

Московский физико-технический институт
Кафедра общей физики

Лекция 10

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ДИАГРАММЫ ДЛЯ КВАЗИЧАСТИЧНОГО ТОКА В
КОНТАКТАХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ. ЭФФЕКТ ДЖОЗЕФСОНА.

заметки к лекциям по общей физике

В.Н.Глазков

Москва

2017

В данном пособии представлены материалы к лекции по теме «Энергетические диаграммы для квазичастичного тока в контактах сверхпроводников. Эффект Джозефсона.» из курса «Квантовая макрофизика», преподаваемого на кафедре общей физики МФТИ. Эта лекция завершает модуль курса, посвящённый сверхпроводимости и посвящена туннельным эффектам в сверхпроводниках и эффекту Джозефсона.

Пособие не претендует на полноту изложения материала и в основном является авторскими заметками к лекциям, оно содержит основные сведения по этой теме курса.

По темам сверхпроводимости основным учебником является В.В.Шмидт «Введение в физику сверхпроводников» [1], темы этой лекции разбираются в параграфах 46 и главе IV (параграфы 20-26). Общие сведения содержатся также в книге Ч. Киттеля «Введение в физику твёрдого тела» [2] (глава 12 и приложение К). Построение энергетической диаграммы сверхпроводника обсуждается в компактной форме в приложении II к задачнику [3]. Вопросы теории эффекта Джозефсона разобраны в методическом пособии МФТИ [4]

Символом † отмечены дополнительные разделы.

Основные понятия, вводимые на этой лекции:

1. Туннельные переходы металл-сверхпроводник и сверхпроводник-сверхпроводник.
2. Стационарный и нестационарный эффекты Джозефсона.
3. СКВИД и его применение.

Оглавление

Туннельные эффекты в сверхпроводниках.....	4
Подбарьерное туннелирование (напоминание).....	4
Туннельный контакт нормальных металлов.....	5
Туннельный контакт сверхпроводник-нормальный металл.....	7
Туннельный контакт сверхпроводник-сверхпроводник.....	12
Применение туннельного эффекта для изучения свойств сверхпроводников.....	14
Эффект Джозефсона.....	19
Туннелирование куперовских пар через «слабую связь».....	19
Стационарный эффект Джозефсона.....	20
Нестационарный эффект Джозефсона. Резистивная модель джозефсоновского перехода..	24
Джозефсоновский переход в магнитном поле.†.....	27
Сверхпроводящий квантовый интерферометр (СКВИД).....	29
Применение СКВИД-интерферометров.....	31

Список литературы

- 1: Шмидт В.В., Введение в физику сверхпроводников, М.:МЦНМО, 2000
- 2: Ч.Киттель, Введение в физику твёрдого тела., ,
- 3: под ред. В.А.Овчинкина, Сборник задач по общему курсу физики, часть 3: Атомная и ядерная физика. Строение вещества., Физматкнига, 2009
- 4: Я. В. Фоминов, Н. М. Щелкачёв, Эффект Джозефсона, МФТИ, 2010
- 5: Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц, Теоретическая физика, том 3: Квантовая механика. Нерелятивистская теория., М.:Наука, 1989
- 6: Ivar Giaever, Electron Tunneling and Superconductivity, Nobel Prize Lecture, (1973)
- 7: H. F. Hess, R. B. Robinson, R. C. Dynes, J. M. Valles, Jr., and J. V. Waszczak, Scanning-Tunneling-Microscope Observation of the Abrikosov Flux Lattice and the Density of States near and inside a Fluxoid, Physical Review Letters, 62, 214 (1989)
- 8: Øystein Fischer, Martin Kugler, Ivan Maggio-Aprile, Christophe Berthod, and Christoph Renner, Scanning tunneling spectroscopy of high-temperature superconductors, Review of Modern Physics, 79, 353 (2007)
- 9: wikipedia.org, Josephson effect, 2016, http://en.wikipedia.org/wiki/Josephson_effect
- 10: А.А.Абрикосов, Основы теории металлов, Физматлит, 2010
- 11: FZ Juelich, Sensorics and Spectrometry: High-Tc Quantum Interferometer Sensors for Magnetic Microscopy of Microstructures and Electric Circuits, 2016, http://www.fz-juelich.de/pgi/pgi-5/DE/Leistungen/SensorikUeberblick/_node.html
- 12: Quantum Design, MPMS (outdated), 2016, <http://www.qdusa.com/products/mpms.html>
- 13: , MPMS XL: Magnetic Property Measurement Systems,
- 14: Quantum Design, MPMS Hardware reference Manual, Quantum Design,

Туннельные эффекты в сверхпроводниках.

Подбарьерное тунелирование (напоминание).

С явлением тунелирования мы уже сталкивались в курсе квантовой микрофизики: это явление проявляется и в различных задачах ядерной физики и в работе такого инструмента физики твёрдого тела, как туннельный микроскоп. Напомним, что физика этого явления (см., например, [5]) заключается в том, что если две области, в которых частица может существовать, разделены барьером (областью в которой классическая частица такого типа с данной энергией существовать не может), то с учётом квантовой природы частицы оказывается возможным с некоторой вероятностью переход частицы из одной области в другую. В широко известной одномерной квазиклассической модели вероятность такого процесса описывается коэффициентом прохождения $D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x)-E)} dx\right)$,

где $x_{1,2}$ — координаты границ барьера.

В рассматривавшемся в курсе квантовой микрофизики тунелировании электрона с образца на иглу туннельного микроскопа таким барьером оказывался слой вакуума между образцом и иглой. Также барьером может быть тонкая плёнка диэлектрика, разделяющая два металла: через такую плёнку может течь небольшой туннельный ток. В случае сверхпроводника добавляется дополнительная возможность: теперь туннелировать могут не только электроны, но и куперовские пары. Наша цель на этой лекции: проследить к каким физическим эффектам приводит, если один или оба контакта оказываются в сверхпроводящем состоянии.

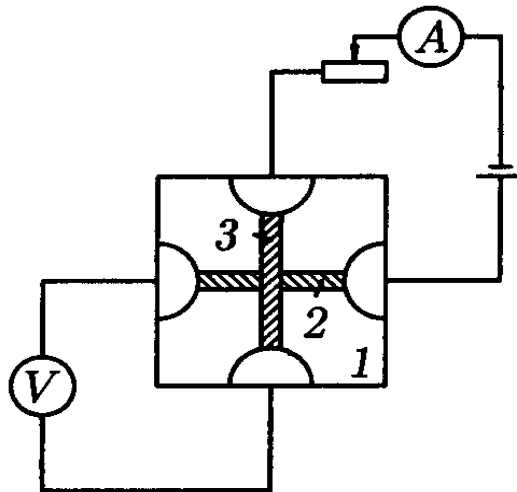


Рисунок 1 Схема опыта по изучению туннельного тока. (1) — подложка, (2) и (3) — разделённые окислом полоски изучаемых металлов. Из книги [1].

Для изучения туннельных переходов удобно использовать простую геометрию опыта, показанную на рисунке 1. На подложку (например стеклянную) напыляется полоска одного из исследуемых металлов, поверхность металла окисляется, после чего поперёк первой полоски напыляется полоска второго металла. В области перекрытия металлы оказываются разделены тонким слоем диэлектрика и эта область оказывается местом, где возможно туннелирование между металлами. Пропуская ток через туннельный переход и измеряя

падение напряжения на переходе (или наоборот, измеряя туннельный ток при фиксированном напряжении), можно изучать свойства туннельного перехода. Таким образом, непосредственно измеряемая в эксперименте характеристика туннельного перехода — это его вольт-амперная характеристика $I(U)$, а при применении методики модуляции¹ — дифференциальная вольт-амперная характеристика $\frac{dI}{dU}$.

Туннельный контакт нормальных металлов.

Рассмотрим сначала случай туннелирования электрона между двумя нормальными металлами. Если металлы разнородные, то, благодаря возможности протекания туннельного тока через переход, произойдёт незначительное перераспределение зарядов до выравнивания уровней электрохимического потенциала $\mu - e\phi$ (выбор знака связан с тем, что мы считаем константу $e > 0$).

При этом возникает вопрос о выборе начала отсчёта энергии для разнородных материалов. Естественным выбором является ноль энергии электрона в вакууме. До перераспределения зарядов энергии Ферми обоих металлов находятся ниже этого уровня на величину работы выхода.

В установившемся равновесии сравниваются полные (с учётом электростатической) энергии электронов на уровне Ферми и возникнет некоторая контактная разность потенциалов. Так как изменение концентрации ничтожно мало по сравнению с концентрацией электронов в металле, расстояние от поверхности Ферми до дна зоны проводимости останется практически неизменным и можно считать что все свойства электронов на поверхности Ферми (эффективная масса и плотность состояний) не меняются. Возникновение заряда на металлах приводит к появлению электрического поля в диэлектрическом зазоре и высота туннельного барьера начнёт зависеть от координаты. Однако, если дно зоны проводимости диэлектрика высоко или если нас интересует только качественное поведение туннельного тока, то этим эффектом можно пренебречь и считать, что уровни Ферми соединяемых металлов совпали изначально.

Для простоты далее будем рассуждать в рамках модели свободных электронов при $T=0$. После выравнивания уровней Ферми ток через туннельный промежуток течь перестаёт: на уровне энергии электронов на одном «берегу» туннельного контакта на другом «берегу» все состояния заняты и запрет Паули препятствует переходу электронов. При приложении дополнительной внешней разности потенциалов U , поддерживаемой внешним источником, равновесие будет нарушено, энергия электронов на положительном электроде понизится на $-eU$ и возникнет возможность перехода электронов с отрицательного электрода: их энергии теперь соответствуют свободные состояния на положительном электроде (рисунок 2). Возникающий туннельный ток будет пропорционален проницаемости барьера и (при небольшой разности потенциалов на «берегах») будет определяться плотностями состояний на поверхности Ферми на обоих «берегах»² $I \propto D N_1^{(0)} N_2^{(0)} eU$.

1 Периодическая модуляция «вынуждающей силы» является стандартным методом экспериментальной физики, позволяющим повысить чувствительность опыта. Например, если при измерении вольт-амперной характеристики $I(U)$ прикладываемое напряжение $U = U_0 + \delta \cos \Omega t$, то и в токе возникает осциллирующий вклад $I \approx I(U_0) + \frac{dI}{dU} \delta \cos \Omega t$. Измерение переменного сигнала может быть выполнено с большей точностью, чем постоянного: шумы легко исключить селективным усилителем или фазочувствительным детектором. В результате такого опыта с модуляцией измеряется первая производная от отклика системы.

2 Для тока одинаково важны и количество электронов, готовых перейти через переход, и количество вакансий

Таким образом, туннельный контакт двух металлов будет *омическим*: ток пропорционален падению напряжения на контакте.

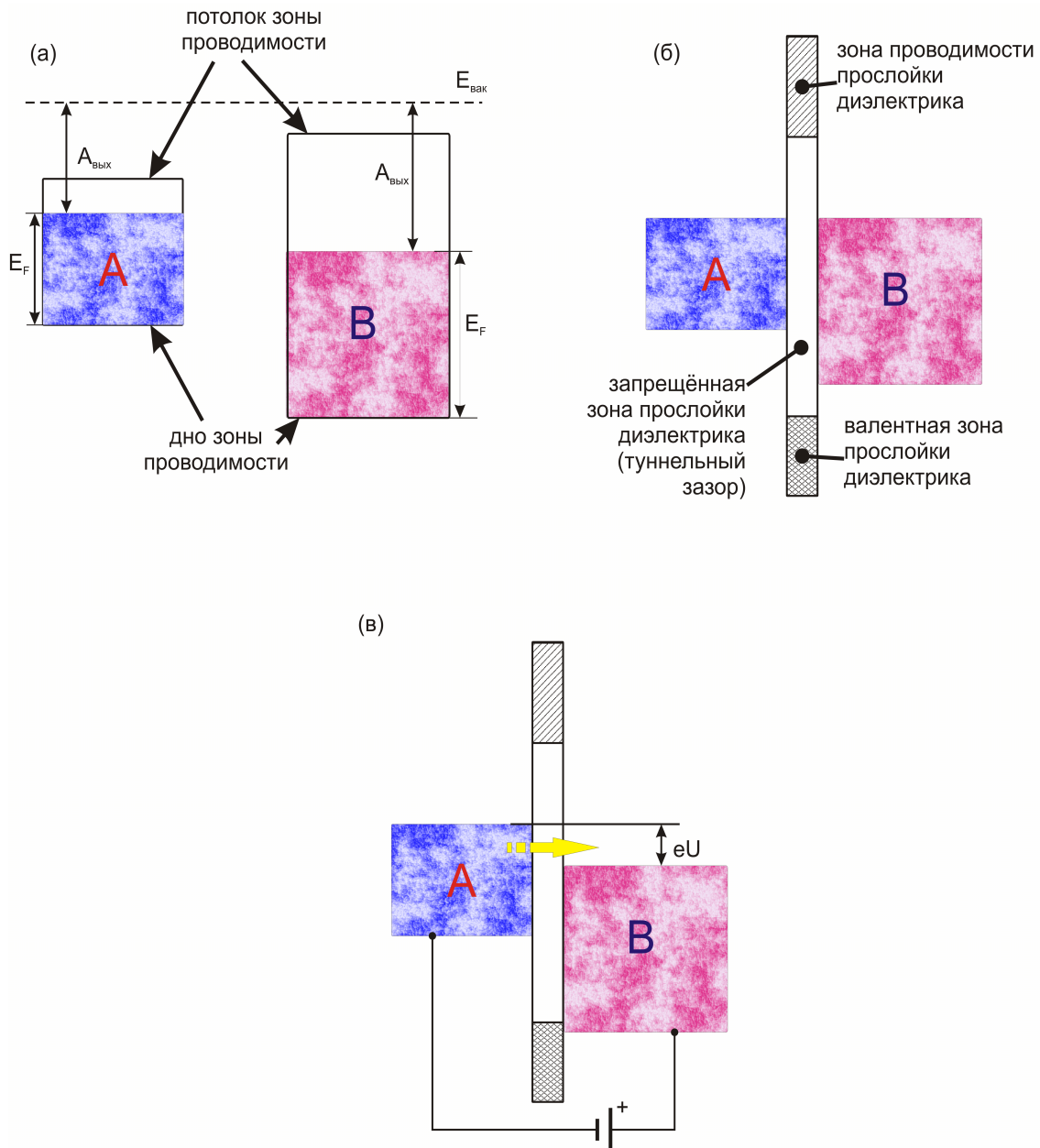


Рисунок 2 К описанию туннелирования между нормальными металлами. (а) Два разнородных металла на большом удалении друг от друга, пунктиром показан уровень электрона с нулевой энергией в вакууме. (б) Равновесное положение заполненных зон проводимости при приведении металлов в контакт, изменение энергии Ферми в связи с перераспределением электронов ничтожно мало и не показано. (в) Возникновение туннельного тока при приложении к туннельному контакту разности потенциалов.

на «принимающем» электроде. Это также отражает тот факт, что формально электрический ток можно описывать и как ток электронов с отрицательного электрода, и как ток вакансий с положительного электрода. Формально такой закон для тока получается, так как при вероятности туннелирования между двумя состояниями, описываемой проницаемостью барьера D необходимо ещё просуммировать по всем начальным и конечным состояниям (в общем случае, для ферми-жидкости или ферми-газа при $T \neq 0$, дополнительно учитывая возможное отличие чисел заполнения исходных состояний от 1 и отличие чисел заполнения конечных состояний от 0).

Туннельный контакт сверхпроводник-нормальный металл.

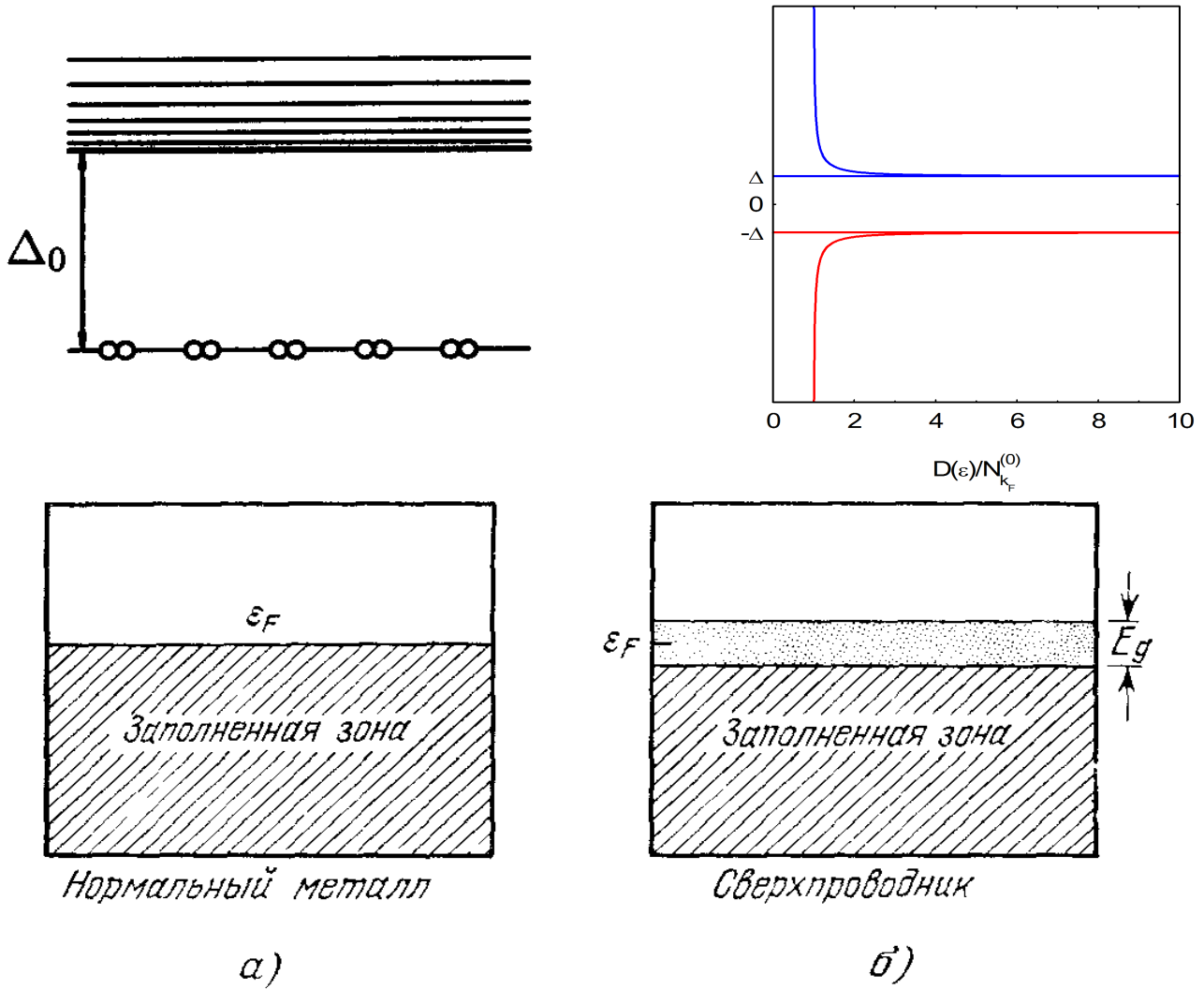


Рисунок 3 Сверху слева: структура энергетического спектра сверхпроводника в представлении о куперовских парах, уровень химпотенциала совпадает с энергией основного состояния. Из книги [1]. Сверху справа: спектр квазичастиц и плотность состояний в сверхпроводнике с разделёнными «электронно-подобной» и «дырочно-подобной» ветвями. Снизу: структура энергетического спектра сверхпроводника в «полупроводниковой модели» одноэлектронных состояний (слева — нормальный металл, справа — сверхпроводник), уровень химпотенциала в сверхпроводящем состоянии находится в центре запрещённой зоны. Из книги [2].

Рассмотрим теперь свойства туннельного перехода между нормальным металлом и сверхпроводником (NS-переход). Рассмотрим сначала случай $T=0$. Как и для контакта обычных металлов, установление контактной разности потенциалов не является для нас интересным эффектом: наличие макроскопически большого количества подвижных электронов по обе стороны туннельного барьера позволяет выровнять уровни электрохимического потенциала обоих металлов ценой ничтожного изменения плотности заряда.

Таким образом, в отсутствие дополнительно приложенной разности потенциалов мы будем для простоты считать, что уровни энергии Ферми металла и уровень химпотенциала в сверхпроводнике совпадают. Дальнейшие рассуждения зависят от того, какую модель представления спектра возбуждений сверхпроводника мы будем использовать (хотя окончательный ответ, конечно же, не зависит от этого выбора). На примере контакта

сверхпроводник-металл покажем, как строятся рассуждения для всех подходов.

Как обсуждалось на предыдущей лекции, главным свойством спектра возбуждений сверхпроводника является наличие щели в энергетическом спектре, а основное состояние сверхпроводника — это «конденсат» куперовских пар. Такой спектр может быть схематически представлен в виде, показанном на верхнем левом рисунке на рисунке 3. Основное состояние на этом рисунке показано явно, оно отделено от возбуждений щелью Δ_0 , однако разрыв куперовской пары требует энергии $2\Delta_0$, так как в основном состоянии могут быть только связанные пары. Если для рассматриваемой задачи не важен ток куперовских пар, а важен только ток квазичастичных возбуждений — а это как раз случай туннельного контакта с нормальным металлом, так как в нормальном металле нет куперовских пар — то можно изображать только спектр возбуждений. И здесь есть два варианта изображения: либо говорить на языке квазичастиц (рисунок сверху справа на рисунке 3), либо на языке «полупроводниковой модели» (нижние рисунки на рисунке 3). В первом случае при $T=0$ в сверхпроводнике нет квазичастиц, а во втором случае при $T=0$ заняты все состояния нижней зоны. Подчеркнём, что в обоих этих случаях основное состояние (обладающее свойством сверхпроводимости) оставлено за рамками схематического изображения. «Квазичастичное» и «полупроводниковое» представление в общем эквивалентны, просто в квазичастичной картине возбуждение это появление «частицы», «античастицы» или пары «частица-античастица», а в полупроводниковой это, соответственно, появление лишнего электрона в свободной зоне, появление вакансии в заполненной зоне, либо переход электрона из заполненной зоны в свободную.

Для изображения энергетической диаграммы туннельного контакта необходимо установить, где находится уровень химпотенциала в сверхпроводнике. Если исходить из представления о куперовских парах, образующих состояние с нулевой энергией, отделённое от возбуждённых состояний щелью Δ , то уровень химпотенциала будет совпадать с уровнем куперовских пар.³ В квазичастичной модели уровень химпотенциала равен нулю, как и должно быть для частиц число которых не зафиксировано, а подстраивается под условия равновесия.⁴ В полупроводниковой модели это приводит к тому, что аналогично случаю полупроводника положение уровня химического потенциала оказывается в центре «запрещённой зоны». Подчеркнём, что во всех случаях для физически наблюдаемых величин получим одинаковые результаты: термодинамика определяется расстоянием от уровня химпотенциала до энергии возбуждений, равным Δ_0 , а процессы с разрушением куперовских пар эквивалентны рождению пары частица-античастица или перебросу через запрещённую зону и требуют энергии $2\Delta_0$.

Дополнительно напомним, что плотность состояний имеет острый максимум при энергии возбуждения равной щели. Поэтому при рассмотрении туннельных явлений в сверхпроводниках будет оказываться важным случай, когда «дно» зоны возбуждений проходит через какие-то характерные энергии.

Рассмотрим теперь, что будет происходить при приложении к туннельному контакту разности потенциалов. Сначала рассмотрим этот случай в представлении энергетической диаграммы сверхпроводника с уровнем куперовских пар.

При приложении небольшого потенциала к туннельному переходу ток не возникнет.

3 Действительно, конденсат бозе-частиц возникает при обращении химпотенциала в ноль, следовательно, если есть куперовские пары, то химпотенциал равен нулю.

4 В системе с переменным числом частиц число частиц является одной из термодинамических переменных. Если число частиц подстраивается до достижения равновесия, то в условиях равновесия добавится, например, условие $\frac{\partial F}{\partial N} = 0$, что эквивалентно $\mu = 0$.

Действительно, для перехода электронов из нормального металла в сверхпроводник необходимо достаточно сильно понизить энергию электронов в сверхпроводнике с тем, чтобы уровень одноэлектронных возбуждений понизился до уровня Ферми металла. Пороговое напряжение, очевидно, равно $U = \Delta/e$. При обратной полярности напряжения куперовские пары не могут распространяться в металле, а для разрушения куперовской пары необходимо затратить энергию 2Δ . При разрушении куперовской пары образуется два электрона, одновременное туннелирование двух частиц маловероятно, поэтому один из электронов переходит на возбуждённый уровень, а один туннелирует в нормальный металл. В результате туннельный ток возникнет при том же по модулю напряжении $U = \Delta/e$ (рисунок 4). Таким образом, NS-переход оказывается *не омическим* контактом.

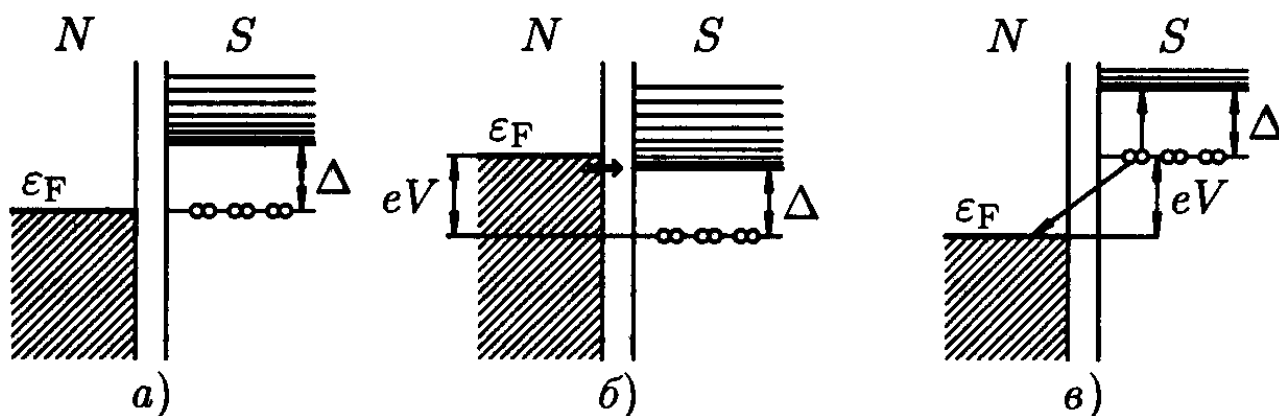


Рисунок 4: Энергетическая диаграмма туннельного NS-перехода. (а) в отсутствие внешнего потенциала, (б) возникновение туннельного тока электронов из металла в сверхпроводник при положительном потенциале сверхпроводника, (в) возникновение туннельного тока электронов из сверхпроводника в металл при отрицательном потенциале сверхпроводника. Из книги [1].

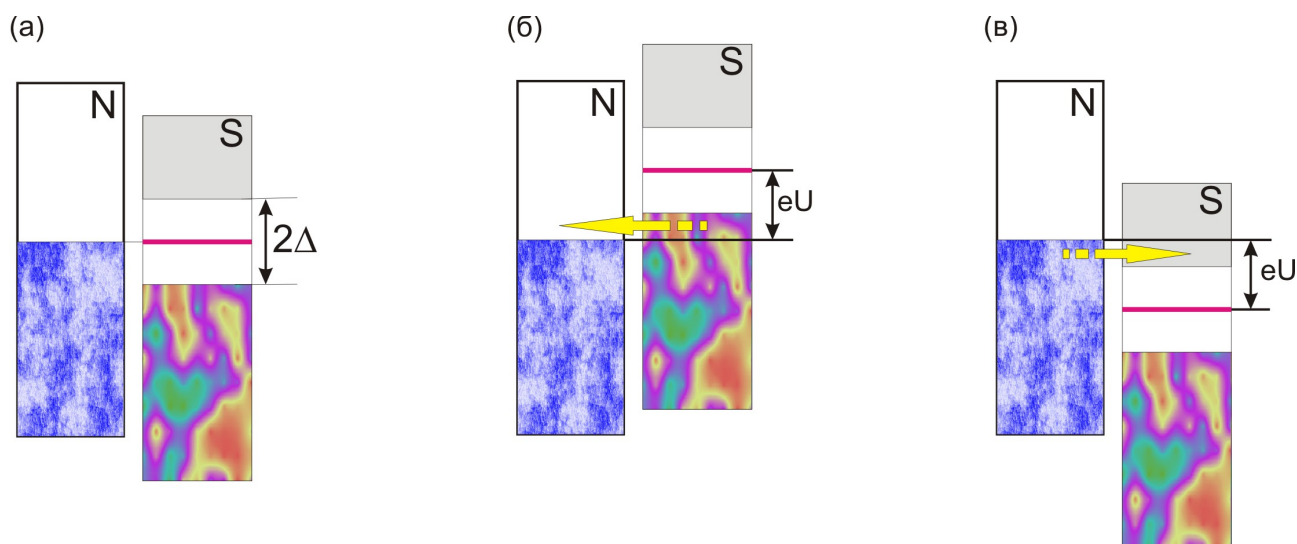


Рисунок 5: Энергетическая диаграмма туннельного NS-перехода в представлении квазичастиц и в «полупроводниковой модели»: (а) в отсутствие внешнего потенциала, (б) и (в) возникновение туннельного тока при превышении порогового значения для разных полярностей прикладываемого напряжения.

В квазичастичном представлении спектра возбуждений или в полупроводниковой модели при $|U| < \Delta/e$ также не будет тока⁵. Это наиболее наглядно в «полупроводниковой модели», где на обоих «берегах» туннельного контакта оказываются заняты все существующие состояния. В квазичастичной картине надо и спектр возбуждений металла представлять не в виде электронов, занимающих состояния под поверхностью Ферми, а в виде квазичастиц электронного или дырочного типа. Тогда по сохранению заряда при $T=0$ рождение «электронно-подобного» возбуждения в сверхпроводнике должно сопровождаться рождением возбуждения дырочного типа в металле, а рождение «дырочно-подобного» возбуждения в сверхпроводнике — рождением возбуждения электронного типа в металле. Туннельный ток возникнет либо если энергия возбуждений сверхпроводника опустится ниже уровня энергии Ферми в нормальном металле, либо, при обратной полярности, если «потолок» второй ветви возбуждений («потолок» заполненной зоны в «полупроводниковой модели») поднимется выше энергии Ферми нормального металла. Пороговое напряжение в обоих случаях равно тому же значению $U = \Delta/e$ (рисунок 5). Возникающий ток в «полупроводниковой модели» интерпретируется как ток электронов из нормального металла в свободную зону сверхпроводника либо как ток электронов из заполненной зоны в нормальный металл. На языке квазичастиц этот ток является рождением пар «электронно-подобное» возбуждение сверхпроводника-возбуждение дырочного типа в нормальном металле или «дырочно-подобное» возбуждение сверхпроводника — возбуждение электронного типа в нормальном металле.

Таким образом, «полупроводниковая модель» даёт наиболее наглядное представление о возникновении туннельного квазичастичного тока, однако необходимо иметь в виду что она подразумевает некоторые условности: в ней принципиально не указана основное состояние и представление о «заполненной зоне», по сути, есть способ визуализации «дырочно-подобных» возбуждений, говорить о том, что реальные электроны занимают эти состояния некорректно.

Схема вольт-амперной характеристики туннельного NS-перехода показана на рисунке 6. Туннельный ток при нулевой температуре равен нулю до порогового напряжения $U = \Delta/e$, затем нелинейно возрастает и при больших напряжениях выходит на омический режим.

5 Это также наглядно связано с написанной выше формулой для связи туннельного тока с плотностью состояний: при малом приложенном потенциале плотность состояний квазичастичных возбуждений в сверхпроводнике на уровне энергии Ферми равна нулю.

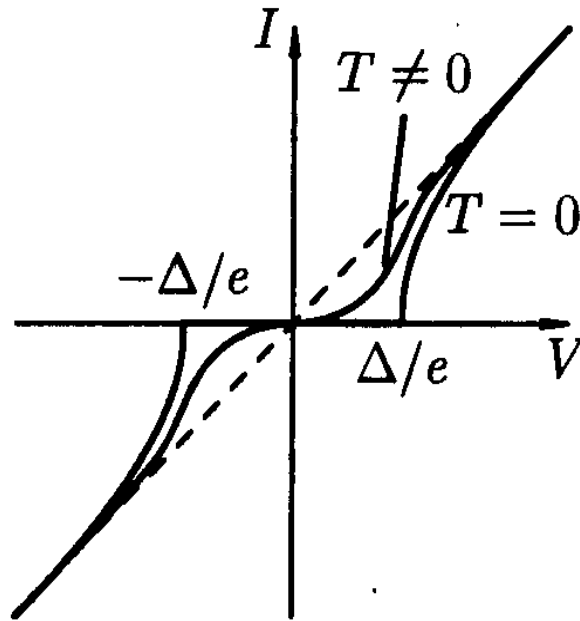


Рисунок 6 Схема вольт-амперной характеристики туннельного NS-перехода. Из книги [1].
 При конечной температуре за счёт конечной заселённости возбуждённых состояний резкие границы размываются. Туннельный ток возникает до достижения порогового напряжения либо за счёт наличия электронов над поверхностью Ферми в металле, либо за счёт термоактивированных возбуждений сверхпроводника.

Туннельный контакт сверхпроводник-сверхпроводник.

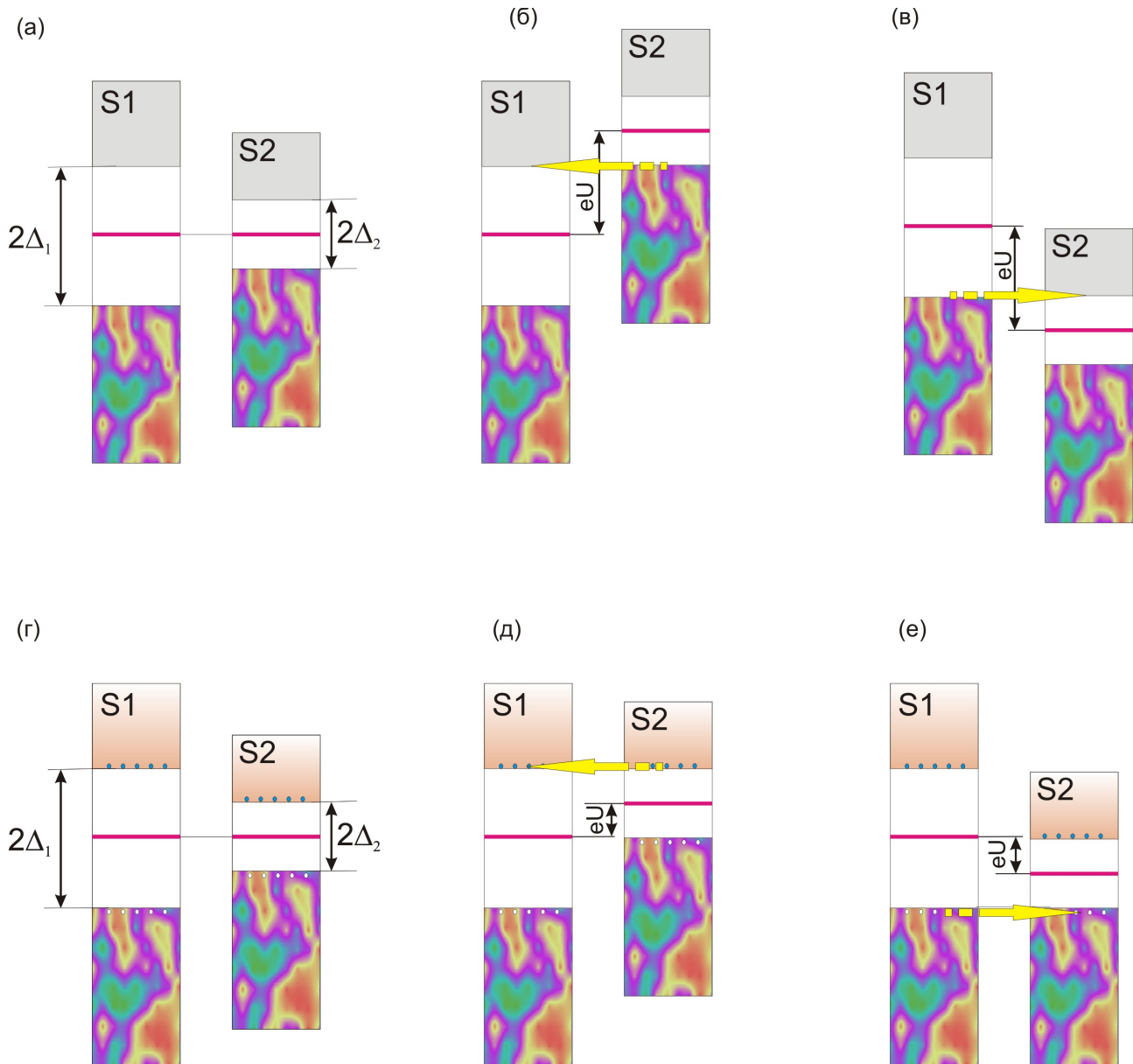


Рисунок 7 Энергетические диаграммы туннельного SIS-перехода в представлении «полупроводниковой модели». Верхний ряд: $T=0$. Нижний ряд: $T \neq 0$, закрашенными и белыми кружками схематически показаны термоактивированные возбуждения и вакансии, соответственно. Жёлтые стрелки показывают направление разрешенного (или преимущественного) перехода электронов.

Наконец, рассмотрим случай туннельного контакта двух сверхпроводников (SIS-переход). Сразу оговоримся, что пока мы рассматриваем квазичастичный ток через такой переход. Явления связанные с туннелированием куперовских пар (которые теперь могут существовать на обоих «берегах» перехода) мы рассмотрим позднее.

Пусть сверхпроводники разные, с различной величиной щели. Рассмотрим сначала случай нулевой температуры. В отсутствие внешнего потенциала установится равновесие, в котором выровняются уровни химпотенциала (опять оставляем «за кадром» возможное возникновение контактной разности потенциалов).

Мы проведём рассмотрение этого туннельного перехода только на языке

«полупроводниковой модели», обеспечивающей максимальную наглядность (рисунок 7). Рассмотрение на языке энергетических диаграмм с отображением основного состояния может быть найдено в [1].

В случае $T=0$ при малых напряжениях на переходе туннельного тока не будет: все разрешённые состояния на обоих «берегах» контакта заняты. Туннельный ток будет возникать только если «потолок» заполненной зоны одного из сверхпроводников будет поднят приложенным потенциалом до уровня «дна» свободной зоны другого сверхпроводника. Это определяет пороговую разность потенциалов $U = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{e}$.

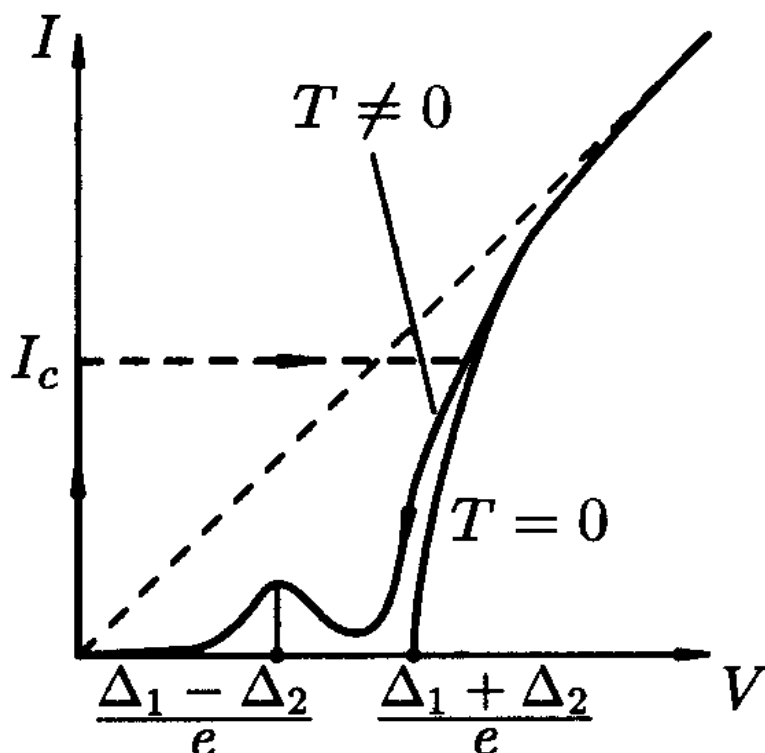


Рисунок 8 Схема вольт-амперной характеристики туннельного SIS-перехода при нулевой температуре и при конечной температуре. Сплошная линия: с учётом только тунnelирования электронов. Пунктирная «ступенька» - с учётом эффекта Джозефсона (тунnelирования куперовских пар). Из книги [1].

Случай $T \neq 0$ оказывается нетривиальным: помимо ожидаемого размывания порога из-за наличия термоактивированных «электронов» в свободной зоне и «дырок» в заполненной зоне появляется возможность возникновения тока при выравнивании уровней «дна» или «потолка» зон обоих сверхпроводников. Это приводит к появлению пика туннельного тока (наличие пика связано с острым экстремумом в плотности состояний на «дне» и «потолке» зоны) при разности потенциалов $U = \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{e}$. Здесь важно отметить, что туннельный ток

в этом режиме течёт между «одинаковыми» зонами. То есть, для возникновения такого тока необходимо, чтобы число одноэлектронных возбуждений данного типа в одном из сверхпроводников было бы больше, чем в другом: иначе встречные токи скомпенсируют друг друга. Это, однако, не является проблемой — так как концентрация термоактивированных возбуждений определяется шириной запрещенной зоны (и «статфактором» зоны), то при низких температурах в сверхпроводнике с меньшей щелью концентрация одноэлектронных возбуждений будет больше. Соответствующее направление преимущественного перехода

электронов показано на рисунке 7. Схема вольт-амперной характеристики туннельного SIS-перехода показана на рисунке 8.

Применение туннельного эффекта для изучения свойств сверхпроводников.

Как показал проделанный нами анализ, туннельный контакт с участием сверхпроводника оказывается неомическим, и напряжение, при котором возникает туннельный ток, связано с важной характеристикой сверхпроводника: его энергетической щелью. Поэтому измерение вольт-амперных характеристик туннельного перехода, в котором одним из контактов (хотя бы одним из контактов) является сверхпроводник является одним из способов измерения щели. Такое измерение можно проводить либо в специальном приборе типа схематически показанного на рисунке 1, либо в обычном туннельном микроскопе. При использовании туннельного микроскопа появляется также возможность изучать зависимость щели от положения точки измерения на поверхности образца: если сверхпроводящее состояние окажется неоднородным (например, в присутствии вихревой решётки) можно определить параметры такой неоднородности. Наконец, отметим, что такое независимое определение щели из транспортных измерений может быть сравнено с результатами высокочастотных измерений и с предсказаниями теории БКШ о связи щели с температурой перехода, что позволяет дополнительно проверить правильность наших представлений о природе сверхпроводимости.

Обратим внимание, что туннельный ток сверхпроводник-металл оказывается наглядным образом связан с плотностью состояний в сверхпроводнике. Рассмотрим ситуацию $T=0$ и, для определённости, полярности, соответствующей току электронов из металла в сверхпроводник. Пусть приложено напряжение U , тогда (смотри рисунки 4, 5) может туннелировать только часть электронов из металла с энергиями от $E_F - eU$ до E_F . Дополнительно учтём, что, так как щель $\Delta \ll E_F$, плотность состояний в металле в этом интервале можно считать постоянной. Туннельный ток определяется суммированием по всем

электронам, способным к туннелированию $I \propto \int_{E_F - eU}^{E_F} D(\epsilon) N_n(\epsilon) N_s(\epsilon + eU) d\epsilon$. Здесь

$D(\epsilon)$ — проницаемость барьера для электронов с энергией ϵ , $N_n(\epsilon)$ — плотность состояний в нормальном металле, $N_s(\epsilon + eU)$ — плотность состояний в сверхпроводнике на уровне сдвинутом на приложенную разность потенциалов. Заменим переменную $\epsilon = \epsilon' + eU$ и воспользуемся практически постоянством $N_n(\epsilon)$ и $D(\epsilon)$ в интересующем

нас интервале энергий. Тогда $I \propto N_n^{(0)} D(E_F) \int_{E_F}^{E_F + eU} N_s(\epsilon') d\epsilon'$. Дифференциальная

проводимость туннельного перехода тогда равна $\frac{dI}{dU} \propto N_n^{(0)} D(E_F) N_s(E_F + eU)$. То есть

дифференциальная проводимость пропорциональна плотности состояний в сверхпроводнике на уровне, отстоящем от уровня Ферми на величину приложенного напряжения. Дифференциальная проводимость может быть найдена либо дифференцированием вольт-амперной характеристики (тип представленной на рисунке 6), либо в некоторых постановках эксперимента⁶ является непосредственно измеряемой величиной.

Первые измерения туннельного эффекта в сверхпроводниках были выполнены И. Гьевеком⁷,

6 Например, при модуляции приложенного напряжения $U = U_0 + \delta U \cos \Omega t$ и детектировании переменной составляющей туннельного тока на частоте модуляции (смотри также сноску на странице 5)

7 Ivar Giaever

Нобелевским лауреатом 1973 года, в начале 60-х годов. Приведём ниже наглядные примеры кривых из его нобелевской лекции [6].

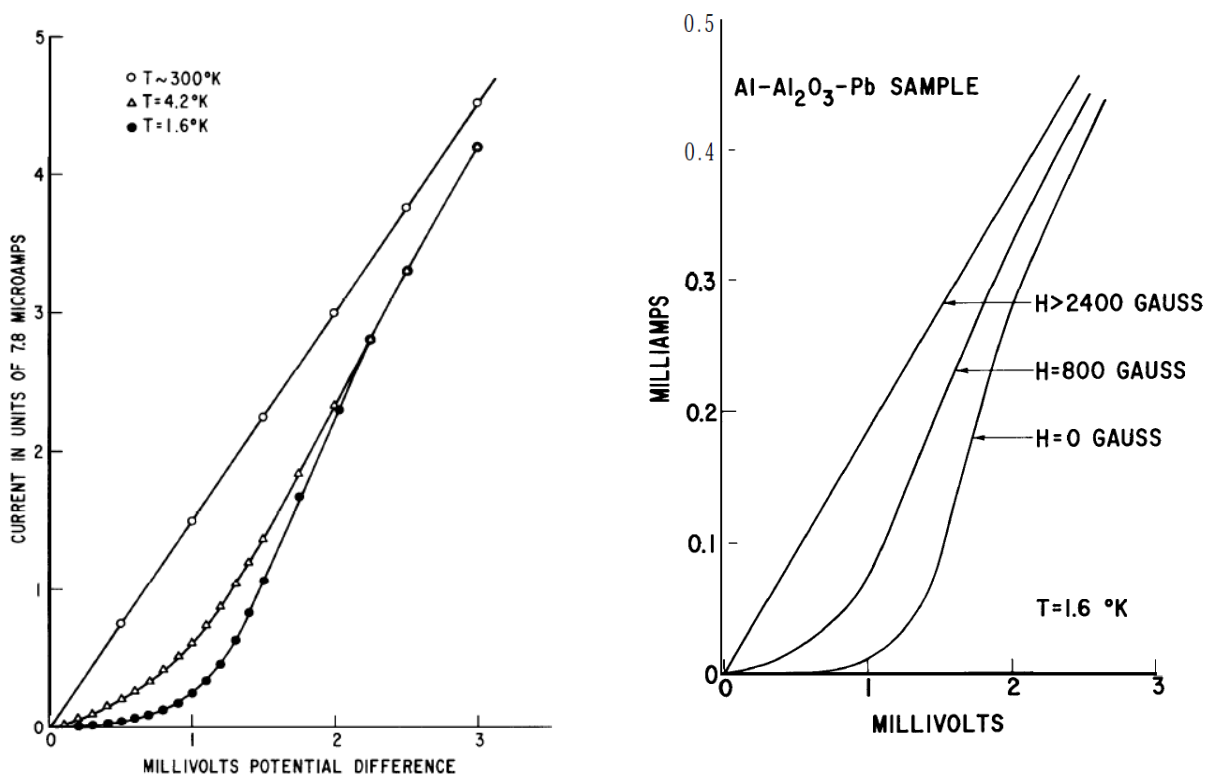
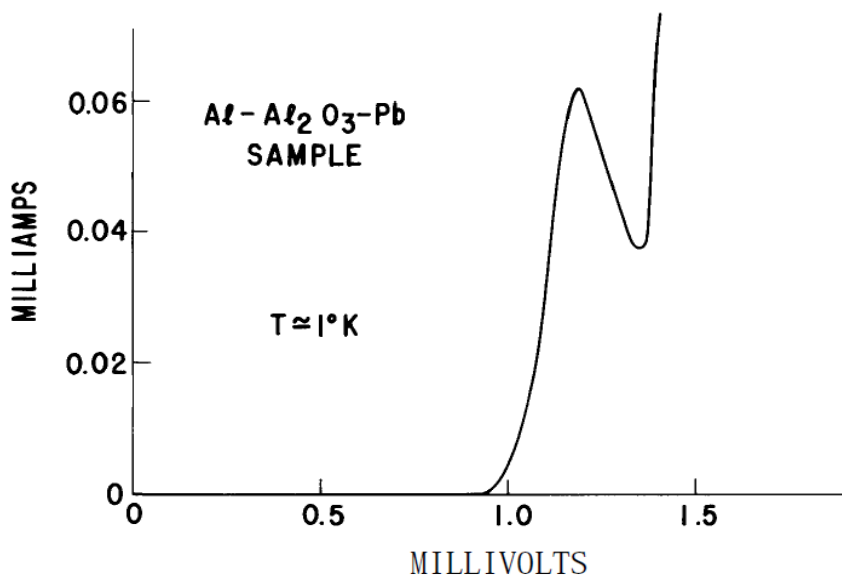


Рисунок 9 Кривые вольт-амперной характеристики туннельного $Al-Al_2O_3-Pb$. Температура сверхпроводящего перехода в свинце 7.2K , в алюминии 1.2K . Верхний ряд: алюминий в нормальном состоянии. Слева: при разных температурах. Справа: в разных магнитных



полям. Снизу: туннелирование в SIS-переходе при температуре ниже температуры сверхпроводящего перехода в алюминии, в масштабе рисунка виден только пик, связанный с переходами термоактивированных возбуждений. Из нобелевской лекции [6].

В современных исследованиях туннелирование из сверхпроводника используется как метод

характеризации свойств сверхпроводника. Часто для этого используется стандартный туннельный микроскоп. Приведём пример таких экспериментальных данных из статьи [7] и обзора [8]. В этих экспериментах использовалась модуляционная методика и измерялась сразу дифференциальная характеристика туннельного перехода $\frac{dI}{dU}$. Из построенных кривых вольт-амперной характеристики (рисунок 6) понятно, какой сигнал ожидается для SIN-перехода: при нулевой температуре будет нулевой сигнал пока напряжение на переходе меньше щели, затем будет наблюдаться максимум при напряжении, равном пороговому $U = \Delta/e$, а при больших напряжениях с приближением к омическому режиму $\frac{dI}{dU} = const$. Как мы показали выше, дифференциальная проводимость пропорциональна плотности состояний в сверхпроводнике. Именно такое поведение наблюдается на эксперименте (рисунок 10).

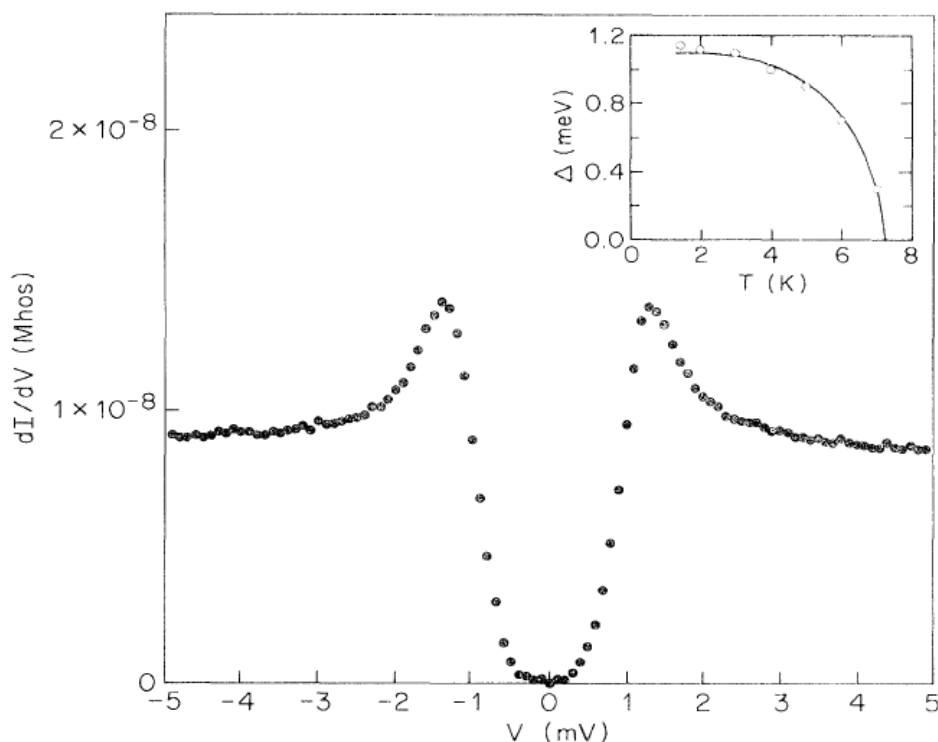


Рисунок 10 Производная вольт-амперной характеристики туннельного NS-перехода между иглой туннельного микроскопа и образцом сверхпроводящего $NbSe_2$. Внешнее магнитное поле $B=0$, температура 1.45K. На вставке: зависимость щели от температуры. Из статьи [7].

При помещении сверхпроводника II рода в магнитное поле выше первого критического в нём возникают абрикосовские вихри. В центре вихря сверхпроводимость подавлена, щель исчезает и, следовательно, туннельный ток может течь и при малых напряжениях на переходе. Действительно (рисунок 11), при приближении к центру вихря характерный провал на производных вольт-амперной характеристики пропадает.

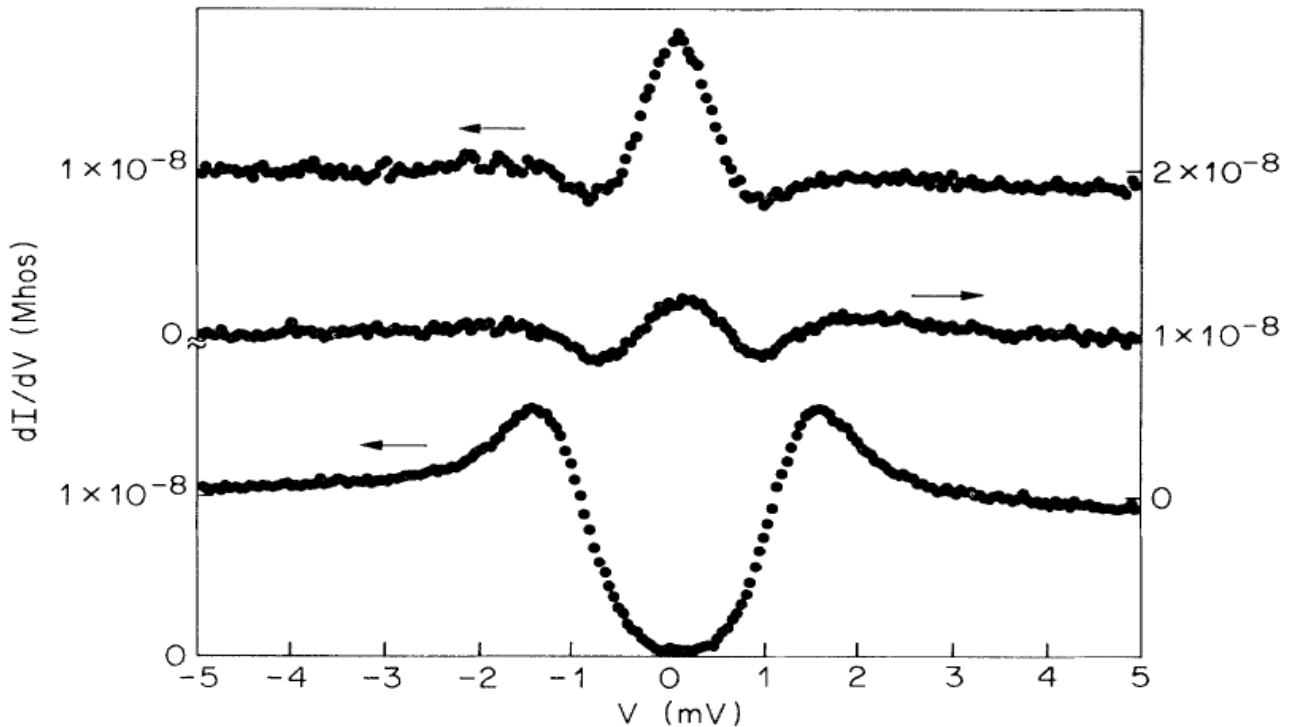


Рисунок 11 Производная вольт-амперной характеристики туннельного NS-перехода между иглой туннельного микроскопа и образцом сверхпроводящего $NbSe_2$ в разных точках. Верхняя кривая: центр вихря, средняя кривая: на расстоянии 75 \AA от центра вихря, нижняя кривая: на расстоянии 2000 \AA от вихря. Внешнее поле 0.02 Тл , температура 1.85 К . Кривые сдвинуты вертикально для наглядности, постоянный уровень на больших напряжениях одинаков для всех кривых. Особенности плотности состояний в сердцевине вихря вероятно связаны с тем, что движение электронов в коре вихря вообще говоря ограничено в поперечном направлении границей с нормальной фазой, что приводит к некоторым эффектам типа размерного квантования. Из статьи [7].

Возникновение туннельного тока при малых напряжениях на переходе при расположении иглы микроскопа над вихрем позволяет сканированием поверхности получить реальную карту расположения вихрей. Видно (рисунок 12), что формируется треугольная вихревая решётка. Измерения с большой разрешающей способностью в окрестности одного вихря (вставка на рисунке 12) позволяют обнаружить тонкую структуру сверхпроводящего состояния и непосредственно измерить длину когерентности.

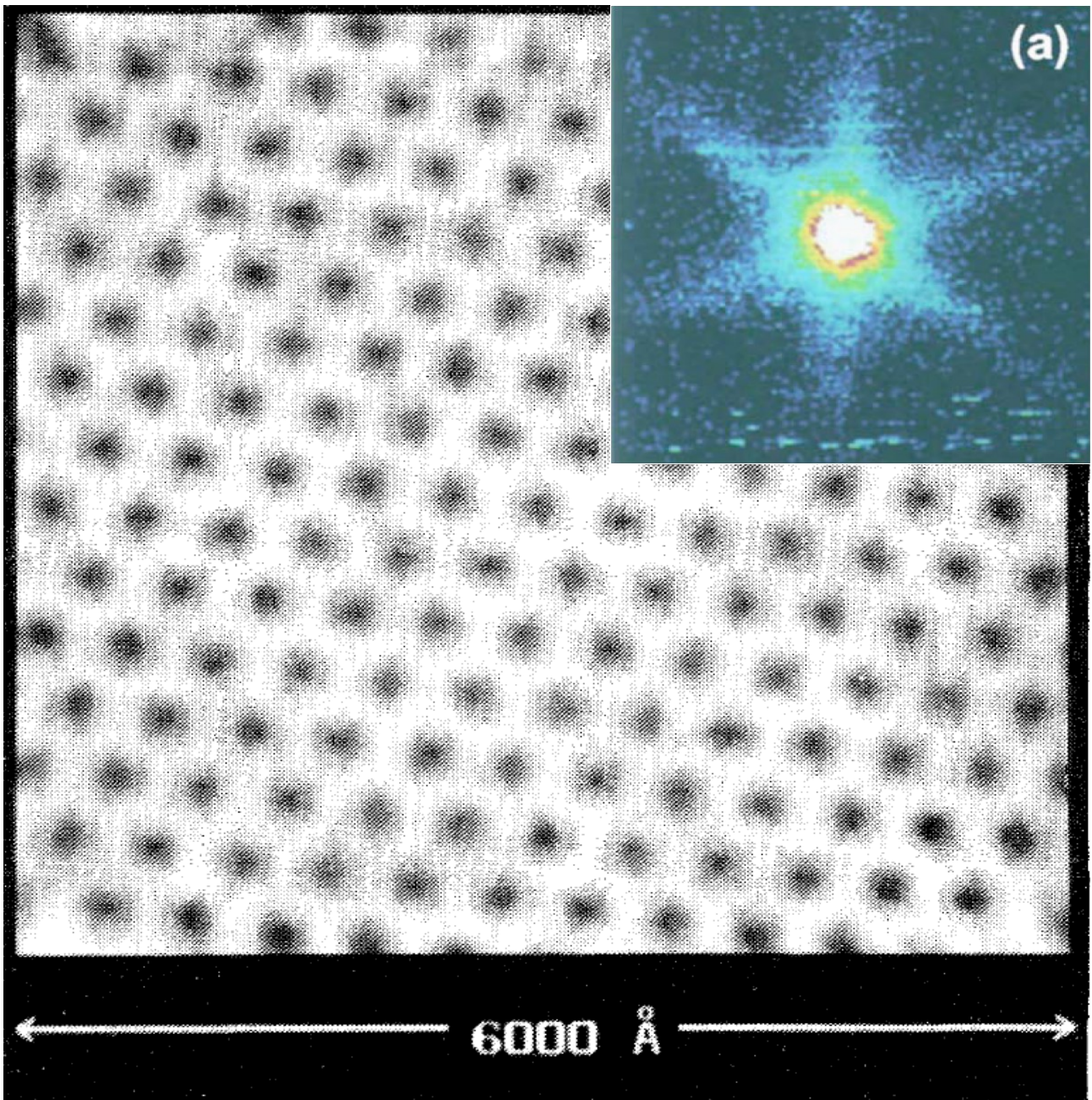
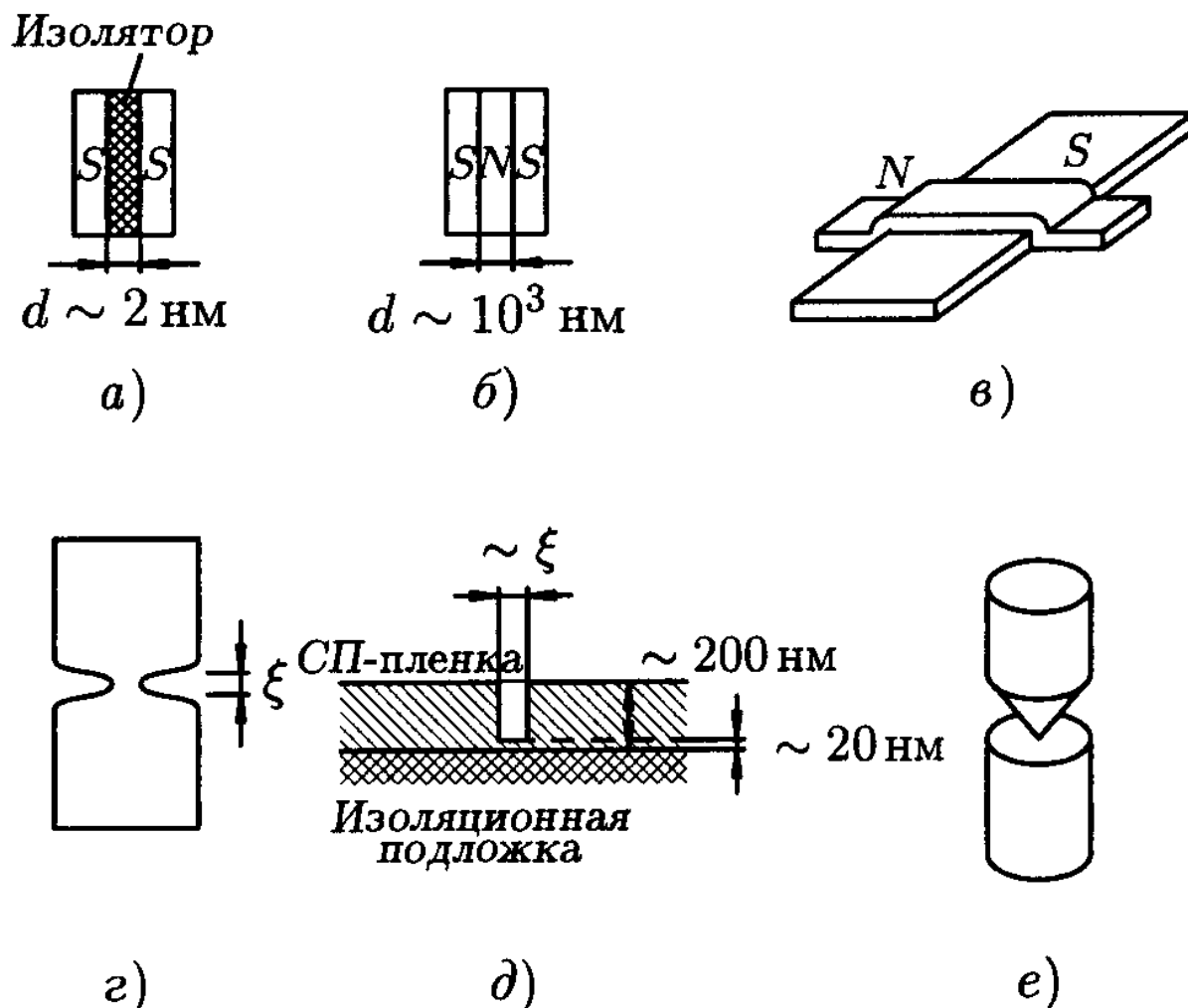


Рисунок 12 Основной рисунок: вихревая решётка в $NbSe_2$ в поле 1Тл при температуре 1.8К. Из статьи [7]. На цветной вставке: снятая с высоким разрешением карта проводимости в окрестности одного вихря в $NbSe_2$. Размер кадра 150×150 нм², внешнее поле 0.05Тл, температура 0.3К. Из обзора [8].

Эффект Джозефсона.

Туннелирование куперовских пар через «слабую связь».



исунок 13: Виды слабой связи: (а) туннельный SIS-переход, (б) "сэндвич" или SNS-переход, (в) нормальная плёнка на поверхности сверхпроводника, (г) мостик Дайема, вид в плане, (д) мостик Дайема, вид в разрезе, (е) точечный контакт. Из книги [1].

При рассмотрении туннелирования через изолирующую прослойку мы пренебрегали возможностью двухчастичного процесса туннелирования куперовской пары.

Рассмотрим опять контакт сверхпроводника и нормального металла. Электроны могут переходить между металлом и сверхпроводником⁸, куперовские пары могут свободно распространяться только в сверхпроводнике. С учётом квантовых эффектов мы, однако, должны учесть непрерывность и гладкость волновой функции куперовских пар вблизи границы, что приведёт к ожидаемому результату: концентрация куперовских пар в сверхпроводнике вблизи границы несколько уменьшится (сверхпроводимость подавится) и одновременно куперовские пары начнут проникать на расстояние порядка длины

⁸ В принципе, вопрос перехода электрона из металла в сверхпроводник оказывается содержащим нетривиальные особенности, связанные с так называемым *андреевским отражением*, но их рассмотрение выходит за рамки курса.

когерентности в нормальный металл (возникнет наведённая сверхпроводимость).⁹

Рассмотрим теперь ситуацию, когда два массивных сверхпроводника разделены прослойкой нормального металла либо другим образом созданной области с подавленной сверхпроводимостью. Такой областью может быть слой сверхпроводника с меньшей плотностью критического тока, механическое сужение, участок с каким-то легированием. Все эти ситуации называют *слабой связью*. Примеры различных структур со слабой связью показаны на рисунке 13.

Для дальнейших рассуждений конкретная структура слабой связи не существенна, поэтому для большей наглядности мы будем подразумевать структуру типа мостика Дайема: резкое локальное сужение сверхпроводника. При $T=0$ конденсат куперовских пар в сверхпроводнике описывается одной волновой функцией, амплитуда этой волновой функции (связанная с концентрацией сверхпроводящих электронов) одинакова по обе стороны от слабой связи, но без учёта туннелирования фазы могут быть произвольными. При учёте туннелирования, аналогично известной задаче о связанных квантовых ямах, новое основное состояние будет описываться единой волновой функцией, а фазы волновой функции на «берегах» получившейся структуры будут зафиксированы интерференцией волновых функций куперовских пар в туннельном промежутке. Наличие такой непрерывной по всей структуре волновой функции сверхпроводящих электронов означает, что при некоторых условиях (при не слишком больших плотностях тока) через всю структуру может течь бездиссипативный ток.

Стационарный эффект Джозефсона.

Протекание тока через структуру со слабой связью обладает рядом интересных особенностей. Впервые эти особенности были отмечены в теоретической работе Брайана Джозефсона¹⁰ в 1962 году и позднее обнаружены экспериментально. За это предсказание Джозефсон получил Нобелевскую премию 1973 года¹¹. Поэтому переходы со слабой связью часто называют джозефсоновскими контактами.

Пусть через структуру со слабой связью течёт слабый сверхпроводящий ток. Пренебрегая его собственным магнитным полем, мы можем сразу связать его с градиентом фазы волновой функции

$$\vec{j}_s = -nq\vec{v}_s \approx -\frac{nq\hbar}{m} \vec{\nabla} \Theta = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \frac{\Phi_0}{2\pi} \vec{\nabla} \Theta, \text{ где квант потока } \Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e} = 2.07 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$$

Характерным свойством слабой связи является то, что в основном фаза меняется именно внутри слабой связи: внутри массивного «берега» структуры со слабой связью нет оснований для больших значений плотности тока, а в сужении мостика Дайема плотность тока резко увеличивается. Пусть Θ_1 и Θ_2 - фазы волновой функции на «берегах» структуры, а $\phi = \Theta_2 - \Theta_1$ - скачок фазы на слабой связи.

⁹ Это явление называется *эффектом близости*.

¹⁰ Интересно и поучительно, что этот результат Джозефсон получил будучи аспирантом. При этом в ходе обсуждения своих результатов Джозефсону приходилось спорить с Бардиным, на тот момент уже единожды нобелевским лауреатом (Джон Бардин является уникальным дважды лауреатом Нобелевской премии по физике: 1956, за создание транзистора; 1972, за теорию БКШ). И аспирант в этом споре оказался прав.

¹¹ Джозефсон получил 1/2 премии «за теоретическое предсказание туннельных эффектов, известных как эффекты Джозефсона», вторую половину разделили Л. Есаки и И. Гьевер «за экспериментальное обнаружение туннельных эффектов в полупроводниках и сверхпроводниках». Исследования Есаки привели к созданию туннельного диода, исследования Гьевера связаны с туннелированием в NS-контактах.

¹² Эта связь обсуждалась при квантовом обобщении уравнений Лондонов на прошлой лекции.

Сформулируем некоторые общие свойства этого скачка фаз:

1. Скачок фазы является единственным параметром определяющим сверхтекучий ток через переход $I_s = I_s(\phi)$. Действительно, одновременное добавление ко всем фазам (и на «берегах» и на слабой связи) одной и той же константы не может изменить никакие физические явления.
2. При нулевом сверхпроводящем токе $\phi = 0$, $I_s(0) = 0$. Это утверждение прямо следует из связи плотности тока с градиентом фазы.
3. Изменение фазы на любом из «берегов» на 2π не меняет состояния берега и, следовательно, не меняет ток в структуре: сверхтекучий ток через слабую связь периодичен по скачку фазы, $I_s(\phi) = I_s(\phi + 2\pi)$.
4. Изменение знака фазы в структуре меняет знак скачка фазы и знак тока: сверхтекучий ток через слабую связь является нечётной функцией фазы, $I_s(\phi) = -I_s(-\phi)$.

Конкретный вид токо-фазного соотношения может несколько изменяться в зависимости от устройства слабой связи, но всегда отвечает указанным соотношениям.

Рассмотрим простейшую модель, в которой поведение куперовских пар в системе со слабой связью рассматривается как поведение частицы в двухуровневой системе¹³. Если через слабую связь течёт сверхтекучий ток, то падение напряжения на переходе нулевое. Будем считать, что оба «берега» структуры сделаны из одного материала. Тогда волновая функция куперовской пары на «берегах» может быть представлена в виде $\Psi_{1,2} = \sqrt{n_s} e^{i\Theta_{1,2}}$. Наличие слабой связи предоставляет возможность перехода куперовской пары между «берегами». Его можно описать при помощи некоторого оператора перехода \hat{T} , для которого по определению $\hat{T}\Psi_1 = \hbar T \Psi_2$, $\hat{T}\Psi_2 = \hbar T \Psi_1$. Здесь имеющий размерность частоты матричный элемент T определяется свойствами слабой связи и имеет смысл частоты туннельных переходов куперовских пар между «берегами».

Рассмотрим переходы куперовских пар между берегами как поправку к основному гамильтониану $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$. Выбирая ноль отсчёта энергии на уровне куперовской пары получим, что в невозмущённой задаче $i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = \hat{H}_0 \Psi = E \Psi = 0$, то есть при таком выборе отсчёта энергии вся зависимость волновой функции от времени будет связана только с такими переходами. С учётом переходов получаем уравнения (это точный результат, а не теория возмущений)

$$i\hbar \frac{d\Psi_1}{dt} = \hat{T}\Psi_1 = \hbar T \Psi_2$$

$$i\hbar \frac{d\Psi_2}{dt} = \hat{T}\Psi_2 = \hbar T \Psi_1$$

От времени могут зависеть и концентрации сверхпроводящих электронов, и фазы, поэтому

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{dn}{dt} e^{i\Theta} + i \frac{d\Theta}{dt} \sqrt{n} e^{i\Theta}$$

Тогда система уравнений превращается в

¹³ Эта модель была предложена Р. Фейнманом.

$$i \frac{1}{2} \frac{d n_1}{d t} e^{i \Theta_1} - n_1 \frac{d \Theta_1}{d t} e^{i \Theta_1} = T \sqrt{n_1 n_2} e^{i \Theta_2}$$

$$i \frac{1}{2} \frac{d n_2}{d t} e^{i \Theta_2} - n_2 \frac{d \Theta_2}{d t} e^{i \Theta_2} = T \sqrt{n_1 n_2} e^{i \Theta_1}$$

или, вводя в уравнения скачок фазы $\phi = \Theta_2 - \Theta_1$,

$$i \frac{1}{2} \frac{d n_1}{d t} - n_1 \frac{d \Theta_1}{d t} = T \sqrt{n_1 n_2} e^{i \phi}$$

$$i \frac{1}{2} \frac{d n_2}{d t} - n_2 \frac{d \Theta_2}{d t} = T \sqrt{n_1 n_2} e^{-i \phi}$$

Отсюда, сравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$n_1 \frac{d \Theta_1}{d t} = n_2 \frac{d \Theta_2}{d t} = -T \sqrt{n_1 n_2} \cos \phi$$

$$\frac{d n_1}{d t} = -\frac{d n_2}{d t} = 2T \sqrt{n_1 n_2} \sin \phi$$

Второе равенство имеет простой смысл сохранения заряда. Из первого для «берегов» из одного материала, включенных в замкнутую цепь ($n_1 = n_2 = \text{const}$) следует

$$\frac{d \phi}{d t} = \frac{d}{d t} (\Theta_2 - \Theta_1) = 0, \text{ то есть } \phi = \text{const}.$$

Сверхтекучий ток в момент включения будет очевидно пропорционален скорости изменения концентрации $\frac{d n}{d t}$, в установившемся режиме это изменение концентрации будет компенсироваться источником тока. Объединяя все неизвестные константы в одну, получаем тогда для сверхтекучего тока через слабую связь

$$I_s = I_0 \sin \phi$$

Здесь I_0 - максимальный (критический) ток перехода, ϕ — задаваемая внешними условиями фаза. Это уравнение описывает *стационарный эффект Джозефсона*. Отметим, что такая токо-фазовая зависимость соответствует сформулированным общим требованиям.

Величина критического тока определяется свойствами перехода. Подробный анализ выходит за рамки нашего курса, приведём для сведения ответ для симметричной ($\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$) SIS-структуры при $T=0$ [1] $I_0 = \frac{\pi \Delta}{2 e R}$, где Δ — щель в спектре, а R — сопротивление перехода в нормальном состоянии.

Отметим также, что с учётом джозефсоновского туннелирования необходимо пересмотреть вольт-амперную характеристику SIS-перехода (рисунок 8). При токе меньше критического через переход течёт сверхтекучий ток, при достижении критического тока возникает некоторая разность потенциалов.

При этом оказывается, что поведение реального джозефсоновского контакта вблизи критического тока становится гистерезисным: при увеличении тока из нуля вольт-амперная характеристика движется по «джозефсоновской» ветви, напряжение на переходе равно нулю до достижения критического тока, а на обратном ходе возвращается по «квазичастичной» ветви (пример реальной осциллограммы джозефсоновского контакта показан на рисунке 14 [9]), так как при выведении тока из «резистивного» режима на переходе поддерживается

разность потенциалов.¹⁴

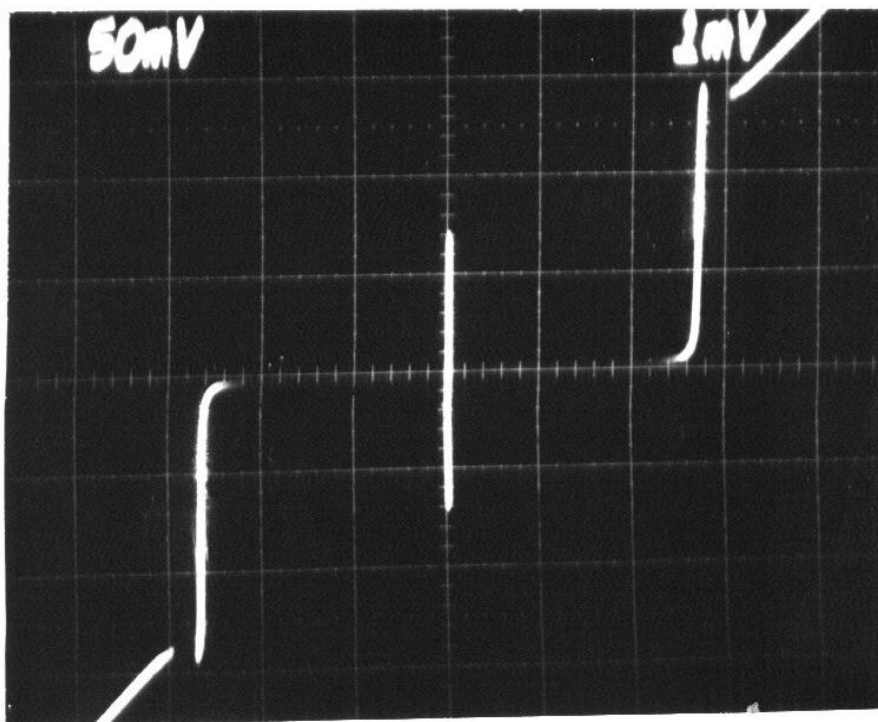


Рисунок 14: Осциллограмма вольт-амперной характеристики джозефсоновского контакта. Шкала по горизонтали 1 мВ, по вертикали 50 мкА. С сайта [9].

Дополнительно необходимо иметь в виду, что при работе с джозефсоновскими переходами возможны две постановки эксперимента (реального или мысленного) по измерению вольт-амперной характеристики: режим фиксированного тока, когда источник тока задаёт ток через переход, а измеряемой величиной является падение напряжения на переходе, и режим фиксированного напряжения, когда внешние условия задают разность напряжений на переходе, а ток измеряется.

Также важно обратить внимание, что туннелирование куперовских пар оказывается весьма вероятным процессом, хотя в нём и участвуют две частицы. Однако утверждение о том, что вероятность парного процесса равна квадрату вероятности одночастичного процесса, верно только для нескоррелированных процессов. Для коррелированного процесса туннелирования куперовской пары эти вероятности оказываются одного порядка. При этом джозефсоновский ток оказывается более чувствителен к сопротивлению контакта, чем нормальный квазичастичный ток: на опыте для наблюдения эффекта Джозефсона нужны контакты с сопротивлением меньше $0.1 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2$ (достижимы значения до $10^{-4} \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2$ и даже ниже) [10]. Это связано с тем, что с ростом сопротивления контакта растут тепловые флуктуации напряжения на контакте, а для протекания джозефсоновского тока необходимо, чтобы напряжение было нулевым. Поэтому соотношение между джозефсоновским и квазичастичным током оказывается функцией формы контакта и может быть любым.

¹⁴ Подробности могут быть найдены в [1] (§22).

Нестационарный эффект Джозефсона. Резистивная модель джозефсоновского перехода.

При токе больше критического на переходе возникает некоторая разность потенциалов (сверхпроводимость в слабой связи разрушается). Пусть мы создали такие условия, что на переходе есть некоторая разность потенциалов U . Так как мы планируем рассмотреть туннелирование куперовских пар, необходимо учесть изменение энергии куперовской пары при прохождении под барьером. Оно равно $2eU$. Удобно считать, что энергия куперовских пар на одном «берегу» повысилась на $+eU$, а на другом - уменьшилась на $-eU$.

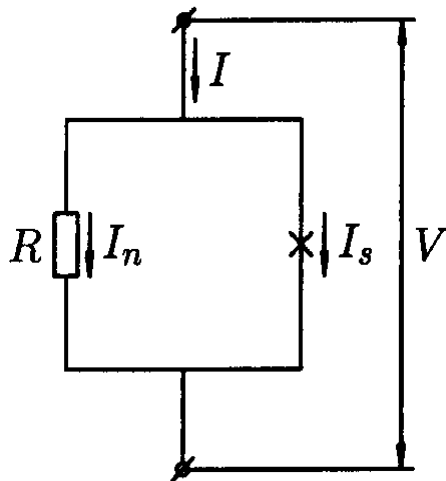
Отметим сразу, что теперь простое туннелирование куперовской пары оказывается запрещено законом сохранения энергии — при переходе через туннельный переход куперовская пара должна как-то излучить избыток энергии $2eU$ — как мы увидим далее, это происходит в виде генерации переменного электромагнитного поля, т. е. излучения фотонов $\hbar\omega = 2eU$.

Учитывая эффекты переходов между берегами и приложенного напряжения получаем аналогично предыдущему случаю:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\Psi_1}{dt} &= \hbar T \Psi_2 + eU \Psi_1 \\ i\hbar \frac{d\Psi_2}{dt} &= \hbar T \Psi_1 - eU \Psi_2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} i\frac{1}{2} \frac{dn_1}{dt} - n_1 \frac{d\Theta_1}{dt} &= T \sqrt{n_1 n_2} e^{i\phi} + n_1 \frac{eU}{\hbar} \\ i\frac{1}{2} \frac{dn_2}{dt} - n_2 \frac{d\Theta_2}{dt} &= T \sqrt{n_1 n_2} e^{-i\phi} - n_2 \frac{eU}{\hbar} \end{aligned}$$



Беря действительную часть и вычитая одно уравнение из другого, в приближении $n_1 \approx n_2$ получаем:

$$\frac{d\phi}{dt} = 2 \frac{eU}{\hbar}$$

Это соотношение называется вторым соотношением Джозефсона. Оно имеет явный смысл для режима заданного напряжения: скачок фазы начинает зависеть от времени линейно. В режиме заданного тока оно имеет смысл «мгновенной фотографии», напряжение $U(t)$ в правой части тогда может являться функцией времени.

Рисунок 15 Резистивная модель джозефсоновского перехода. По резистивному плечу течёт нормальный ток, по плечу с переходом — сверхтекучий ток. Из книги [1].

Наличие на переходе напряжения означает, что помимо сверхтекучего тока возникнет ток нормальной компоненты: помимо тока куперовских пар есть и ток одиночных электронов. Это позволяет

схематически представить джозефсоновский переход в виде упрощённой схемы, называемой резистивной моделью (рисунок 15). Если R — это сопротивление участка в нормальном состоянии, то, комбинируя не изменившееся выражение для сверхтекучего тока

$$I_s \propto \frac{dn}{dt} \propto \sin \phi \quad \text{и закон Ома} \quad I_n = U/R = \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\phi}{dt}, \quad \text{получаем для полного тока}$$

$$I = I_0 \sin \phi + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\phi}{dt}.$$

В режиме заданного внешнего тока это уравнение на фазу интегрируется [1] и даёт для наблюдаемого напряжения на переходе $U = R \frac{I^2 - I_c^2}{I + I_c \cos \omega t}$, где $\omega = \frac{2eR}{\hbar} \sqrt{I^2 - I_c^2}$ (конечно же $I > I_c$).¹⁵

Таким образом, при превышении критического тока напряжение на джозефсоновском переходе начинает осциллировать на некоторой частоте! Этот эффект называют *нестационарным эффектом Джозефсона*. При больших токах (в режиме заданного тока)

15 Решение ищется с использованием тригонометрического тождества $\sin \phi = \frac{2 \operatorname{tg} \phi/2}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi/2}$:

$$\frac{\hbar}{2eR} \frac{d\phi}{dt} = I - I_c \sin \phi$$

$$\frac{d\phi}{I - I_c \sin \phi} = \frac{2eR}{\hbar} dt$$

$$\frac{2eR}{\hbar} dt = \frac{d\phi}{I - I_c \frac{2 \operatorname{tg} \phi/2}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi/2}} = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \phi/2) d\phi}{I + I \operatorname{tg}^2 \phi/2 - 2I_c \operatorname{tg} \phi/2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \phi/2} d\phi}{I \left[\left(\operatorname{tg} \phi/2 - i_c \right)^2 + 1 - i_c^2 \right]}$$

$$= \frac{2d \left(\frac{\operatorname{tg} \phi/2 - i_c}{\sqrt{1 - i_c^2}} \right)}{I \sqrt{1 - i_c^2} \left[\left(\frac{\operatorname{tg} \phi/2 - i_c}{\sqrt{1 - i_c^2}} \right)^2 + 1 \right]} = \frac{2}{I \sqrt{1 - i_c^2}} d \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \phi/2 - i_c}{\sqrt{1 - i_c^2}} \right) \right]$$

здесь $i_c = \frac{I_c}{I} < 1$.

Интегрируем, полагая для удобства постоянную интегрирования (начало отсчёта времени) нулевой, вводим

частоту $\omega = \frac{2eR}{\hbar} \sqrt{I^2 - I_c^2} = \frac{2eR}{\hbar} I \sqrt{1 - i_c^2}$ для компактности: $\omega t = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \phi/2 - i_c}{\sqrt{1 - i_c^2}} \right)$, откуда

$$\phi(t) = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{I_c}{I} + \frac{\sqrt{I^2 - I_c^2}}{I} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega t}{2} \right) \right].$$

Далее, для интересующего нас напряжения

$$V = \frac{\hbar}{2e} \phi' = \frac{\hbar}{2e} \frac{2}{1 + \left[\frac{I_c}{I} + \frac{\sqrt{I^2 - I_c^2}}{I} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega t}{2} \right) \right]^2} \frac{\sqrt{I^2 - I_c^2}}{I} \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right)} \frac{\omega}{2},$$

с учётом определения ω , раскрывая квадрат в знаменателе и пользуясь формулами двойных углов и основным тригонометрическим тождеством:

$\omega \approx \frac{2eU}{\hbar}$. Частота осцилляций оказывается в радиочастотной области: для напряжения 1 мкВ она равна 483.6 МГц. Измерение частоты таких осцилляций позволяет экспериментально определить отношение $\frac{e}{\hbar}$. Эти осцилляции можно также интерпретировать как испускание фотона с энергией $2eU$ при переходе куперовской пары через барьер. Усреднённое по времени напряжение на переходе $2eU = \hbar\omega$. Так как частота является одной из наиболее точно измеримых физических величин, нестационарный эффект Джозефсона может использоваться в качестве стандарта напряжения.

В другой постановке эксперимента: при постоянном напряжении на переходе, получим осцилляции сверхтекучего тока $I_s = I_0 \sin\left(\phi_0 + \frac{2eU}{\hbar}t\right)$, а полный ток будет равен $I = U/R + I_s(t)$.

$$V = \frac{R(I^2 - I_c^2)}{I \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \frac{I_c^2}{I} \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \frac{I_c \sqrt{I^2 - I_c^2}}{I} \sin \omega t + \frac{I^2 - I_c^2}{I} \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)} =$$

$$= \frac{R(I^2 - I_c^2)}{I + \frac{I_c^2}{I} \cos \omega t + \frac{I_c \sqrt{I^2 - I_c^2}}{I} \sin \omega t}$$

с использованием формулы для синуса суммы это преобразуется в компактный вид

$$V = \frac{R(I^2 - I_c^2)}{I + I_c \sin(\omega t + \xi)}$$

, фаза ξ зависит от токов, но постоянна в условиях этого опыта и опять равносильна выбору момента нуля отсчёта времени.

Это приводит к принятому в [1] ответу: $V(t) = R \frac{I^2 - I_c^2}{I + I_c \cos \omega t}$, где $\omega = \frac{2e}{\hbar} R \sqrt{I^2 - I_c^2}$, $I > I_c$.

Джозефсоновский переход в магнитном поле.[†]

Рассмотрим джозефсоновский переход в сильном магнитном поле. Для определённости будем рассматривать SIS-структуру (рисунок 16). Магнитное поле может проникать в диэлектрическую прослойку и, на глубину проникновения, в сверхпроводящие «берега» структуры. Пусть d – характерная толщина области, в которой есть магнитное поле. Будем считать поле настолько сильным, что поток через переход содержит очень большое число квантов потока и поле в переходе можно считать однородным.

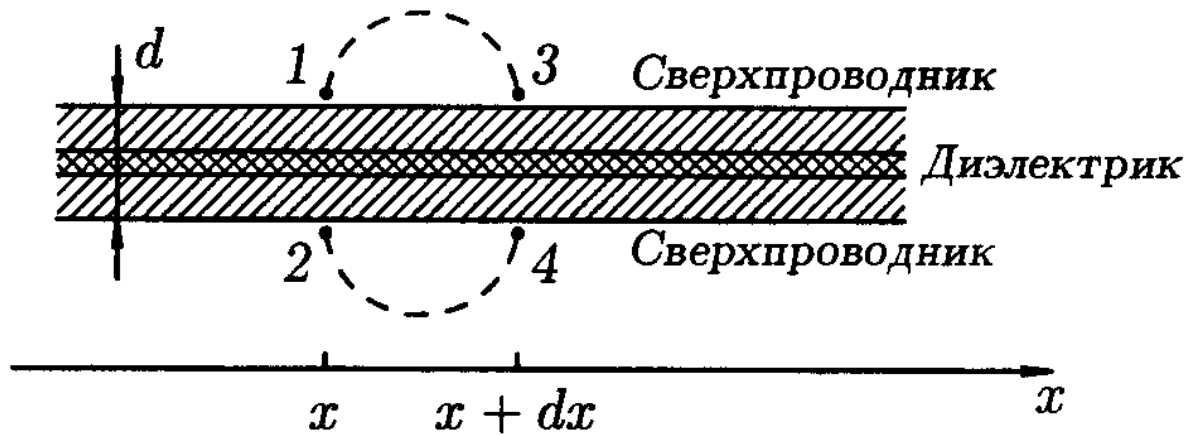


Рисунок 16: SIS-структура в магнитном поле. Штриховой показана область проникновения магнитного поля. Из книги 16.

Рассмотрим две пары точек $\{1, 3\}$ и $\{2, 4\}$ на разных «берегах» перехода в области, где нет магнитного поля. Вспоминаем опять квантовое обобщение уравнения Лондонов:

$$\hbar \vec{\nabla} \Theta = 2m \vec{v}_s - \frac{2e}{c} \vec{A}, \text{ где } 2m \text{ и } 2e - \text{ масса и заряд куперовской пары. Далеко от}$$

границы сверхпроводящего тока нет, и при интегрировании по пунктирным траекториям

$$\hbar \int_1^3 \vec{\nabla} \Theta d\vec{l} = -\frac{2e}{c} \int_1^3 \vec{A} d\vec{l} \text{ и } \hbar \int_2^4 \vec{\nabla} \Theta d\vec{l} = -\frac{2e}{c} \int_2^4 \vec{A} d\vec{l}. \text{ Замкнём контур } 1-3-2-4, \text{ считая}$$

поперечный размер d малым по сравнению с продольным δx . Тогда $\oint \vec{A} d\vec{l} = \int \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \Phi$ (магнитный поток через контур), а

$$\oint \vec{\nabla} \Theta d\vec{l} = (\Theta_3 - \Theta_1) + (\Theta_2 - \Theta_4) = \phi_{3-4} - \phi_{1-2} = \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \delta x. \text{ Объединяя все уравнения получаем}$$

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right) \delta x = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \text{ где квант потока } \Phi_0 = \frac{\pi \hbar c}{e}.$$

Таким образом, в присутствии магнитного поля скачок фазы на джозефсоновском переходе зависит от координаты вдоль перехода. Отметим, что это уравнение в принципе никак пока не использовало однородность поля и позволяет описать проникновение магнитного поля в джозефсоновский переход в любом поле.

Воспользуемся теперь представлением об однородности поля в зазоре в сильных полях. Тогда поток через выбранный контур $\Phi = H d \delta x$ и уравнение на скачок фазы принимает вид

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right) = \frac{2\pi H d}{\Phi_0}. \text{ То есть, скачок фазы на джозефсоновском контакте в сильном поле}$$

линейно зависит от координаты вдоль перехода $\phi(x) = \phi_0 + \frac{2\pi d H}{\Phi_0} x$.

Используя соотношение для стационарного эффекта Джозефсона получаем, что плотность сверхпроводящего тока (на единицу длины по нашему рисунку) $j_s = j_0 \sin \phi$ осциллирует вдоль перехода. Полный ток через переход находится интегрированием

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} j_0 \sin \left(\phi_0 + \frac{2\pi d H}{\Phi_0} x \right) dx = -j_0 \frac{\Phi_0}{2\pi d H} \left[\cos \left(\phi_0 + \frac{\pi d H L}{\Phi_0} \right) - \cos \left(\phi_0 - \frac{\pi d H L}{\Phi_0} \right) \right] =$$

$$= j_0 \frac{\Phi_0}{\pi d H} \sin \phi_0 \sin \frac{\pi d L H}{\Phi_0}$$

где L — дна перехода.

Заметим, что $\Phi = d L H$ - это полный поток через переход, определим максимальный сверхпроводящий ток через переход $I_0 = L j_0$. Тогда $I = I_0 \sin \phi_0 \frac{\sin(\pi \Phi / \Phi_0)}{\pi \Phi / \Phi_0}$.

Максимальный сверхпроводящий ток через переход достигается подбором фазы ϕ_0 и равен $I_{max} = I_0 \frac{|\sin(\pi \Phi / \Phi_0)|}{\pi \Phi / \Phi_0}$. Этот ток очень сильно зависит от магнитного потока¹⁶ через переход (см. рисунок 17), что указывает на возможность использования джозефсоновского перехода для чувствительных измерений магнитного поля.

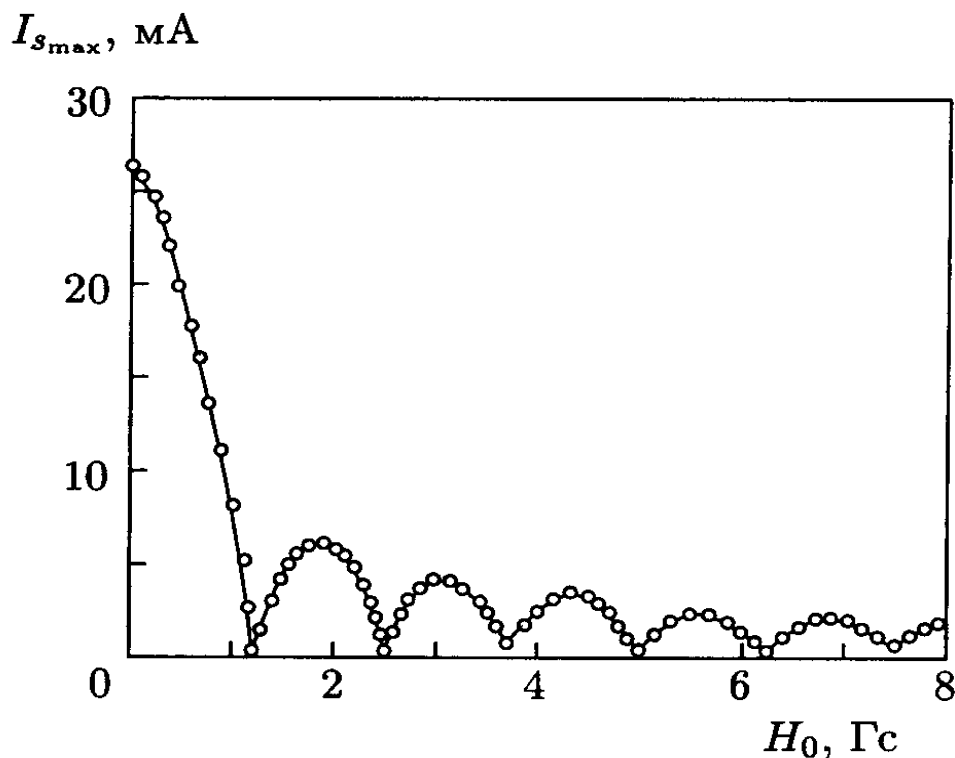


Рисунок 17 Результаты экспериментального исследования зависимости сверхпроводящего тока через джозефсоновский переход от магнитного поля. Из книги [1].

¹⁶ Зависимость похожа по виду на интенсивность фраунгоферовой дифракции.

Сверхпроводящий квантовый интерферометр (СКВИД).

С зависимостью тока через джозефсоновский переход от магнитного поля связан принцип работы широко применяемого в лабораторных и иногда промышленных исследованиях прибора: сверхпроводящего квантового интерферометра или СКВИДа¹⁷. Мы рассмотрим принцип работы двухконтактного или ПТ-СКВИДа (постоянноточного СКВИДа).

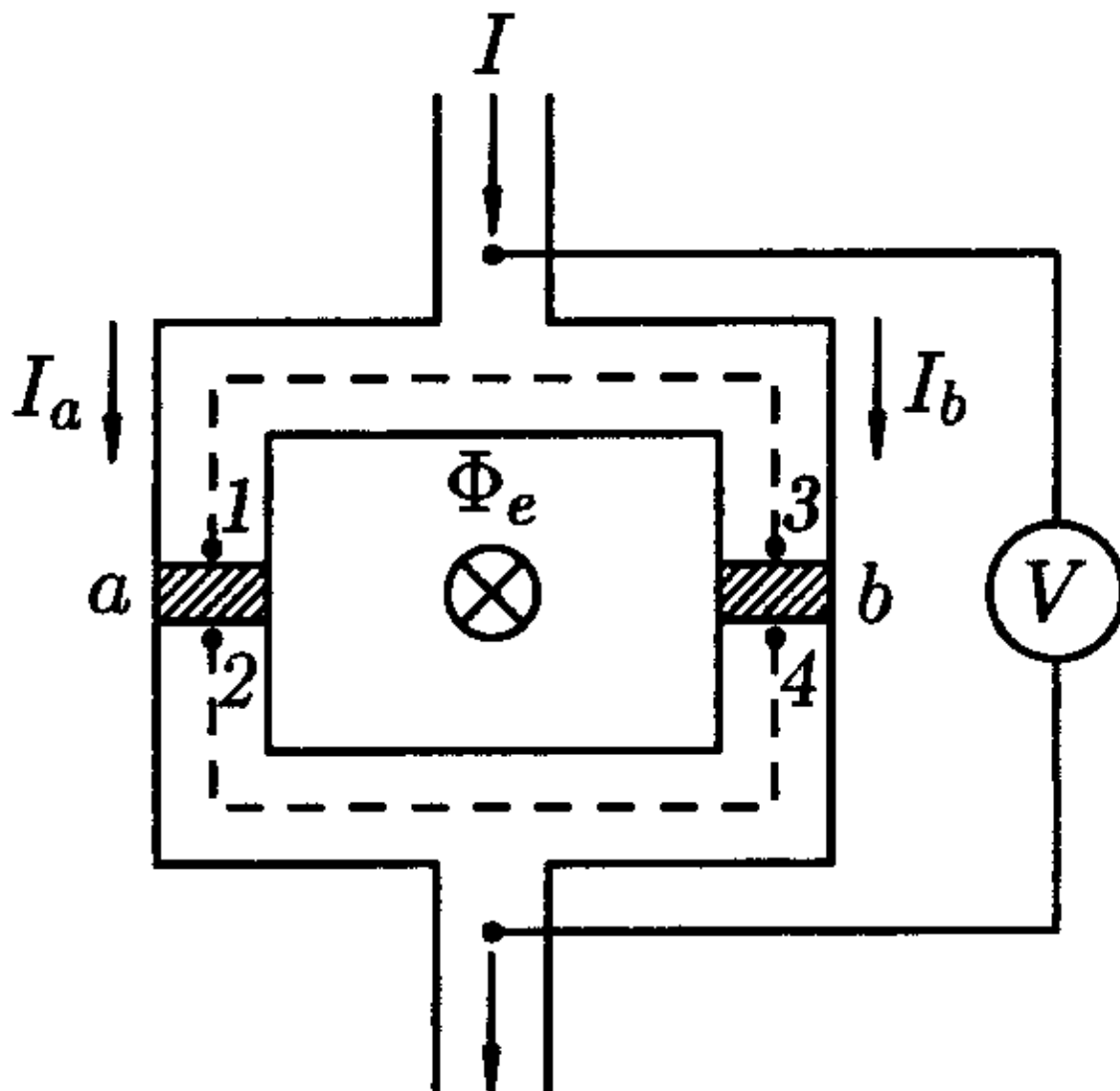


Рисунок 18: Схема устройства ПТ-СКВИДа. Из книги [1].

Возьмём кольцо из сверхпроводника, в котором устроено два джозефсоновских перехода (схема на рисунке 18, вид реального сенсора с использованием ВТСП показан на рисунке 20). Пусть в середине этого кольца есть длинная катушка, которая пронизывает кольцо и создаёт через него внешний поток Φ_e . Рассуждая аналогично рассмотрению одного перехода в магнитном поле возьмём пары точек на разных «берегах» на обоих контактах. Так как на самом контакте магнитного поля нет (рассеянным полем нашей катушки пренебрегаем), то скачок фазы на каждом контакте постоянен. И тогда получим:

17 англ. SQUID – Superconducting QUantum Interference Device

$2\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0} = \phi_b - \phi_a$, где $\phi_{a,b}$ – скачки фазы на разных контактах.

Дополним это уравнениями стационарного эффекта Джозефсона на обоих контактах, считая контакты одинаковыми: $I_{a,b} = I_0 \sin \phi_{a,b}$.

Тогда полный сверхпроводящий ток через оба «плеча» СКВИДа равен:

$$I = I_a + I_b = I_c (\sin \phi_a + \sin \phi_b) = 2 I_c \sin \left(\phi_a + \pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0} \right) \cos \left(\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0} \right),$$

а максимальный бездиссипативный ток через такой прибор $I_{max} = 2 I_c \left| \cos \left(\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0} \right) \right|$ оказывается периодичен по внешнему потоку с периодом Φ_0 (рисунок 19). В этом вычислении мы пренебрегли магнитным потоком тока, текущего по интерферометру.

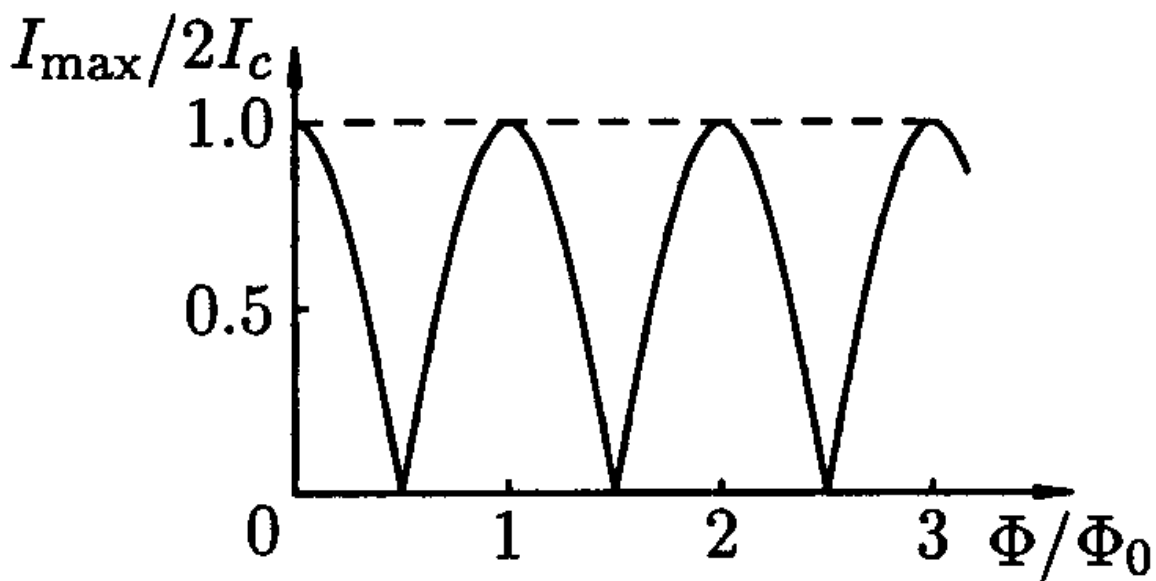


Рисунок 19: Зависимость максимального сверхтекущего тока через СКВИД от магнитного потока через него. Из книги [1].

Применение СКВИД-интерферометров.

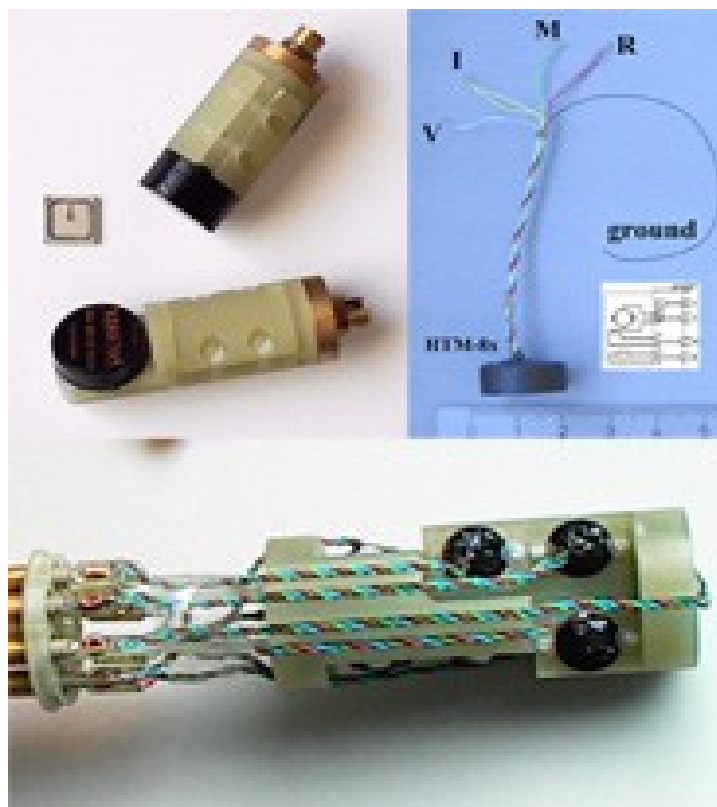


Рисунок 20: Пример ВТСП СКВИДа. Сверхпроводящая часть изготовлена из ВТСП плёнки, рабочая температура 77К. С сайта [11].

Для применения СКВИДа принципиальной оказывается высокая чувствительность максимального критического тока к изменению потока через СКВИД.

Допустим, что мы подобрали поток так, что через СКВИД проходит полуцелое число квантов потока. Тогда пропускание сколь угодно малого тока приведёт к возникновению на СКВИДе напряжения — джозефсоновские контакты перейдут в резистивный режим. Если подавать на СКВИД медленный (килогерцовый) переменный ток, то в условиях такой точной настройки возникнет переменное напряжение. При отклонении потока от полуцелого числа квантов возникает сверхпроводящий ток $I = 2 I_c \sin\left(\phi_a + \pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0}\right) \cos\left(\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0}\right)$ знак которого (второй множитель) зависит от того, куда отклонился поток. Это означает, что нормальный ток по резистивному каналу должен измениться (увеличиться или уменьшиться) и, следовательно, изменится напряжение на СКВИДе.

Это позволяет использовать СКВИД датчик в режиме чувствительного индикатора нуля: если сделать две катушки, пронизывающих контур СКВИДа, в одной из которых проходит измеряемый ток, а в другой ток от системы обратной связи и поддерживать ток в цепи обратной связи таким, чтобы напряжение на СКВИДе оставалось неизменным (то есть не менялся полный поток через СКВИД), то контролируемый экспериментатором ток в цепи обратной связи будет пропорционален измеряемому. Создавая измерительную и компенсационную катушки разной геометрии (с разным числом витков) можно получить усиление измеряемого сигнала, СКВИД-датчик может быть размещён близко к источнику слабого измеряемого сигнала, в том числе и при низких температурах. Рутинная чувствительность таких схем к изменению потока составляет $10^{-3} \Phi_0$.

В качестве практического примера использования СКВИД-сенсора в лаборатории приведём пример коммерчески изготавливаемых СКВИД-магнитометров (приборов для измерения магнитного момента) MPMS¹⁸ [12].



Рисунок 21: Фотография системы MPMS в опции с криостатом замкнутого цикла. Слева направо: стойка компрессора, стойка электроники, стойка с криостатом. С сайта фирмы Quantum Design [12].

Эта система, выпускаемая американской компанией Quantum Design, стала де-факто стандартом измерения намагниченности макроскопических образцов. Она представляет из себя комплект из дьюара (азотного, безазотного либо криостата замкнутого цикла), вставки со сверхпроводящим магнитом (типично на 7-9Тл), комплекта электроники (источники напряжений, необходимых для работы разных измерительных модулей, контролеры температуры, источники тока для магнита), компьютера и программного обеспечения. Всё это интегрировано в 2-3 стойки среднего размера и может быть размещено почти в любом лабораторном помещении (рисунок 21). Оборудование рассчитано на круглосуточную непрерывную эксплуатацию, подключается к обычной лабораторной электросети и гелиевой сети¹⁹. Потребление жидкого гелия (в криостатах обычного типа) составляет около 40-60 л/неделю в зависимости от устанавливаемых температур и интенсивности изменения магнитного поля. Краткое описание может быть найдено на сайте фирмы производителя, в брошюрах с описанием [13], более подробное — в доступных в сети Интернет описаниях этих приборов [14].

Идея измерения состоит в том, чтобы пронести образец через приёмную катушку и измерить изменение магнитного потока через катушку. Для этого образец перемещается шаговым или циклическим двигателем, а отклик катушки записывается как функция координаты образца. Для повышения точности определения нулевого уровня сигнала и минимизации внешних наводок используется сборка из трёх катушек, разнесённых примерно на 1.5 см. В центральной катушке вдвое больше витков, крайние намотаны в противоположном

18 Magnetic Properties Measurement System

19 Жидкий гелий используется для охлаждения сверхпроводящего магнита, обычно испарившийся гелий собирают и вновь ожижают. Инженерная инфраструктура, необходимая для этого, и называется гелиевая сеть.

(относительно центральной катушки) направлении. Эта конфигурация называется градиометром второго порядка, как легко убедиться полный поток через такую сборку от однородного внешнего поля равен нулю ($\Phi = 2B_0S - B_0 - B_0 = 0$), так же как и вклад от неоднородного поля внешних источников в первом порядке ($\Phi = 2B_0S - (B_0 + \delta B) - (B_0 - \delta B) = 0$).

В результате, при перемещении образца (например снизу вверх) сначала возникает отклик одного знака, достигающий максимума амплитуды при прохождении нижней катушки, потом при прохождении средней катушки он меняет знак и достигает в несколько раз большей амплитуды в центре, и, наконец, при прохождении верхней катушки опять происходит смена знака сигнала. Отклик системы может быть рассчитан в модели прохождения точечного диполя, подгонка кривых такой модельной зависимостью позволяет найти амплитуду и знак намагниченности образца (рисунок 22). Для калибровки используется эталонный парамагнетик (металлический палладий), стандартная калибровка обеспечивает точность измерения намагниченности около 1%.

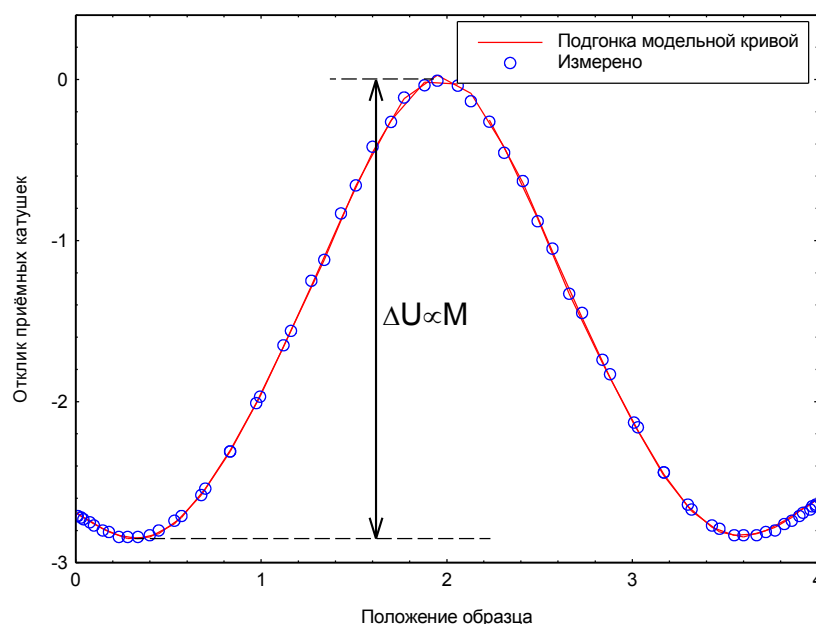


Рисунок 22: Пример кривой отклика СКВИД магнитометра МРМС (символы) и подгонки (кривая). Данные автора (РНСС, 10.5мг, 120К).

Предельная чувствительность измерения магнитного момента составляет 10^{-8} emu (т.е. $10^{11} \mu_B$), нижний измерительный диапазон 10^{-5} emu (т.е. $10^{14} \mu_B$). Для сравнения, в условиях насыщения для образца массой 10мг при молярной массе 100 г/моль и одном магнетоне Бора на формульную единицу намагниченность составит $6 \cdot 10^{19} \mu_B$.

Измерение потока через катушки делается при помощи СКВИД-сенсора. Приёмные катушки выполняются из сверхпроводящего провода, их подключают к также сверхпроводящей измерительной катушке СКВИДа с большим числом витков. Получается замкнутый сверхпроводящий контур, поток в котором должен сохраняться. Значит, при проведении образца через приёмные катушки в контуре будет возникать сверхпроводящий ток, который, в свою очередь, будет приводить к изменению потока через петлю СКВИДа. На вторую катушку СКВИДа, с малым числом витков, подают ток от внешнего источника, который при помощи системы обратной связи подбирают так, чтобы СКВИД оставался в исходной рабочей точке. Таким образом, ток во вторичной катушке оказывается просто пропорционален изменению потока при проведении образца через приёмные катушки.