .

Выражение в скобках есть  $\Phi_0 \delta(\vec{r}) \vec{e}$  и тогда  $\varepsilon = \frac{1}{8\pi} H(0) \Phi_0 \simeq \left( \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \frac{\lambda}{\xi}$ . Энергия вихря положительна, его произвольное образование невыгодно. Образование вихря станет выгодно, если выигрыш в отклонении от идеального диамагнетизма превзойдёт цену образования вихря. Этот выигрыш есть  $-\frac{1}{4\pi} \int \vec{B} \vec{H} dV$ , где  $\vec{B}$  — индукция внутри сверхпроводника, а  $\vec{H}$  — внешнее поле. Внешнее поле выносится из-под интеграла, интеграл по тому же плоскому слою превращается в магнитный поток. Таким образом, выигрыш в магнитной энергии при вхождении вихря в сверхпроводник (на единицу длины)  $-\frac{1}{4\pi} H \Phi_0$ . Приравнявая, получаем  $H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\xi}$ .

Второе критическое поле  $H_{c2}$  — это поле полного разрушения сверхпроводимости. Его можно оценить, предположив, что в этом поле расстояние между вихрями оказывается порядка размера области с подавленной сверхпроводимостью  $\xi$ . Тогда на каждый вихрь приходится площадь  $\sim \xi^2$ , полный поток через эту площадь должен равняться  $\Phi_0$ . Получаем:  $H_{c2} \simeq \frac{\Phi_0}{\xi^2}$ .

Видно, что при  $\lambda \gg \xi$  будет  $\frac{H_{c2}}{H_{c1}} \simeq 4\pi \left( \frac{\lambda}{\xi} \right)^2 \frac{1}{\ln(\lambda/\xi)} \gg 1$ . Действительно, первое критическое поле активно используемых при создании сверхпроводящих кабелей и соленоидов сверхпроводников второго рода Nb<sub>3</sub>Sn и NbTi составляет около 1 кЭ, в то время как второе критическое поле превышает 20 Тл.

## Наблюдение решётки абрикосовских вихрей.

По мере удаления от критического поля  $H_{c1}$  концентрация вихрей на единицу площади растёт, расстояние между ними уменьшается и становится существенно взаимодействие вихрей. Мы уже отметили, что n-квантовому вихрю выгодно распасться: следовательно, вихри отталкиваются. Это взаимодействие вихрей приводит к формированию треугольной вихревой решётки.

Такая вихревая решётка наблюдалась многими способами. Например, распределение магнитного поля в вихре можно изучать методами магнитного резонанса. Подавление сверхпроводящего состояния в коре вихря можно проверить методами туннельной спектроскопии. Мы приведём здесь два примера непосредственного наблюдения вихревой решётки.

Вихревую решётку можно просто визуализировать, если поверхность сверхпроводника посыпать мелким порошком из магнитного материала. Тогда в местах выхода силовых линий магнитного поля (в сердцевинах вихрей) произойдёт скопление этого материала [14]. Действительно, наблюдалась треугольная решётка (рисунок 19) с периодом около  $3500\text{\AA}$ . Вычисленное по плотности вихрей значение средней индукции в образце совпало с независимо измеренной магнитной индукцией.

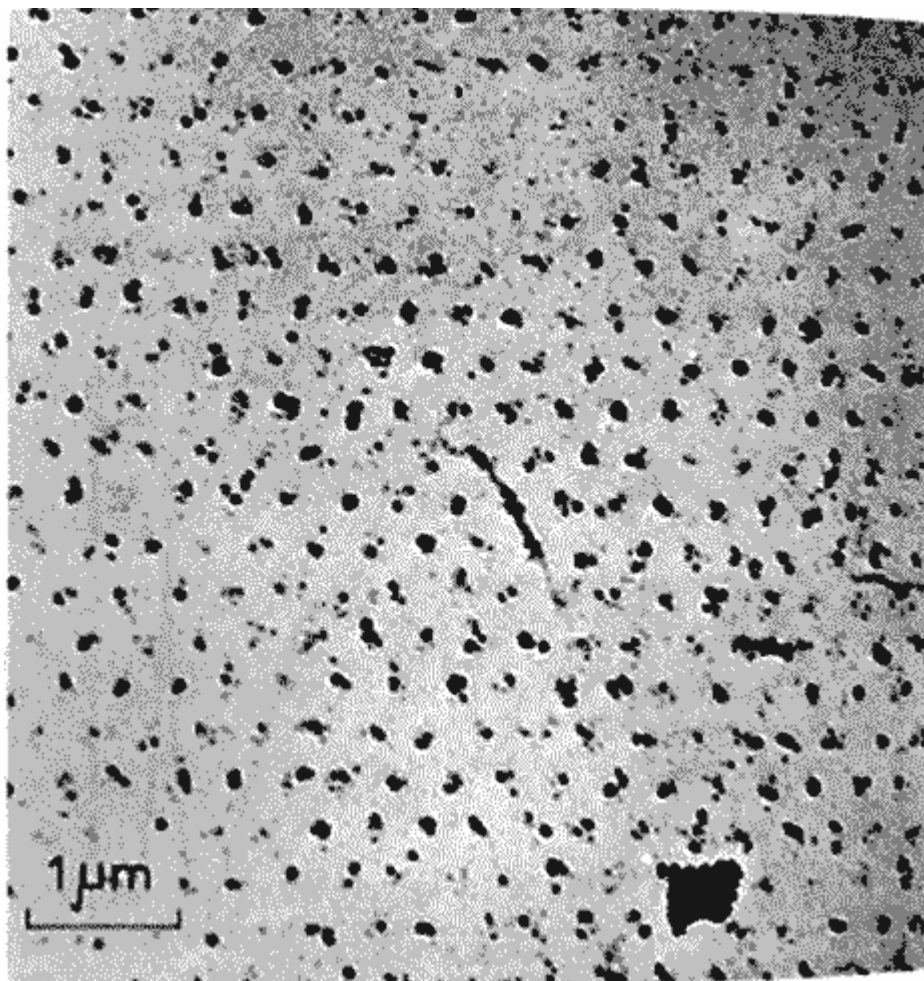


Рисунок 19: Декорированная магнитным порошком поверхность сверхпроводника (свинец с примесью 4% индия).  $T=1.1\text{К}$ , поле  $3\text{ кЭ}$ . Из работы [14].

Периодическая вихревая решётка может использоваться как дифракционная решётка при дифракции нейтронов. Напомним, что, благодаря наличию магнитного момента у нейтрона, нейтрон чувствителен к периодическому изменению магнитного поля. Большой период вихревой решётки означает, что при дифракции тепловых (с длиной волны около  $10\text{ \AA}$ ) нейтронов углы отклонения будут очень малы, поэтому требуется специальная оптимизация установки для изучения малоугловой дифракции [15], [16]. Однако такой эксперимент технически возможен [17]. Действительно, наблюдается система дифракционных пятен,

соответствующих несколько искажённой треугольной решётке, эта дифракционная картина возникает только в поле выше первого критического (рисунок 20). Схема установки и фотография реального малоуглового дифрактометра показаны на рисунках 21, 22.

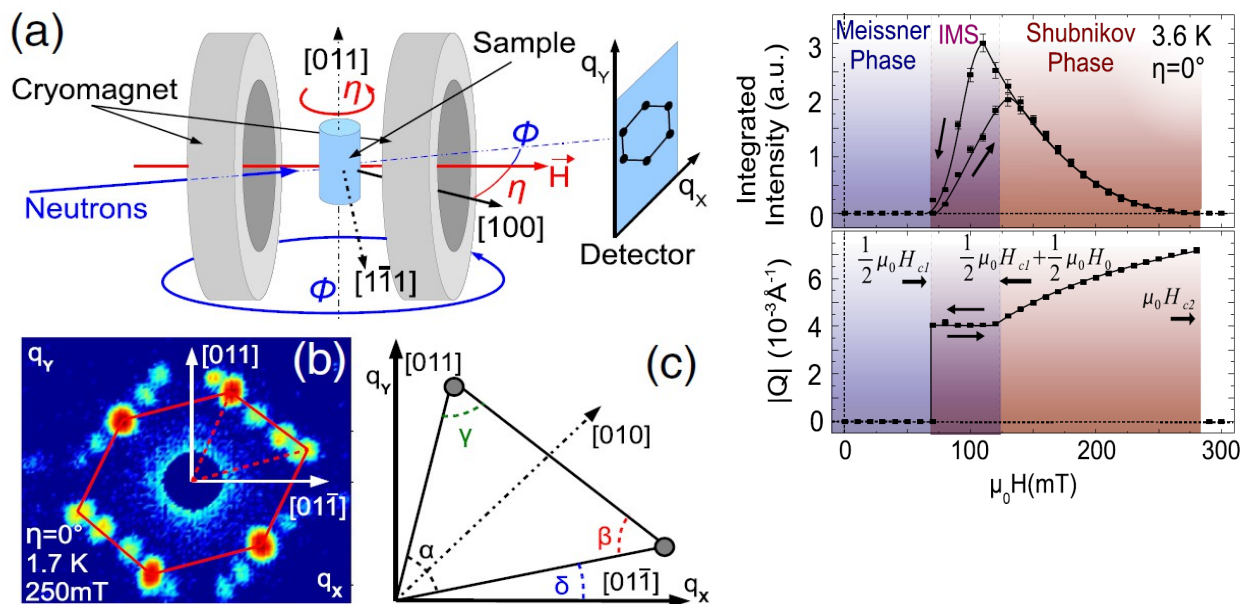


Рисунок 20: Наблюдение нейтронной дифракции на вихревой решётке в сверхпроводящем ниобии. Дебройлевская длина волны нейтронов  $12\text{\AA}$ , типичное изменение волнового вектора нейтронов  $\vec{Q}=\vec{k}'-\vec{k}$  порядка  $5\cdot 10^{-3}\text{\AA}^{-1}$ . Из работы [17].

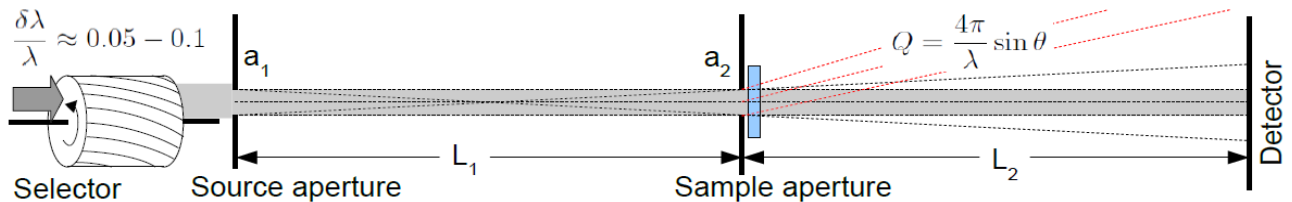
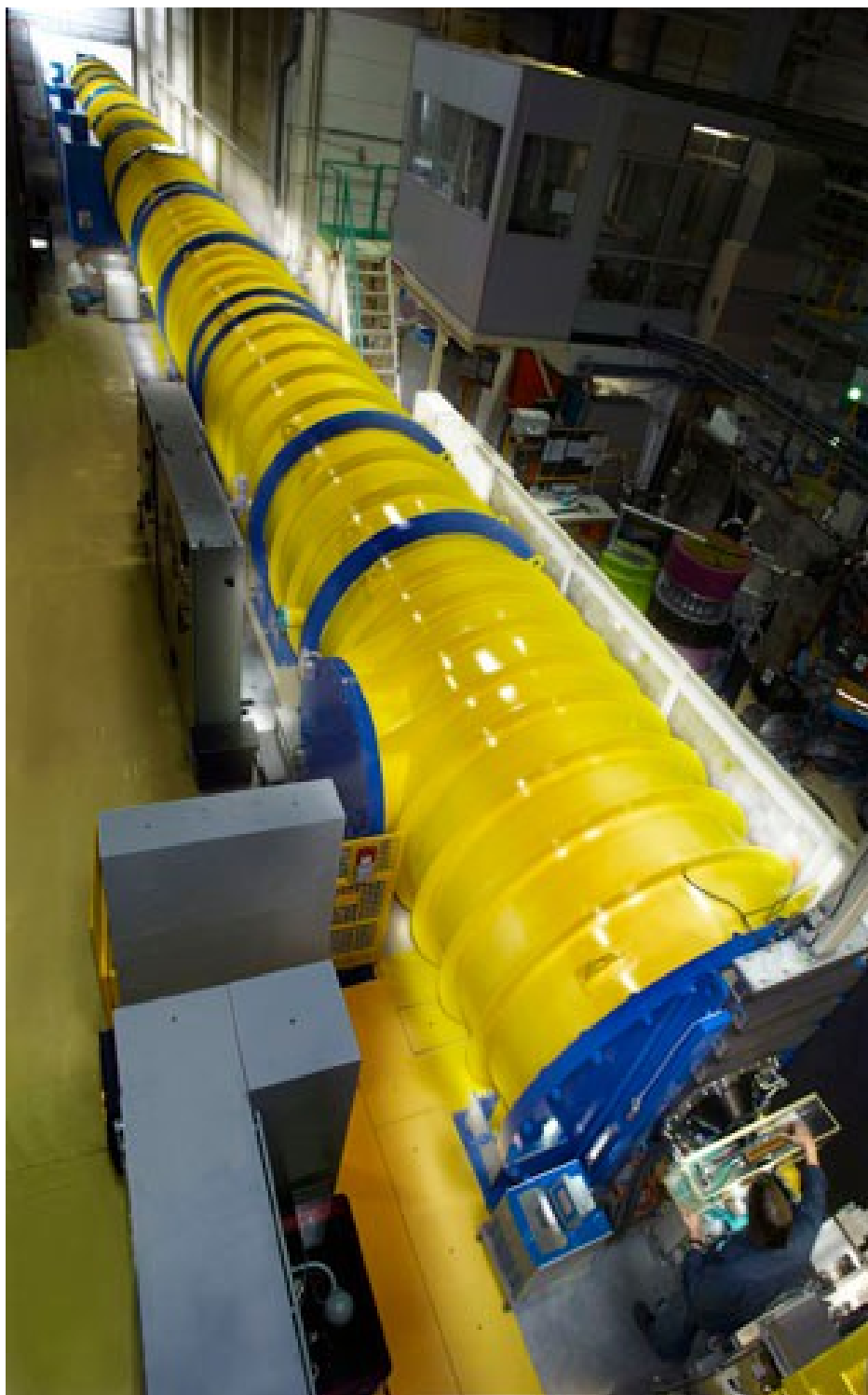


Рисунок 21: Схема эксперимента по малоугловому рассеянию нейтронов. Из приглашённой лекции С. Мюлбауэра из [15].



*Рисунок 22: Канал для дифрагировавших нейтронов в малоугловом дифрактометре D11 Института Лауэ-Ланжевена. Длина около 40 метров, при работе канал откачивается для устранения рассеяния на воздухе. С сайта [16].*

## Пиннинг вихревой решётки

Высокое значение второго критического поля в сверхпроводниках второго рода делает эти материалы интересными для технических приложений: в частности, это системы сверхпроводящих магнитов, используемых в лабораториях, ускорителях частиц, и даже в медицинских томографах. Принципиальным для этого использования является бездиссипативность протекания тока мимо вихревой решётки в полях  $H_{c1} < H < H_{c2}$ .

Однако, при протекании тока вблизи вихря на электроны действует сила Лоренца со стороны поля вихря. Соответственно, и на вихри действует сила со стороны протекающего тока. Эта сила перпендикулярна к току и внешнему полю. То есть, в идеальном проводнике вихревая решётка должна смещаться поперёк тока.

Реальный кристалл, однако, всегда несовершенен — в нём есть разные дефекты. В частности, может оказаться, что локально вблизи дефекта сверхпроводящее состояние не выгодно (например, из-за какого-то локального изменения жёсткости решётки в окрестности дефекта). Тогда вихрю выгодно «зацепиться» за такой дефект — при уходе вихря от этого дефекта возникает дополнительный проигрыш в энергии связанный с относительной невыгодностью формирования там сверхпроводящей фазы. Этот эффект называют пиннингом вихрей.

Этот пиннинг препятствует действию силы Лоренца. Однако, если сила Лоренца достаточно велика, то вихрь оторвётся от центра пиннинга. Затраты энергии на этот отрыв приводят к диссипации энергии в сверхпроводнике. Это похоже на возникновение «трения» вихревой решётки о дефекты кристалла.



Рисунок 23: Взаимодействие сверхпроводника (чёрный "брусочек" - это сверхпроводящая ВТСП-керамика с температурой перехода в сверхпроводящее состояние большей температуры кипения жидкого азота) и постоянного магнита (серебристый цилиндр). Слева: магнит отталкивается от сверхпроводника за счёт эффекта Мейснера. Справа: при подъёме магнита сверхпроводник поднимается вслед за ним из за сильного пиннинга вихрей. Кадры демонстрационного видеоролика.

В результате мы приходим к несколько неожиданному выводу — для получения технически эффективного сверхпроводящего материала с большими критическими токами и полями необходимо, чтобы пиннинг вихрей был сильным (вихри не отрывались как можно дольше), а центров пиннинга должно быть много (тогда большое количество вихрей сможет закрепиться и бездиссипативный ток будет наблюдаться при максимальных полях)! В частности, пиннинг приводит к наблюдаемому в демонстрациях эффекту (рисунок 23), что

сверхпроводник второго рода *отталкивает* магнит за счёт эффекта Мейснера, но при отодвигании магнита *притягивается* к магниту, так как запиннингованные вихри «не выпускают» из сверхпроводящего образца захваченные силовые линии магнитного поля.