

Московский физико-технический институт  
Кафедра общей физики

Лекция 12

НИЗКОРАЗМЕРНЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ

заметки к лекциям по общей физике

В.Н.Глазков

Москва

2016

В данном пособии представлены материалы к лекции по теме «Низкоразмерные электронные системы» из курса «Квантовая макрофизика», преподаваемого на кафедре общей физики МФТИ.

Пособие не претендует на полноту изложения материала и в основном является авторскими заметками к лекциям, оно содержит основные сведения по этой теме курса. Для подробного изучения тем студентам рекомендуется обратиться специализированной литературе. Разделы, содержащие дополнительный материал, помечены знаком †.

Основной материал содержится в учебнике Демиховского «Физика квантовых низкоразмерных структур» [1], книге В.Ф.Гантмахера «Электроны в неупорядоченных средах» [2] и методическом пособии Девятова «Основы физики низкоразмерных систем и режима квантового эффекта Холла» [3]. Обзор теоретических подходов к описанию квантового эффекта Холла может быть найден в учебно-методическом пособии Бурмистрова [4]. Историю квантового эффекта Холла можно проследить по статьям и обзорам Клитцинга [5], [6], [7]. История проблемы локализации электронов в случайном потенциале описана в статье [8]. Сведения по поведению трёхмерных электронных систем в магнитном поле описаны могут быть найдены в главах 8, 10, и приложении G книги Киттеля [9].

#### Главное на этой лекции:

1. Критерии низкоразмерности электронной системы.
2. Термодинамическая неустойчивость одно и двумерных систем. Состояние вигнеровского кристалла, пайерлсовская неустойчивость (качественно).
3. Отсутствие долгоживущих квазичастиц в одномерном случае, локализация на случайном потенциале в одномерном и двумерном случае.
4. Квантование одномерной проводимости. Наблюдение квантового эффекта Холла, метрологическая значимость эффекта.
5. Двумерные электроны в квантующем магнитном поле: уровни Ландау и их заполнение. Связь заполнения уровней Ландау с наблюдением квантового эффекта Холла.

## Оглавление

Низкоразмерные системы. Основные характеристики.....	5
Что такое низкоразмерная система?.....	5
Термодинамическая неустойчивость одно и двумерных кристаллов.....	7
Отсутствие долгоживущих квазичастиц в одномерных системах.....	9
Критерии низкоразмерности электронной системы.....	11
Длина сбоя фазы. Слабая локализация.....	11
Длина свободного пробега.....	13
Размерное квантование.....	14
Примеры низкоразмерных электронных систем.....	15
Двумерный электронный газ над поверхностью жидкого гелия.....	15
Двумерный электронный газ в полупроводниковых структурах.....	17
Получение низкоразмерных структур сложной формы и сложных профилей потенциальных ям. †.....	18
Взаимодействие электронов в низкоразмерных системах.....	24
Критерии идеальности двумерного электронного газа.....	24
Взаимодействие со случайным потенциалом и локализация.....	25
Пайерлсовская неустойчивость одномерного металла. †.....	26
Состояние вигнеровского кристалла.....	27
Квантование одномерной проводимости.....	32
Двумерная электронная система в квантующем магнитном поле. Основные факты о квантовом эффекте Холла.....	34
Историческое отступление.....	34
Тензоры сопротивления и проводимости в магнитном поле.....	35
Квантование циклотронного движения электронов. Качественное представление об уровнях Ландау.....	36
Уровни Ландау в двумерном случае. Точный результат.....	39
Кратность вырождения уровня Ландау.....	40
Связь транспортных свойств двумерной электронной системы с заполнением уровней Ландау.....	41
Учёт границ образца: краевые состояния и их роль в формировании плато КЭХ. †.....	41
Условия для наблюдения квантового эффекта Холла.....	45
Наблюдение целочисленного квантового эффекта Холла.....	46
Поучительный пример, или как правильно измерять сопротивление.....	48
Наблюдение дробного квантового эффекта Холла. †.....	49

## Библиография

- 1: В.Я.Демиховский, Г.А.Вугальтер, Физика квантовых низкоразмерных структур, 2000
- 2: В.Ф.Гантмахер, Электроны в неупорядоченных системах, 2013
- 3: Э.В.Девятков, Основы физики низкоразмерных систем и режима квантового эффекта Холла., 2015
- 4: И.С.Бурмистров, Введение в теорию целочисленного квантового эффекта Холла, 2015
- 5: Klaus von Klitzing, The Quantized hall effect, Nobel Prize Lecture, (1985)
- 6: Klaus von Klitzing , Developments in the quantum Hall effect, Philosophical Transaction of the Royal Society A, 363, 2203 (2005)
- 7: Klaus von Klitzing, 25 Years of Quantum Hall Effect (QHE): A Personal View on the Discovery, Physics and Applications of this Quantum Effect, Seminaire Poincare, 2, 1 (2004)

- 8: Ad Lagendijk, Bart van Tiggelen and Diederik S. Wiersma, Fifty years of Anderson localization, *Physics Today*, 62, 24 (2009)
- 9: Ч.Киттель, Введение в физику твёрдого тела.,
- 10: A. Fasolino, J. H. Los and M. I. Katsnelson, Intrinsic ripples in graphene, *Nature Materials*, 6, 858 (2007)
- 11: Levente Tapasztó, Traian Dumitrică, Sung Jin Kim, Péter Nemes-Incze, Chanyong Hwang and László P. Biró, Breakdown of continuum mechanics for nanometre-wavelength rippling of graphene, *Nature Physics*, 8, 739 (2012)
- 12: А.А.Абрикосов, Основы теории металлов, 2010
- 13: В.С.Эдельман, Левитирующие электроны, УФН, 130, 675 (1980)
- 14: , *Electrons on Liquid Helium* , <http://courses.washington.edu/bbbteach/576/EoH.pdf>
- 15: Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теоретическая физика том 3. Нерелятивистская квантовая механика,
- 16: Qi-Zhong Yang, G.A.C.Jones, M.J.Kelly, H.Beere and I.Farrer, Manufacturability of split-gate transistor devices—initial results , *Semiconductor Science and Technology*, 21, 558 (2006)
- 17: Bert Lorenz' research group, Fabrication and characterization of semiconductor nanostructures by atomic force microscopy , <http://www.nano.physik.uni-muenchen.de/research/rep99/Bert/bert.html>
- 18: A. P. Micolich, What lurks below the last plateau: experimental studies of the  $0.7 \times 2e^2/h$  conductance anomaly in one-dimensional systems , *Journal of Physics: Condensed Matter*, 23, 443201 (2011)
- 19: Binh-Minh Nguyen, Wei Yi, Ramsey Noah, Jacob Thorp, Marko Sokolich, High mobility back-gated InAs/GaSb double quantum well grown on GaSb substrate, HRL Laboratories Report, (2014)
- 20: J.M.Kosterlitz and D.J.Thouless, Two-dimensional physics, , VII B (1978)
- 21: C.C.Grimes and G.Adams, Evidence for a Liquid-to-Crystal Phase Transition in a Classical Two-Dimensional Sheet of Electrons, *Physical Review Letters*, 42, 795 (1979)
- 22: B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C. T. Foxon, Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas, *Physical Review Letters*, 60, 848 (1988)
- 23: Horst L.Störmer, The fractional quantum hall effect, Nobel prize lecture, (1998)

# Низкоразмерные системы. Основные характеристики.

## Что такое низкоразмерная система?

Прежде чем начинать изучение новой темы необходимо определиться с тем, что же собственно является объектом изучения. Ответ кажется интуитивно ясным — «низкоразмерная система, это система в которой координат, её описывающих меньше, чем в привычном нам трёхмерном пространстве». Однако не стоит забывать, что история физики (например, возникновение теории относительности или квантовой механики) нас учит тому, что часто в тонкостях формального определения скрыто много важных вопросов.

С точки зрения теоретической модели, действительно, низкоразмерными системами называют системы, которые описываются меньшим числом координат, чем привычные нам трёхмерные системы. Такими системами являются, например, системы электронов, в которых электроны могут двигаться только в одном или двух направлениях, или системы атомов, в которых атомы образуют несвязанные (или достаточно слабосвязанные для применимости такого подхода) цепочки (которые мы рассматривали как модельные задачи при изучении колебаний решётки) или плоскости (широко<sup>1</sup> всем известный пример графена).

Однако за этим достаточно расплывчатым определением скрывается много разных частных случаев. Например, для систем «двумерных» электронов<sup>2</sup> в опытах по квантовому эффекту Холла магнитное поле прикладывается в третьем пространственно направлении — задача реально решается в трёхмерном мире. Да и «двумерность» такого электронного газа оказывается несколько условной — в направлении поперечном к плоскости электрон делокализован на некоторой конечной толщине, соотношение неопределённости для  $Z$ -компонент импульса и координаты пространственное квантование не отменяет. Спиновая переменная для одно- или двумерных электронных систем также является трёхмерной, у спина «двумерного» (движущегося в плоскости  $XY$ ) электрона есть  $Z$ -компонента. При рассмотрении цепочек атомов или атомов, расположенных в плоскости разные модели могут включать или не включать колебания атомов в поперечном к цепочке или плоскости направлении — то есть опять в свойствах системы изначально «низкоразмерной» могут участвовать степени свободы, связанные с исключённым казалось бы из рассмотрения измерением. Например, из-за возможности сместиться в направлении перпендикулярном плоскости в свободно подвешенном листе графена возникает структура волн (англ. ripples) поперечной деформации [10], [11] (рисунки 1).

При рассмотрении магнитных систем иногда, наоборот, уменьшается размерность спинового пространства (количество возможных компонент спинового вектора) и рассматриваются «двумерная» ( $XY$ -модель, в которой у спинового вектора есть только  $X$  и  $Y$  компоненты) или «одномерная» (модель Изинга, в которой есть только  $Z$ -компонента спина) модели, свойства которых оказываются часто принципиально отличными от свойств систем «трёхмерным» спином. Более того, эти атомы с таким «низкоразмерным» спином могут располагаться как на обычной трёхмерной решётке, так и в виде цепочек или плоскостей, что открывает

---

1 Графен — это «модная» тема, про которую все что-то слышали, поэтому совсем обойти его вниманием невозможно. Мы не будем специально обсуждать свойства графена. Однако автор надеется, что некоторые комментарии по ходу изложения покажут, что задача о графене не столь идеальна как это иногда может казаться по «популярным» источникам.

2 Мы немного забегаем здесь вперёд, но задача про электроны в треугольном потенциале решалась в 5 семестре. Речь идёт о том, что если каким-либо образом создать для электронов потенциал, зависящий только от координаты  $Z$ , то в уравнении Шредингера можно разделить переменные: в плоскости  $XY$  останется свободное движение, а решение уравнения для зависящей от  $Z$  части волновой функции сведётся к потенциальной яме с дискретными уровнями.

возможность по разному комбинировать размерность решётки кристалла в обычном пространстве и размерность спинового пространства.

Таким образом, даже с точки зрения теоретической модели понятие «низкоразмерная система» описывает очень широкий класс задач с весьма разными свойствами. В силу ограниченности возможностей курса общей физики рассмотрение будет ограничено свойствами низкоразмерных электронных систем, в частности – свойствами низкоразмерных электронных систем, формируемых в полупроводниковых структурах.

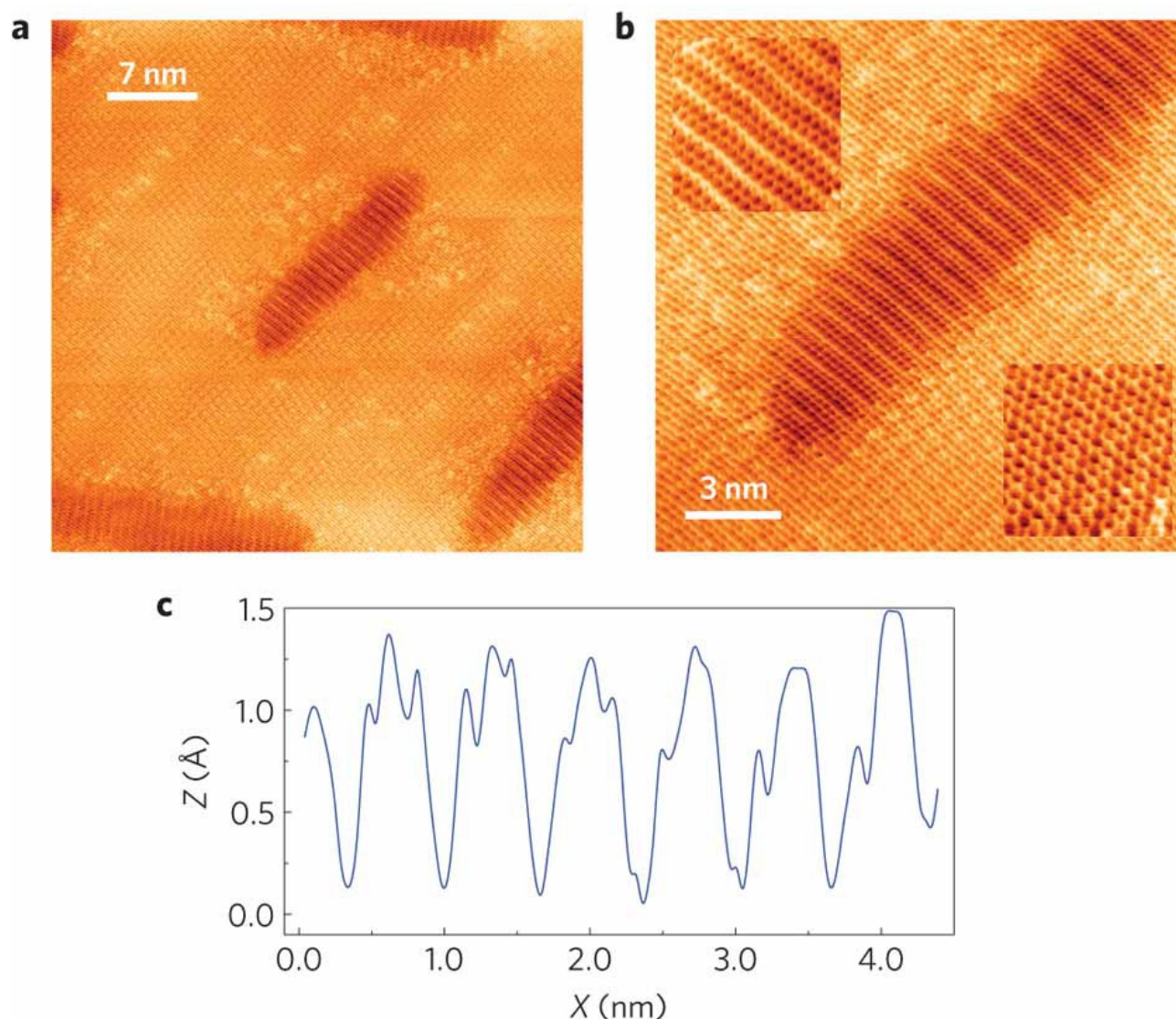


Рисунок 1: Полученное при помощи сканирующего туннельного микроскопа изображение листа графена на медной подложке. Более тёмные области соответствуют местам, где в медной подложке есть протяжённые (ширина около 5 нм, длина около 20 нм) вакансии на поверхности - «провалы» в атомно-гладкой поверхности. Над этими вакансиями фрагмент листа графена оказывается свободно подвешенным и на его поверхности возникает модуляция в поперечном направлении. На панели (b) показаны увеличенные фрагменты поверхности над «провалом» (сверху) и на гладкой поверхности (снизу). На панели (c) показан профиль поверхности вдоль «провала». Из статьи [11].

## Термодинамическая неустойчивость одно и двумерных кристаллов.

Существование пространственно низкоразмерных систем часто ограничивается принципиальным термодинамическим утверждением о неустойчивости существования одно- и двумерных кристаллов при конечной температуре.<sup>3</sup> Часть этого утверждения встречалась в качестве задачи на первых неделях курса. Напомним это доказательство.

Предположим, что у нас имеется кристалл — то есть, периодически расположенные в пространстве атомы, удерживаемые в положениях равновесия какими-то силами взаимодействия. Неотъемлемым свойством кристалла является возможность распространения упругих волн (фононов). Пусть  $\vec{U}_k(\vec{r}, t)$  — смещения атомов в фононной моде некоторой поляризации на волновом векторе  $\vec{k}$ . Ограничимся случаем низких температур, тогда для динамики атомов кристалла важны только низкоэнергетические акустические фононы и их спектр можно считать линейным  $\omega = sk$ . Энергия, запасённая в колебаниях фононной моды с волновым вектором  $\vec{k}$  равна с одной стороны

$$E_k = \hbar \omega_k \left( \langle n_k \rangle + \frac{1}{2} \right), \text{ где } \langle n_k \rangle \text{ — равновесное число фононов } \langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\hbar \omega / T} - 1}, \text{ а с}$$

другой стороны она равна удвоенной средней кинетической энергии<sup>4</sup> всех атомов при совершении этого типа колебаний:  $E_k = 2 \left\langle \sum_r \frac{m}{2} (\dot{\vec{U}}_k)^2 \right\rangle = m \omega_k^2 \sum_r \langle \vec{U}_k^2 \rangle = N m \omega_k^2 \langle \vec{U}_k^2 \rangle$ , где

$m$  — масса атома,  $N$  — число атомов в решётке, а  $\langle \vec{U}_k^2 \rangle$  равновесное среднее значение квадрата смещения. Сопоставляя эти утверждения, получаем для среднего квадрата смещения  $\langle \vec{U}_k^2 \rangle = \frac{\hbar}{N m \omega_k} \left( \langle n_k \rangle + \frac{1}{2} \right)$ .

Полное смещение атома от положения равновесия может быть разложено по базису собственных колебаний  $\vec{U}(\vec{r}) = \sum_k \vec{U}_k e^{i\vec{k}\vec{r}}$ , для вещественности смещения необходимо,

чтобы  $\vec{U}_k = \vec{U}_{-k}^*$ , а выносом комплексной фазы в экспоненту (что не влияет на дальнейшие рассуждения) можно сделать фурье-амплитуды действительными. Средний квадрат полного смещения атома от положения равновесия

$$\langle \vec{U}^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\vec{r}} \langle (\vec{U}(\vec{r}))^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k, k'} \left[ \langle \vec{U}_k \vec{U}_{k'} \rangle \sum_r e^{i(\vec{k} + \vec{k}')\vec{r}} \right]. \text{ Суммирование по } \vec{r} \text{ даёт}$$

$$N \delta(\vec{k} + \vec{k}') \text{ (при } k \neq -k' \text{ осциллирующая часть усредняется «в ноль»), откуда} \\ \langle \vec{U}^2 \rangle = \sum_k \langle \vec{U}_k \vec{U}_{-k}^* \rangle = \sum_k \langle \vec{U}_k^2 \rangle \text{ (здесь пользуемся вещественностью амплитуд } \vec{U}_k = \vec{U}_{-k}^* \text{)}.$$

Таким образом, для нахождения среднего квадрата смещения атома от положения равновесия необходимо просуммировать по всем возможным фононным модам и по всем поляризациям

$$\text{квадраты смещений для всех фононных мод: } \langle \vec{U}^2 \rangle = \frac{\hbar}{N m} \left[ \sum_k \frac{1}{\omega_k} \langle n_k \rangle + \frac{1}{2} \sum_k \frac{1}{\omega_k} \right].$$

3 Это утверждение также известно как теорема Ландау-Пайерлса.

4 При гармонических колебаниях средние кинетические и потенциальная энергии совпадают, поэтому полная запасённая в колебаниях энергия  $E = \Pi + K = 2 \langle \Pi \rangle = 2 \langle K \rangle$ . Вывод выражения для связи энергии с амплитудой колебаний нагляднее через кинетическую энергию, так как сводится к прямолинейному суммированию квадратов скоростей атомов, но тот же результат получится и через потенциальную энергию: нужно только учесть, что упругая потенциальная энергия пропорциональна не смещению, а его градиентам.

Тогда  $\langle \Pi \rangle \propto \langle (\vec{\nabla} \vec{U})^2 \rangle \propto k^2 \vec{U}_k^2 \propto \omega_k^2 U_k^2$  и дальнейшие выкладки совпадают.

Здесь мы в явном виде разделили вклад тепловых колебаний (первое слагаемое) и вклад нулевых колебаний (второе слагаемое). От суммирования как обычно переходим к интегрированию  $\sum_k \rightarrow P \int V_D \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$ , где  $P$  — число поляризаций,  $D$  — пространственная размерность кристалла,  $V_D$  — объём (площадь и длина в двумерном и одномерном случаях). Нас не интересует сейчас точное вычисление — интерес представляет сходимость этих интегралов. Поэтому отметим только, что  $D$ -мерный объём делится на число атомов и даёт концентрацию атомов. Поэтому вся зависимость от размера системы оказывается скрыта в пределах интегрирования (конечный размер ограничивает минимально возможное значение волнового вектора).

Для системы же бесконечного размера имеем вклад нулевых колебаний (интегрирование ограничивается сверху волновым вектором  $k_{max}$  порядка дебаевского и соответствующей частотой):

$$\langle \vec{U}_0^2 \rangle \propto \int_0^{k_{max}} \frac{1}{\omega_k} k^{D-1} dk \propto \int_0^{\omega_{max}} \omega^{D-2} d\omega = \begin{cases} \ln \omega_0^{\omega_{max}}, & D=1 \\ \omega_{max}, & D=2 \\ \omega_{max}^2/2, & D=3 \end{cases}.$$

То есть, в одномерном случае уже вклад нулевых колебаний расходится (логарифмически) и, следовательно, одномерный кристалл неустойчив даже при  $T=0$ : под влиянием квантовых флуктуаций (нулевых колебаний) атом может сместиться сколь угодно далеко от исходного положения. В двумерном и трёхмерном случае поправка нулевых колебаний конечна.

Для вклада тепловых колебаний при низких температурах интегрирование как обычно распространяется до бесконечности:

$$\langle \vec{U}_T^2 \rangle \propto \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \omega^{D-1} d\omega \propto T^{D-1} \int_0^{\infty} \frac{x^{D-2}}{e^x - 1} dx$$

При  $D=2$  интеграл логарифмически расходится на нижнем пределе, то есть в двумерном случае в системе бесконечного размера при конечной температуре смещения атомов могут быть бесконечно большими и кристалл в его традиционном понимании существовать не может. При  $D=3$  поправка тепловых колебаний оказывается конечной.

Таким образом, истинно одномерные и двумерные системы не существуют, а на практике всегда приходится иметь дело с *квази*-низкоразмерными системами, в которых понижение пространственной размерности реализуется с некоторой точностью и по некоторым критериям. В дальнейшем речь в основном пойдёт о проводящих низкоразмерных системах.

Необходимо, однако, отметить, что логарифмическая расходимость — это очень слабая особенность и в условиях реального эксперимента часто эффект конечного размера образца сделает эту расходимость трудно наблюдаемой: логарифм типа  $\ln \frac{R}{a}$ , где  $R \sim 1 \text{ см}$  — размер образца, а  $a \sim 1 \text{ \AA}$  — межатомное расстояние равен *всего лишь* 18.4. Кроме того, разрушение привычного порядка длинноволновыми тепловыми или квантовыми флуктуациями сохраняет корреляции между близкими атомами: например, для среднего квадрата разности смещений соседних атомов (т. е., их. относительного смещения)



$$f(\vec{a}) = \langle (U(\vec{r}) - U(\vec{r} + \vec{a}))^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\vec{r}} \langle (U(\vec{r}) - U(\vec{r} + \vec{a}))^2 \rangle =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\vec{r}, \vec{k}, \vec{k}'} \langle U_{\vec{k}} U_{\vec{k}'} \rangle e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r}} (1 - e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}}) (1 - e^{i\vec{k}' \cdot \vec{a}}) = \sum_{\vec{k}} \langle U_{\vec{k}}^2 \rangle 4 \sin^2 \frac{ka}{2}$$

здесь формальные вычисления похожи на сделанные выше. Для средних амплитуд фурье-компонент также верны сделанные ранее вычисления. Опять интересуясь здесь только вопросом конечности этой средней величины, легко заметить, что для одномерного случая при  $T=0$   $f(a) \propto \int \frac{\sin^2(ka/2)}{k} dk \propto \int \frac{\sin^2 x}{x} dx$ , а для двумерного случая при конечной

температуре  $f(a) \propto \int \frac{\sin^2(ka/2)}{\omega(e^{\hbar\omega/T} - 1)} k dk \propto \int \frac{\sin^2(k a/2)}{e^{\hbar s k/T} - 1} dk$  – в обоих случаях

длинноволновая расходимость пропадает и эти средние окажутся конечными. Это указывает на возможность возникновения необычных скоррелированных состояний и необычных типов порядка в низкоразмерных системах – примерами которых, например, являются состояния вигнеровского кристалла или переход Березинского-Костерлица-Таулеса в двумерных системах

### Отсутствие долгоживущих квазичастиц в одномерных системах.

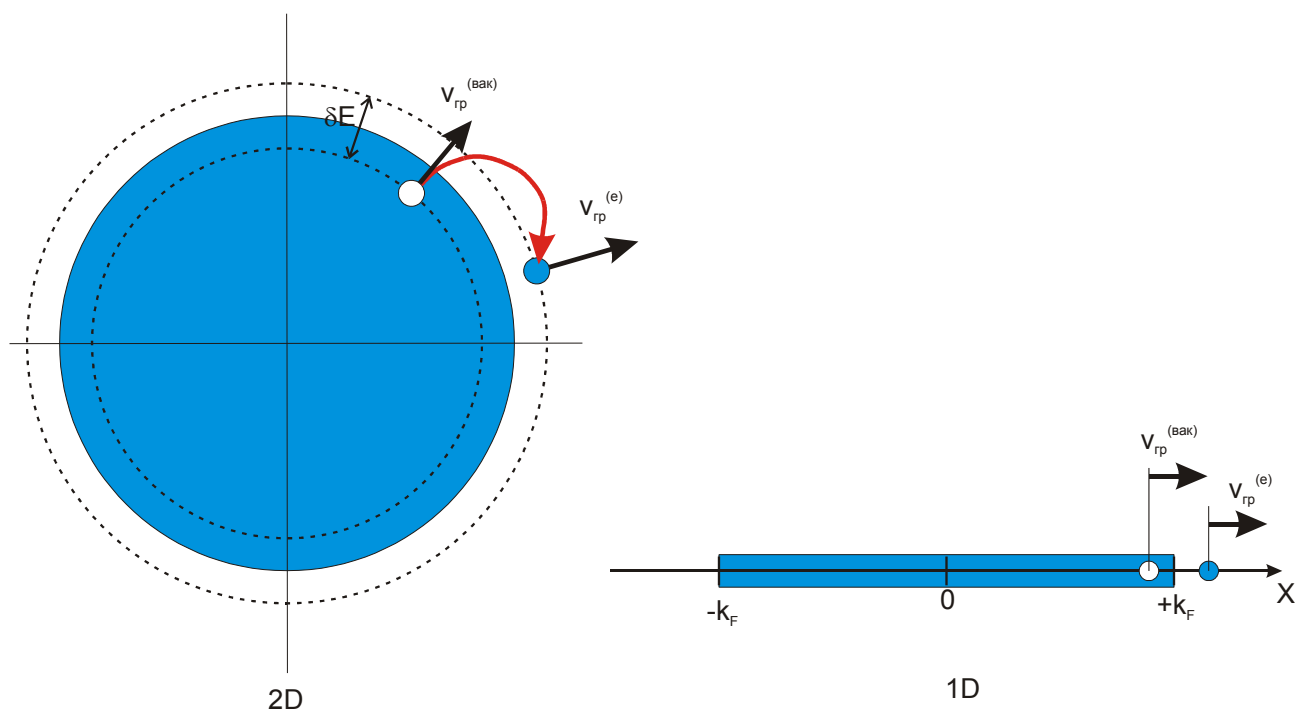


Рисунок 2: К возможности создания долгоживущих квазичастиц в двумерном случае (слева) и невозможности создания долгоживущих квазичастиц в одномерной системе с взаимодействием (справа).

Некоторые оценки, касающиеся взаимодействия электронов в низкоразмерных системах будут сделаны далее. Однако, есть принципиальный вопрос о возможности построения долгоживущих фермиевских квазичастиц в низкоразмерных системах. Возможность такого построения в трёхмерных системах позволило построить теорию ферми-жидкости для описания систем со взаимодействием (в частности, делая универсальным низкотемпературный линейный закон для теплоёмкости вырожденной ферми-системы).

Оказывается, что, как и в трёхмерном случае, в двумерных системах может применяться концепция квазичастиц к движению электронов. Наличие взаимодействия приводит к дополнительной перенормировке массы (электрон «увлекает за собой» часть соседей). Возможность создания долгоживущих квазичастиц связана с тем, что как и в трёхмерном случае, при переносе электрона в состояние над поверхностью Ферми создаётся пара частица-вакансия с направленными в разных направлениях групповыми скоростями (рисунок 2, слева). Поэтому частица и вакансия (создаваемые в одной точке пространства) могут разделиться в пространстве, не успев рекомбинировать, и в системе появятся долгоживущие квазичастицы. Такое состояние системы с сильным взаимодействием и называют ферми-жидкостью.

В одномерном случае, однако, взаимодействие между электронами приводит к катастрофическим для квазичастичного описания последствиям. Действительно, попробуем повторить те же действия по созданию возбуждения в виде пары частица-вакансия, что так хорошо срабатывало в случае больших размерностей (рисунок 2, справа). Как и ранее, возьмём частицу под поверхностью Ферми и перенесём её в состояние над поверхностью Ферми. Но при небольшом изменении энергии и частица, и вакансия будут иметь абсолютно одинаковые групповые скорости! Это значит, что их разбегания в пространстве не произойдёт и сколь угодно слабое взаимодействие между частицами приведёт к рекомбинации пары частица-вакансия.

Таким образом, в одномерной вырожденной ферми-системе с взаимодействием не существует описания её свойств на языке квазичастиц, аналогичного модели ферми-жидкости, работающей в двух и трёхмерном случаях. Это необычное состояние называют моделью жидкости Латтинжера или жидкостью Томонаги-Латтинжера по имени предложивших её физиков. Рассмотрение этой модели лежит существенно за пределами нашего курса.

## Критерии низкоразмерности электронной системы.

Возьмём в качестве наглядного примера бесконечную в плоскости металлическую плёнку и будем уменьшать её толщину  $d$ . Электроны движутся в плёнке, испытывают в ней различные процессы рассеяния. Какие характерные масштабы длины позволят нам говорить, что некоторые свойства плёнки стали описываться двумерной моделью?

### Длина сбоя фазы. Слабая локализация.

Первым, самым крупным, масштабом является длина сбоя фазы. При низких температурах процессы рассеяния электронов на примесях и границах образца являются упругими. Эти процессы не изменяют энергию электрона, а так как зависимость волновой функции от времени (т. е. набег фазы) описывается множителем  $e^{-iEt/\hbar}$ , то, изменяя направление распространения волны де-Бройля электрона, такие столкновения сохраняют её фазу. А вот неупругие процессы рассеяния (электрон-электронные и электрон-фононные) изменяют энергию электрона и сбивают фазу его волновой функции. Электрон может испытать много актов упругого рассеяния, при этом его движение можно рассматривать как процесс диффузии с сохранением фазы, и в силу сохранения фазы этот электрон может участвовать в различных интерференционных явлениях.

Характерное время между упругими процессами обозначим  $\tau$ , а время между неупругими процессами  $\tau_\phi$ . Тогда длина свободного пробега электрона между упругими столкновениями  $l \sim v_F \tau$ , а характерное смещение электрона к моменту сбоя фазы  $L_\phi = \sqrt{D \tau_\phi}$ , где  $D \sim \frac{l^2}{\tau} = v_F^2 \tau$  - коэффициент диффузии. Этот масштаб длины называют длиной сбоя фазы.

Наглядным проявлением конечности длины сбоя фазы являются интерференционные поправки к проводимости [2][12]. При учёте квантовых эффектов для подсчёта вероятности прохода электрона из точки А в точку В необходимо просуммировать амплитуды  $A_i$  волн де Бройля, идущих по всем возможным траекториям, соединяющим эти точки, и для нахождения вероятности имеем  $w = \left| \sum A_i \right|^2 = \sum_i |A_i|^2 + \sum_{i \neq j} A_i A_j^*$ . Второе слагаемое и есть результат интерференции волн де-Бройля, из-за этой интерференции суммарная вероятность может отличаться от классической суммы вероятности по разным траекториям. Для интерференции волн де Бройля важно, чтобы их фазы были когерентны. Этому свойству автоматически удовлетворяют волны де Бройля, распространяющиеся по траекториям с самопересечениями: образующаяся петля может быть пройдена в двух направлениях, поэтому каждая такая траектория на самом деле представляет собой два разных возможных пути для электрона. Так как набег фазы волны де Бройля для электрона, движущегося с фермиевской скоростью, определяется только пройденным путём, то для волновых пакетов, обошедших петлю в разных направлениях автоматически совпадают фазы и они интерферируют. Таким образом, величина интерференционной поправки будет пропорциональна вероятности электрону пересечь в ходе диффузного движения свою траекторию. «Обычные же» траектории без самопересечений приходят в конечную точку со случайными сбоями фазы и интерференционная поправка для них при суммировании по всем траекториям зануляется.

Покажем, как сближение размера системы с длиной сбоя фазы приводит к изменению роли интерференционных эффектов.



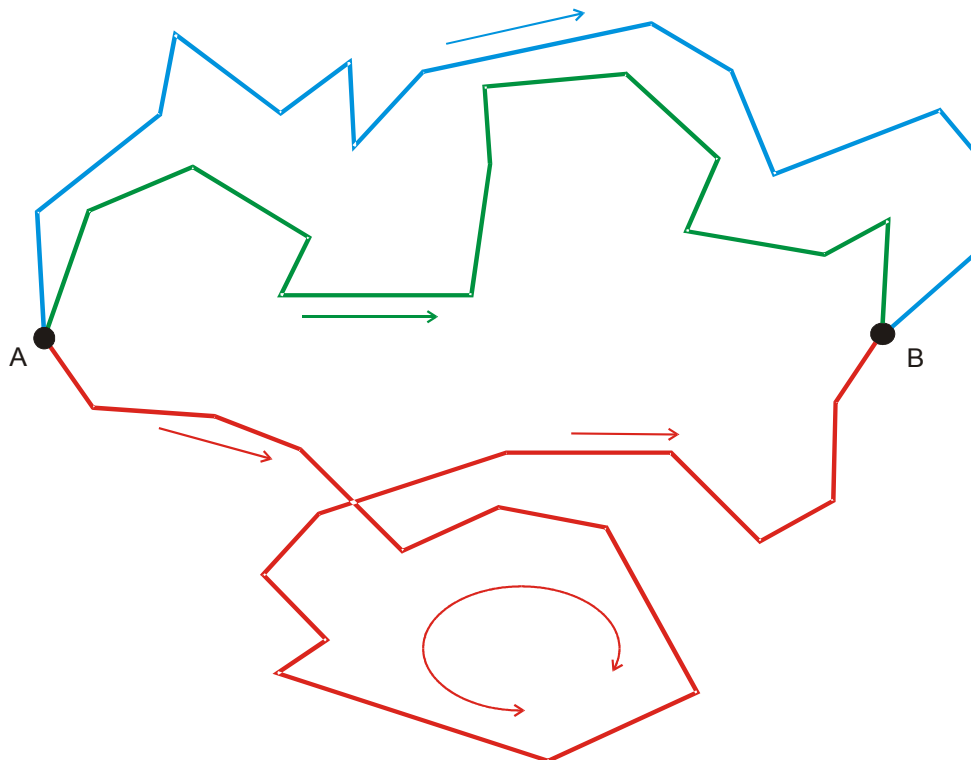


Рисунок 3: К оценке вероятности появления диффузной траектории с самопересечением.

С учётом квантового «размытия» электрона, его траектория движения будет не линией, а скорее «трубкой». Поперечный размер «трубки» имеет порядок дебройлевской длины волны  $\lambda$ . За время  $t \gg \tau$  электрон может попасть в любую из точек на характерном удалении  $\sqrt{Dt}$  от стартовой, то есть ему доступен объём  $\sim (Dt)^{3/2}$ . Для того, чтобы в течении интервала  $dt$  конечная точка траектории замкнула петлю в начальной точке, она должна попасть в выделенный выбором начальной точки объём  $\sim v_F \lambda^2 dt$  вокруг стартовой точки. Для нахождения полной вероятности нужно просуммировать по всем возможным длинам петель, то есть проинтегрировать по времени от  $\tau$  (меньшие времена рассматривать бессмысленно) до  $\tau_\phi$  (на больших длинах петель интерференции не будет из-за сбоя фазы). То есть, в трёхмерном случае вероятность замыкания траектории электрона

$$w_{3D} \sim \int_{\tau}^{\tau_\phi} \frac{v_F \lambda^2}{D^{3/2} t^{3/2}} dt \sim -\frac{\lambda^2}{v_F^2 \tau^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{t}} \Big|_{\tau}^{\tau_\phi} = \frac{\lambda^2}{l^2} - \frac{\lambda^2}{l L_\phi}.$$

В трёхмерном случае конечность длины сбоя фазы  $L_\phi$  оказывается лишь малой поправкой. Отметим также, что эта поправка увеличивает вероятность электрону вернуться в исходную точку — то есть уменьшает проводимость образца. Увеличение вероятности электрона вернуться в исходную точку — то есть по сути просто остаться в ней — называют *слабой локализацией*.

Если же толщина плёнки окажется мала по сравнению с длиной сбоя фазы, то можно считать, что поперёк плёнки вероятность обнаружить электрон в какой-то точке постоянна и тогда доступный объём будет  $\sim d \times Dt$  и вероятность замыкания траектории

$$w_{2D} \sim \frac{v_F \lambda^2}{D} \frac{1}{d} \ln \frac{\tau_\phi}{\tau} \sim \frac{\lambda^2}{l d} \ln \frac{L_\phi}{l}.$$

Получаем логарифмическую расходимость при росте  $L_\phi$ ,

что говорит о возрастающей роли интерференционных поправок. Эта поправка, как и в трёхмерном случае, уменьшает проводимость — то есть указывает на некоторую локализацию электронов. Экспериментально логарифмический рост сопротивления наблюдался в тонких плёнках металлов при низких температурах (рисунок 4), когда с точки зрения обычной теории проводимости сопротивление должно становиться постоянным.

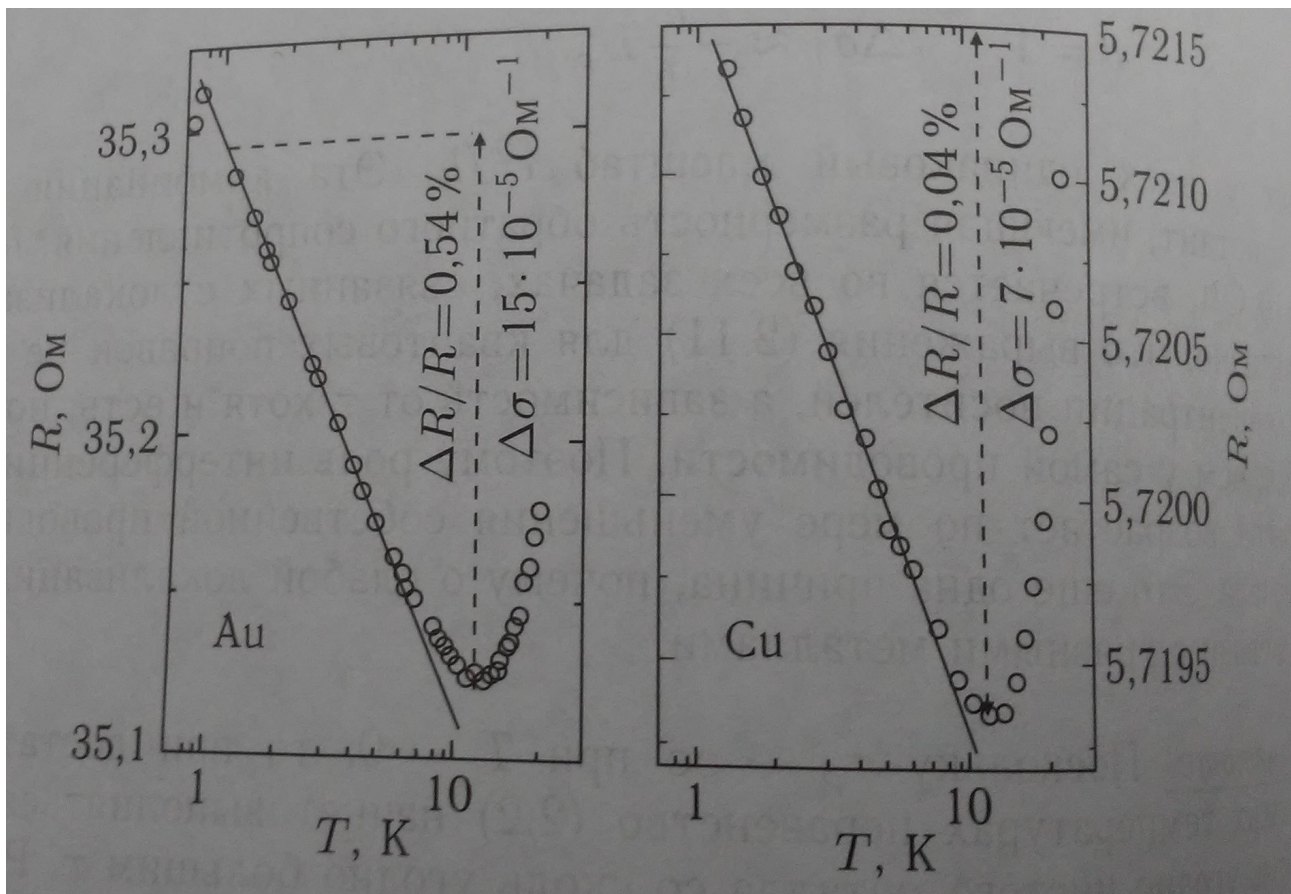


Рисунок 4: Температурные зависимости сопротивления тонких пленок меди и золота при низких температурах, демонстрирующие возникновение интерференционных поправок к проводимости. Из книги [2].

Отметим без подробного доказательства, что слабая локализация оказывается очень чувствительна к внешнему магнитному полю: в магнитном поле фаза волновой функции электрона включает слагаемое, пропорциональное  $\int \vec{A} d\vec{l}$ , и в результате на траектории с самопересечением при обходе «по часовой стрелке» и «против часовой стрелки» набег фазы перестанут автоматически совпадать.

### Длина свободного пробега.

Следующим за длиной сбоя фазы масштабом длины является длина свободного пробега  $l \sim v_F \tau$ . Если длина свободного пробега становится сравнима с некоторым из размеров системы, то в этом направлении электрон «пролетает» через всю систему в баллистическом режиме, не рассеиваясь вовсе. Это приводит, например, к квантованию проводимости одномерного проводника.

Если же длина свободного пробега превысит толщину тонкой плёнки, то из-за упругого отражения на границах возникнет интерференционная картина волн де Бройля, аналогичная оптической картине интерференции в тонких плёнках. На языке квантовой физики такая тонкая плёнка соответствует наличию бесконечно высоких потенциальных стенок на границах плёнки и тогда для компоненты волнового вектора, перпендикулярной плёнке (для двумерных систем традиционно координаты X и Y обозначают плоскость системы, а Z — перпендикулярное направление, далее по умолчанию будем пользоваться именно таким выбором координат) возникает очевидное условие квантования<sup>5</sup>  $k_z d = \pi n$ . Энергия

<sup>5</sup> В потенциальной яме с бесконечными стенками на ширине ямы должно укладываться целое число полуволен.

электрона тогда  $E(k_x, k_y, n) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m d^2} n^2 + \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2)$ . То есть возникает некоторое количество (вообще говоря, могущее быть большим) подзон размерного квантования.

### **Размерное квантование.**

Как уже было отмечено, если ограничить движение электрона в каком-то направлении<sup>6</sup>, то в этом направлении движение квантуется: возникают дискретные уровни энергии. Для наглядности, рассмотрим опять модель тонкой плёнки. Уровни энергии

$$E(k_x, k_y, n) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m d^2} n^2 + \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2)$$

была  $N$ , то эти носители должны распределиться по нескольким подзонам с разными значениями квантового числа  $n$ . В плоскости движение свободное и заполнение состояний каждой подзоны является двумерным аналогом задачи о ферми-газе: заполненными окажутся состояния с волновым вектором ниже фермиевского. Следующая подзона начнёт заполняться только если концентрация электронов настолько велика, что фермиевская энергия в предыдущей подзоне сравнивается с расстоянием между подзонами. Минимизируя энергию при условии сохранения полного числа частиц можно получить распределение фермиевских импульсов по подзонам размерного квантования. Точное решение этой задачи оставим заинтересованному читателю, отметим лишь очевидный вывод, что фермиевский импульс в очередной заполняемой зоне будет уменьшаться с ростом  $n$  и начиная с некоторого квантового числа подзоны будут не заполнены вовсе.

Таким образом, если концентрация электронов достаточно мала, либо расстояние между подзонами достаточно велико, то все электроны соберутся в нижней подзоне. «Свободными» квантовыми числами в энергии частицы остаются только  $X$  и  $Y$  компоненты волнового вектора — частица как бы движется только в плоскости. О таких системах говорят как о двумерных электронных системах. Однако надо иметь в виду, что и они остаются квазидвумерными — волновая функция зависит от координаты  $Z$  (частица делокализована в направлении  $Z$  на масштабе толщины плёнки в нашем примере). Поэтому в некоторых явлениях (например, при вычислении энергии взаимодействия электронов при достаточно высокой поверхностной плотности частиц, когда расстояние между электронами становится порядка толщины слоя) может оказаться необходимым учёт и этой степени свободы.

Аналогичным образом (и с аналогичными оговорками про терминологию), если ограничить движение электронов в двух направлениях, получают одномерные проводящие системы («квантовые провода», англ. quantum wire), а при ограничении в трёх направлениях (то есть при создании полностью закрытой потенциальной ямы для электрона) по аналогии говорят о нульмерной электронной системе («квантовой точке», англ. quantum dot).

Отметим также, что масштаб энергетического расстояния между подзонами размерного квантования накладывает также необходимое условие на температуру при которой можно наблюдать такие эффекты: необходимо, чтобы  $T \ll \Delta E$ . На практике для надёжного наблюдения эффектов, связанных с размерным квантованием, нужна температура на порядок меньше расстояния между подзонами.

---

де Бройля.

<sup>6</sup> Подразумеваются удобные для оценки геометрические условия этих ограничений: потенциал  $U(\vec{r}) = U_1(x) + U_2(y) + U_3(z)$ . Это позволяет легко разделить переменные в уравнении Шредингера.

## Примеры низкоразмерных электронных систем.

### **Двумерный электронный газ над поверхностью жидкого гелия.**

Наиболее простым примером формирования двумерной электронной системы являются электроны над поверхностью жидкого гелия [13], [14].

У электронов имеется отрицательное сродство к гелию — электрону не выгодно находиться рядом с атомом гелия.<sup>7</sup> Из-за этого проникновение электрона вглубь жидкого гелия требует преодоления энергетического барьера высотой около 1 эВ.<sup>8</sup> В то же время наличие у гелия отличной от единицы ( $\epsilon = 1.057$ ) диэлектрической проницаемости приводит к возникновению притяжения электрона к поверхности, притягивающий потенциал может быть найден в известной электростатической задаче о заряде отражения:

$$\phi(z) = -\frac{e^2(\epsilon-1)}{4(\epsilon+1)z}, \text{ где координата } z \text{ отсчитывается от поверхности гелия в вакуум.}$$

Сила притяжения оказывается мала в меру малости величины  $(\epsilon-1)$  и, следовательно, характерное удаление электронов от поверхности — велико. Этот характерный масштаб можно оценить пользуясь соотношением неопределённости и вириальной теоремой.<sup>9</sup> В

стабильном состоянии по вириальной теореме  $K \sim Fz = \frac{e^2(\epsilon-1)}{4(\epsilon+1)z^2}z \sim \frac{e^2(\epsilon-1)}{(\epsilon+1)z}$ , в то же

время по соотношению неопределённости в основном состоянии  $K = \frac{p^2}{2m} \sim \frac{\hbar^2}{mz^2}$ . Откуда

$$z \sim \frac{\hbar^2}{me^2} \frac{(\epsilon+1)}{(\epsilon-1)}. \text{ Размерный множитель представляет из себя боровский радиус}$$

$$\frac{\hbar^2}{me^2} \approx 5.3 \cdot 10^{-9} \text{ см} = 0.53 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \text{ То есть, при близости диэлектрической проницаемости}$$

среды к 1 характерное удаление электронов от поверхности оказывается много больше характерного атомного и межатомного расстояний и, следовательно, на свойства электронного газа слабо влияют внутренние свойства жидкости, над которой формируется

электронный газ. Энергия основного состояния по той же оценке  $E_0 \sim \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}\right)^2 Ry$

оказывается порядка миллиэлектронвольта.

<sup>7</sup> Это связано с полным заполнением электронных оболочек инертного газа.

<sup>8</sup> Электрону невыгодно находиться рядом с атомом гелия, поэтому при проникновении в жидкий гелий электрон образует вокруг себя «пузырёк» радиуса  $R$ . Стенки пузырька можно считать стенками

бесконечно высокого барьера, тогда условие квантования  $kR \sim 1$  и энергия электрона  $E_e \simeq \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R^2}$ .

Кроме того, при создании пузырька проигрывается энергия поверхностного натяжения на стенках

$$E_{cm} = \sigma 4\pi R^2. \text{ Минимизируя полную энергию получаем } R^4 \simeq \frac{\hbar^2}{8\pi m \sigma} \text{ и } E \simeq 2\hbar \sqrt{2\pi \frac{\sigma}{m}}. \text{ Для}$$

коэффициента поверхностного натяжения гелия  $\sigma = 0.36 \text{ дин/см}$   $R \sim 10 \text{ \AA}$  и энергия образования пузырька  $E/k_B \simeq 800 \text{ К}$ . Эта оценка энергии уже сформировавшегося пузырька, она не учитывает дополнительную работу на преодоление поверхности при проникновении пузырька вглубь гелия.

<sup>9</sup> Теорема о вириале в классической механике доказывает, что для стабильной системы, связанной

потенциальными силами,  $2\langle K \rangle = -\sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k \cdot \vec{r}_k \rangle$ , где  $\langle K \rangle$  - средняя полная кинетическая

энергия,  $\vec{F}_k$  - сила, действующая на k-ую частицу.



Схема суммарного потенциала, действующего на электрон, показана на рисунке 5.

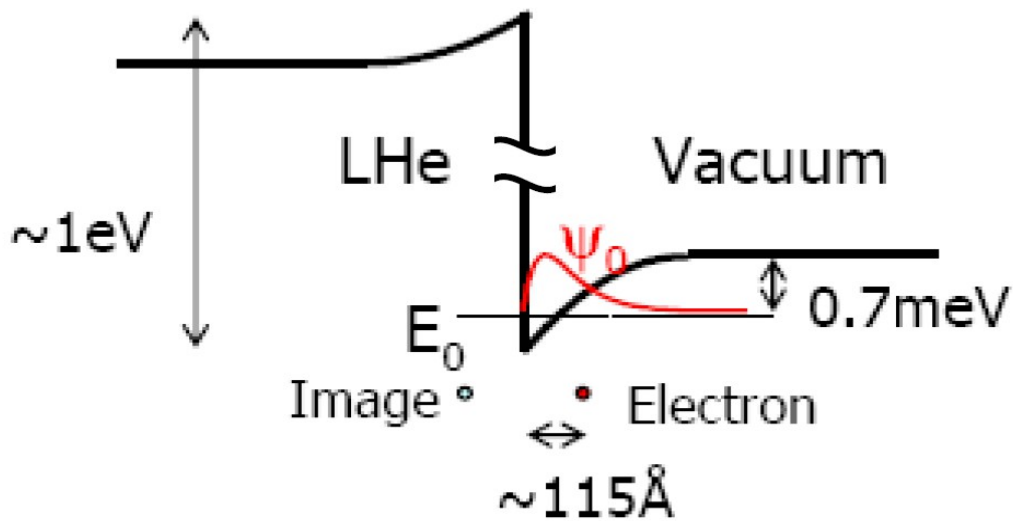


Рисунок 5: Схематическое изображение потенциала, действующего на электрон над поверхностью гелия. Из [14].

Спектр одиночного электрона над поверхностью гелия может быть легко найден. Потенциальная энергия зависит только от  $Z$ , в уравнении Шредингера разделяются переменные, в плоскости  $XY$  движение остаётся свободным. Уравнение для интересующей нас  $Z$ -зависящей части волновой функции имеет вид  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \xi}{dz^2} + \phi(z) \xi = E \xi$ .

Если принять потенциальный барьер для проникновения электрона в жидкость бесконечно высоким (он примерно на три порядка выше чем максимальное изменение потенциала заряда изображения), то  $\phi(z) \propto \frac{1}{z}$  и уравнение аналогично радиальной части уравнения Шредингера для водородоподобного атома с перенормированным зарядом ядра  $Z = \frac{(\epsilon - 1)}{4(\epsilon + 1)}$  ( $\phi(z) = -\frac{e^2(\epsilon - 1)}{4(\epsilon + 1)z}$ ). Соответственно, могут быть применены известные результаты для волновых функций атома водорода. Уровни энергии описываются соотношением  $E_n = -\frac{Z^2 e^4 m}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\left(\frac{(\epsilon - 1)}{4(\epsilon + 1)}\right)^2 \frac{13.6 \text{ эВ}}{n^2}$ . Для гелия энергии первых уровней равны -0.653 мэВ, -0.163 мэВ и -0.073 мэВ. Средние удаления электрона от поверхности в первых трёх состояниях равны [13] 114Å, 456Å и 1026Å, как и в борновом атоме  $\langle z \rangle_n = \langle z \rangle_1 n^2 = \frac{3}{2} \frac{1}{Z} \frac{\hbar^2}{m e^2} n^2 = \frac{3}{2} \frac{4(\epsilon + 1)}{(\epsilon - 1)} R_B n^2$  (здесь  $R_B$  - борновский радиус для водорода равный 0.53Å, численный множитель 3/2 возникает при вычислении средней координаты по водородоподобной волновой функции с  $l=0$  [15]).

Таким образом, имеет место размерное квантование и, при не слишком высокой плотности электронов (что реально выполняется), при температурах около 1 К заполненным оказывается только нижний уровень размерного квантования. Для модели

невозмущенных электронов в результате получим двумерный электронный газ.<sup>10</sup>

Максимальная плотность электронов в двумерном электронном газе над поверхностью гелия составляет около  $10^9 \text{ 1/см}^2$ , дальнейшее увеличение оказывается ограничено своеобразным механизмом неустойчивости: отталкивание электронов от поверхности гелия деформирует поверхность гелия и при большой концентрации электронов оказывается возможным «прорыв» поверхности гелия с формированием пузырька с электронами внутри гелия.

### Двумерный электронный газ в полупроводниковых структурах.

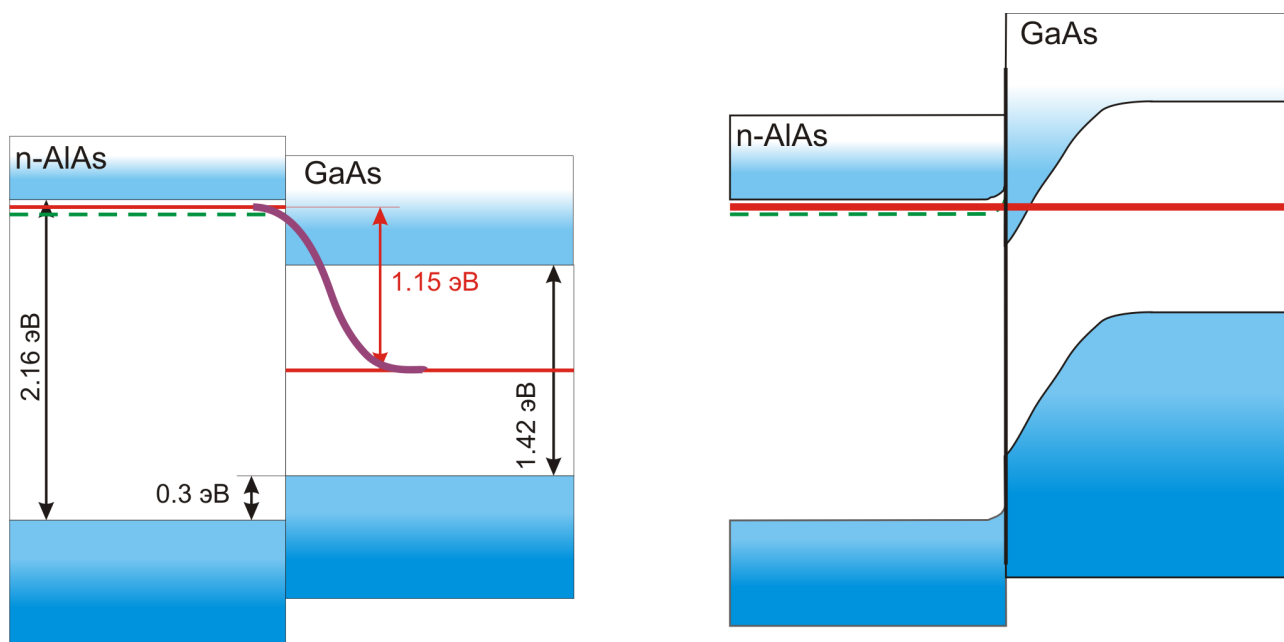


Рисунок 6: Построение энергетической диаграммы для гетероперехода между сильно легированным n-AlAs и чистым GaAs. Ширина запрещенной зоны и разрывы зон показаны в масштабе.

Напомним построение энергетической диаграммы полупроводниковой гетероструктуры: контакта двух полупроводников с разной шириной запрещенной зоны. Мы рассмотрим распространенную в физике низкоразмерных структур пару n-AlAs/GaAs (рисунок 6). По приближенному правилу Андерсона при рассмотрении зонных структур разнородных материалов в качестве общего начала отсчета энергии берется уровень минимальной энергии электрона в вакууме, от которого откладывается сродство электрона для получения положения дна зоны проводимости.<sup>11</sup> В случае контакта AlAs/GaAs дно зоны проводимости в узкозонном GaAs оказывается в действительности на 0.4эВ ниже дна зоны проводимости в AlAs. Современные технологии и близость параметров кристаллической решетки AlAs и GaAs позволяют получить практически атомно-гладкую границу между этими материалами и разрыв зон на границе практически не размывается.

<sup>10</sup> Квазидвумерный, так как, напомним, волновая функция имеет конечную протяженность вдоль Z. Для кулоновского потенциала можно найти дисперсию координаты Z пользуясь известными [15] результатами

$$\langle (z - \langle z \rangle_n)^2 \rangle_n = \langle z^2 \rangle_n - (\langle z \rangle_n)^2 = a_0^2 \left( \frac{n^2}{2} + \frac{n^4}{4} \right), \text{ где } a_0 \text{ — перенормированный}$$

первый борковский радиус. Для первого уровня относительная ширина пространственного распределения

$$\frac{\sqrt{\langle (z - \langle z \rangle_1)^2 \rangle_1}}{\langle z \rangle_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

<sup>11</sup> Подробности обсуждались в лекции «Контактные явления в полупроводниках».

Электроны могут переходить с примесных уровней n-AlAs в зону проводимости GaAs, возникающее при этом электрическое поле препятствует переходу. Устанавливаемая равновесная ситуация может быть получена схематическим построением энергетической диаграммы (рисунок 6). Оказывается, что доступная для электронов область в зоне проводимости *ограничена* вглубь слоя GaAs, что создаёт все предпосылки для наблюдения эффектов размерного квантования. Точное решение задачи об ограничивающем движении электронов потенциале сложно — для этого требуется совместное решение уравнений квантовой механики и электростатики, для многих качественных оценок можно считать, что удерживающий электроны потенциал создаёт треугольную потенциальную яму

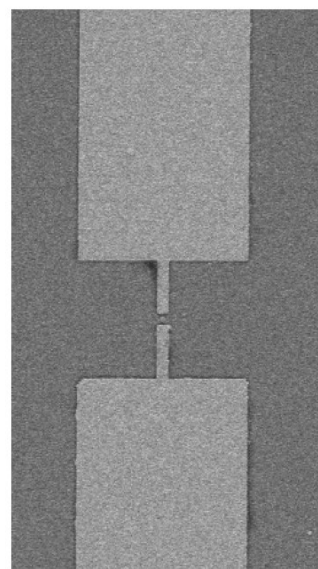
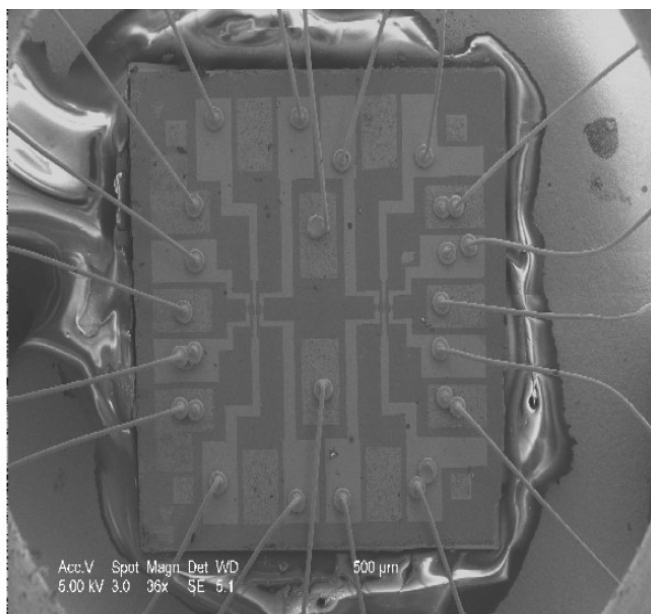
$$U(z) = \begin{cases} +\infty, & z < 0 \\ kz, & z > 0 \end{cases} .$$
 Подчеркнём также, что квазидвумерный электронный слой создаётся

за счёт электронов сильно допированного n-AlAs в чистом GaAs, что позволяет добиваться высокой подвижности носителей заряда в этом слое.

Типичная концентрация носителей в двумерном электронном слое в полупроводниковых структурах составляет  $10^{11} - 10^{12} \text{ 1/см}^2$ , в рекордных случаях достигается концентрация  $10^{13} \text{ 1/см}^2$ .

### **Получение низкоразмерных структур сложной формы и сложных профилей потенциальных ям.<sup>†</sup>**

Во-первых, отметим, что для исследования свойств низкоразмерной электронной системы её надо как-то сопрячь с измерительным оборудованием нашего трёхмерного мира. Необходимо подвести контакты и к управляющим электродам, и к двумерному электронному газу (для определённости рассматриваем двумерный электронный газ как основу всех прочих электронных низкоразмерных систем). Как мы уже отмечали при рассмотрении полупроводников, это сталкивается и с принципиальной проблемой создания хорошего омического контакта полупроводник-металл, что является часто отдельной технологической задачей. Для создания контакта с двумерным газом на границах образца создаются соединяющиеся с ним глубокие легированные области, на которые напыляются металлизированные контакты к которым микропайкой, микросваркой, лазерной сваркой или при помощи проводящего клея присоединяются контактные провода микронного диаметра. Пример микрофотографии такого прибора для исследования свойств низкоразмерного электронного газа показан на рисунке 7 [16]. Получающийся прибор («чип») далее монтируется на криостат.



*Рисунок 7 Слева: Микрофотография(сканирующая электронная микроскопия) прибора для исследования низкоразмерных электронных систем. Виден верх полупроводниковой гетероструктуры с различными контролирующими электродами и подводящими проводами. Размер кадра 500х500 мкм. Справа: Увеличенное изображение одного из электродов, размер зазора между узкими частями 400х400 нм. Из статьи [16].*

Приведём несколько примеров получения структур сложной формы и квантовых ям с более сложными профилями потенциала (за дополнительными примерами см. [1], [3]). Это скорее является примером развития технологии и просто иллюстрирует прогресс в этой области (см., например, [17]). Процесс получения таких структур сочетает достижения литографии с высоким разрешением и молекулярно-лучевой эпитаксии.<sup>12</sup> Процесс молекулярно-лучевой эпитаксии позволяет практически по атомным слоям «собирать» разные гетероструктуры, контролируя состав слоя и, например, заданным образом изменяя количество примесей. Литографический процесс (последовательное нанесение фоторезиста, его засвечивание, вытравливание, напыление очередного слоя по вытравленной маске) позволяет получать различные геометрические формы как полупроводниковых структур, так и контролирующих электродов. Применение при литографии наклонных пучков позволяет создавать трёхмерные объекты, например свободно подвешенные элементы (рисунок 8).

Характерные пространственный масштабы, контролируемые таким образом, это десятки ангстрем (несколько атомных слоёв!) в поперечном направлении (эпитаксия) и менее 100 нм в плоскости (литография).

<sup>12</sup> Мы не будем этого обсуждать в деталях, но необходимо иметь в виду что эти методы приготовления полупроводниковых структур являются достаточно сложными технологическими задачами, требующими и материалов высокой чистоты, и техники высокого вакуума, и «чистых комнат» («чистая комната» самого высокого класса ISO1 допускает наличие не более 10 частиц размером более 0.1 мкм на 1м<sup>3</sup> воздуха, в «нормальном» комнатном воздухе таких частиц около 10<sup>9</sup> штук 1м<sup>3</sup> воздуха). Литография с разрешением в десятки нанометров требует (по дифракционному пределу) использования ультрафиолетового или рентгеновского излучения, что в некоторых случаях делается на источниках синхротронного излучения. Поэтому полный комплекс таких работ выполняется в немногочисленных исследовательских группах по всему миру.

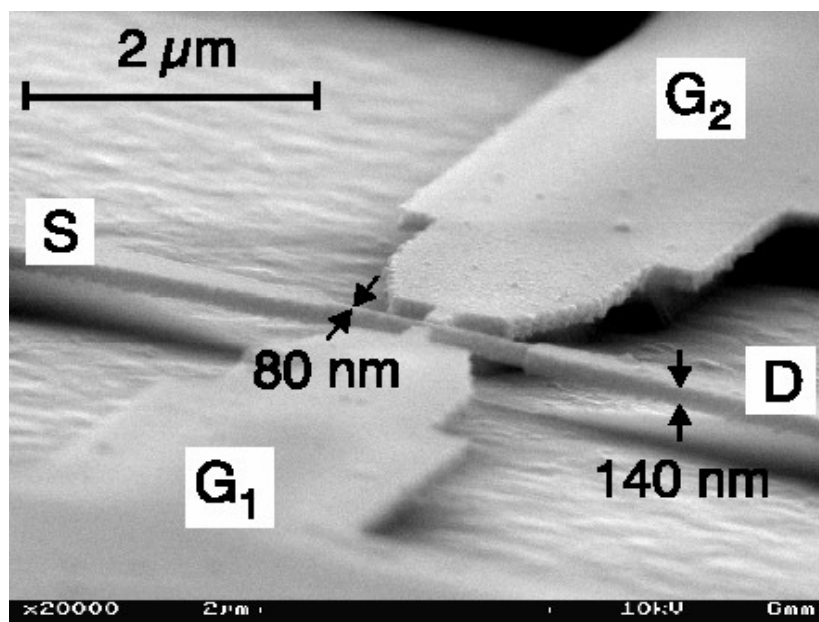


Рисунок 8 Полученное при помощи сканирующего электронного микроскопа изображение свободно подвешенного кремниевого «квантового провода». Обозначения: *S* и *D* — источник и сток, *G1* и *G2* — затворы. С сайта [17].

Добавлением к гетероструктуре затворов различной формы и приложением к ним контролируемого потенциала можно «вытеснить» электроны в двумерном слое из некоторых областей и таким образом добиться размерного квантования движения в плоскости.

Один из примеров такого рода (квантовый микромостик) показан на рисунке 9. На гетероструктуру дополнительно наносятся затворы, контролируя потенциал которых можно менять эффективное сечение канала между двумя «берегами». Пример фотографии реальной структуры (по обзору [18]) такого типа показан на рисунке 10.

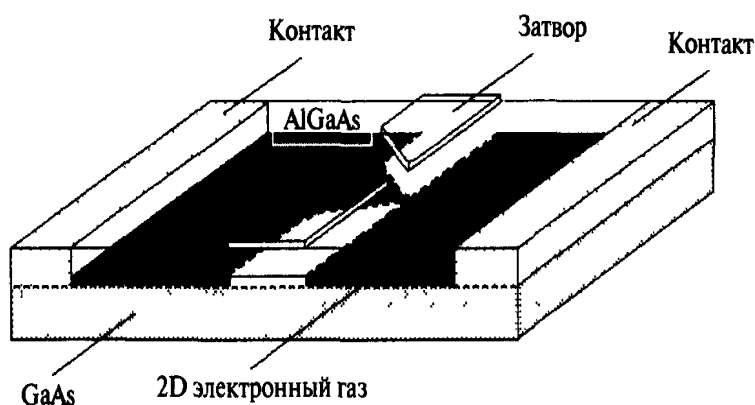


Рисунок 9: Схематическое изображение квантового микромостика. Черным цветом схематически отмечена область, в которой существует двумерный электронный газ. Из книги [1].

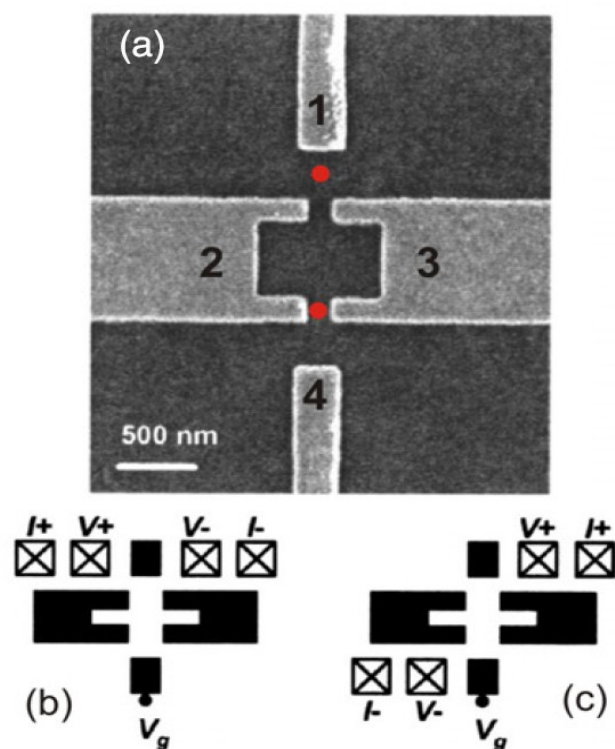


Рисунок 10 Сверху: Микрофотография (сканирующая электронная микроскопия) затворов на гетероструктуре из прибора, использовавшегося в опытах по квантованию одномерной проводимости. Снизу: две конфигурации эксперимента с таким прибором. Конфигурация с током через одномерный контакт (b) и через квантовую точку (c). Из обзорной статьи [18].

Придавая затворам сложную форму (например П-образные затворы 2 и 3 на рисунке 10) можно выделить небольшой «островок»<sup>13</sup> двумерного электронного газа, который будет обладать свойствами квантовой точки.

В качестве примера контролируемого чередования слоёв разных материалов приведём результат работы [19] (рисунок 11). Видно, что действительно получаются чёткие границы между материалами, а слои имеют регулярную структуру. Поэтому удаётся добиться высоких подвижностей носителей в двумерном электронном газе: электроны движутся по практически идеальному кристаллу. Концентрацию носителей в двумерном электронном газе можно контролировать при помощи управляющих электродов, зависимость измеряемой подвижности от концентрации показана на рисунке 12.

<sup>13</sup> Хотя, если ассоциировать подвижные электроны с жидкостью, то это скорее выделение «озера» из «моря» двумерного электронного газа.

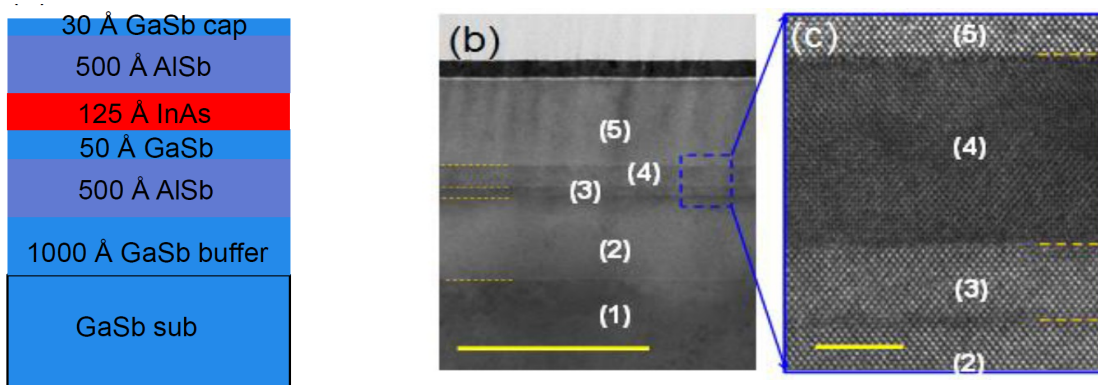


Рисунок 11 Слева: схема чередования слоёв в сложной гетероструктуре. Красным цветом выделен слой InAs, в котором формируется потенциальная яма для электронов. В центре и справа: изображения (туннельная электронная микроскопия) среза реальной гетероструктуры. Горизонтальная жёлтая линия задаёт масштаб, она равна 100 нм для центрального рисунка и 5 нм для правого. Жёлтый пунктир показывает границы слоёв. Нумерация слоёв: (1) буферный слой GaSb, (2) AlSb, (3) GaSb (потенциальная яма для дырок), (4) InAs (потенциальная яма для электронов), (5) AlSb. Из работы [19].

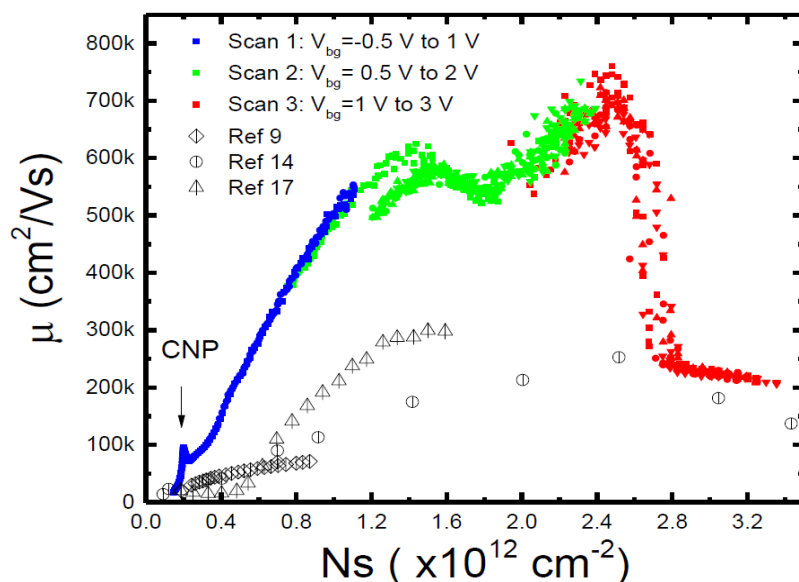


Рисунок 12 Зависимость подвижности электронов от концентрации носителей в гетероструктуре, показанной на рисунке 11. Из работы [19].

Наконец, отметим, что, чередуя слои различных материалов или плавно меняя состав AlGaAs, можно контролируемым образом получать различные формы ограничивающего поперечное движение электронов потенциала. Простейшим качественным примером будет слоистая структура AlAs-GaAs-AlAs.<sup>14</sup> Как мы рассмотрели ранее на гетеропереходе AlAs-GaAs в слое GaAs возникает треугольная потенциальная яма для электронов. Если будет тонкая прослойка GaAs между двумя слоями AlAs, то суммируя два треугольных потенциала получим прямоугольную потенциальную яму. Плавно меняя состав, можно создать и более экзотические конфигурации: например параболическая яма с узким барьером (рисунок 13). Это позволяет (помимо возможных технических приложений) экспериментально смоделировать классические задачи квантовой механики про поведение частицы в

<sup>14</sup> Точнее, контакт подходящим образом допированного AlGaAs, чтобы избежать сложностей с прямоzonностью и непрямоzonностью чистых соединений.

удерживающем потенциале разного профиля.

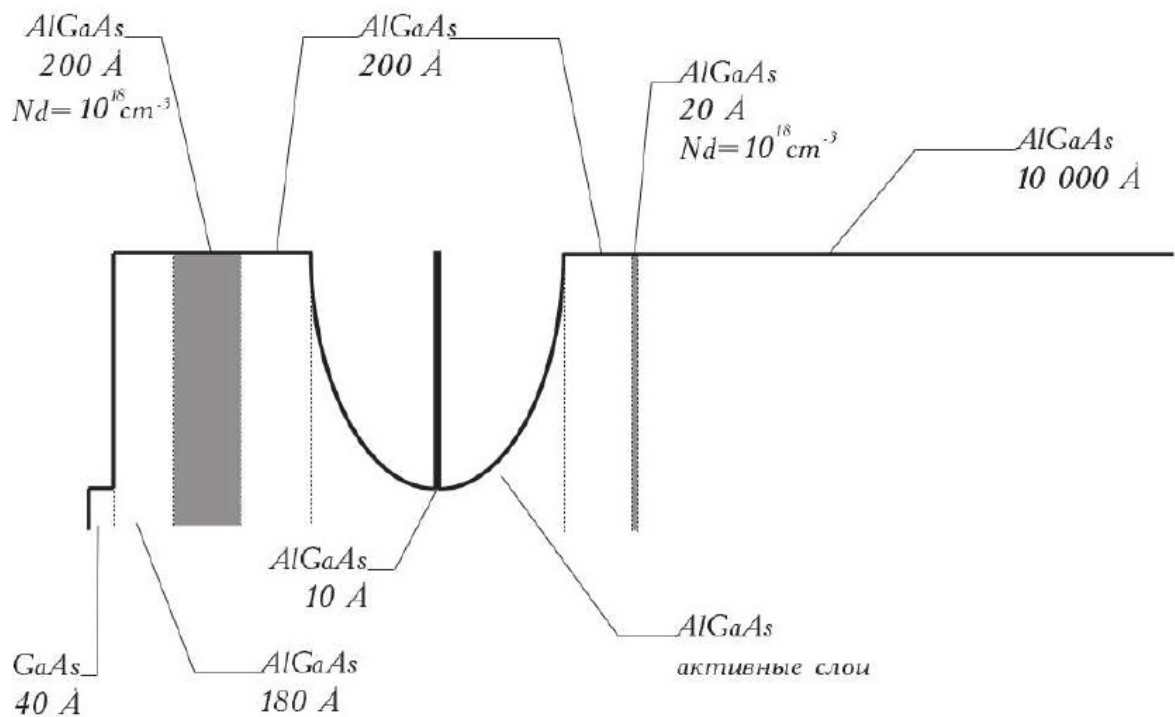


Рисунок 13: Пример гетероструктуры, в которой формируется параболическая яма с узким барьером. Заштрихованные слои показывают области с донорным допированием, являющиеся источниками электронов для активной части структуры. Из книги [3].



# Взаимодействие электронов в низкоразмерных системах.

## Критерии идеальности двумерного электронного газа.

При достаточно низких температурах двумерный электронный газ оказывается вырожденным и заняты оказываются только состояния ниже некоторой энергии Ферми. Двумерный газ удобно характеризовать двумерной плотностью состояний  $n$ , измеряемой в  $1/\text{см}^2$ . Типичные значения поверхностной плотности в реальных структурах имеют порядок от  $10^9 1/\text{см}^2$  для электронов над поверхностью гелия до  $10^{12} \dots 10^{13} 1/\text{см}^2$  в полупроводниковых структурах.

Вычисление импульса Ферми производится абсолютно аналогично трёхмерному случаю:

$$n = 2 \frac{\pi k_F^2}{(2\pi)^2}. \text{ Здесь множитель 2 связан со спиновым вырождением, } \pi k_F^2 \text{ это «объём»}$$

занимаемый электронным газом в  $k$ -пространстве. Делится на  $(2\pi)^2$  (а не на куб, как было в трёхмерном случае), так как учитывается только движение в плоскости.

Отсюда  $k_F = \sqrt{2\pi n}$ . Для энергии Ферми  $\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \pi \frac{\hbar^2}{m} n$ . Для массы свободного электрона и концентрации  $10^{10} 1/\text{см}^2$   $\epsilon_F \approx 0.28 \text{ K}$ .

Таким образом, газ электронов над поверхностью гелия при достижимых условиях (температуры около градуса, концентрация до  $10^9 1/\text{см}^2$ ) будет невырожден, а в полупроводниковых структурах (где больше концентрации электронов и меньше их эффективные массы) уже при температурах порядка 1К можно получить вырожденный двумерный электронный газ.

Насколько обоснованно приближение невзаимодействующих электронов в двумерных системах? Для ответа на этот вопрос необходимо сравнить энергию кулоновского взаимодействия электронов с характерной кинетической энергией (энергией Ферми для вырожденного электронного газа и температурой для невырожденного). При поверхностной плотности зарядов  $n$  энергия кулоновского взаимодействия с соседями  $U \sim \frac{e^2 \sqrt{n}}{\epsilon}$ , где  $\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость, которая может быть порядка 10 для полупроводников. Откуда для вырожденного газа получаем условие:

$$\pi \frac{\hbar^2}{m} n \gg \frac{e^2 \sqrt{n}}{\epsilon}$$
$$n \gg \left( \frac{m e^2}{\pi \epsilon \hbar^2} \right)^2.$$

Для массы свободного электрона и  $\epsilon = 1$  получим  $n \gg 3 \cdot 10^{15} 1/\text{см}^2$ . Для полупроводников с  $m \approx 0.1 m_0$  и  $\epsilon \approx 10$  оценка уменьшится на 4 порядка до  $3 \cdot 10^{11} 1/\text{см}^2$ . Таким образом при реальных концентрациях электронов до  $\sim 10^{12} 1/\text{см}^2$  на самом деле в режиме вырожденного ферми-газа взаимодействие окажется сильным. Подчеркнём также специфику вырожденных ферми-систем: эффект взаимодействия оказывается тем слабее, чем больше концентрация.

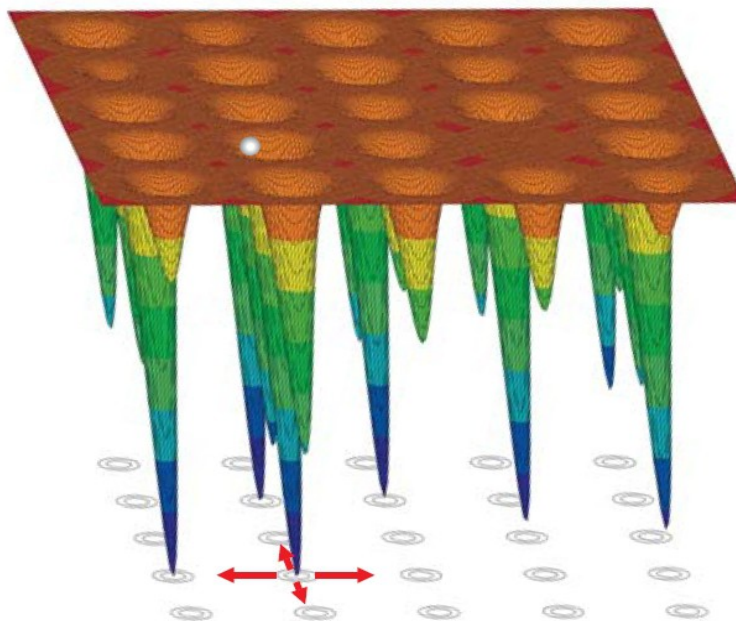
Для невырожденного газа условие пренебрежения взаимодействием классическое, энергия взаимодействия должна быть мала в сравнении с температурой:

$$T \gg \frac{e^2 \sqrt{n}}{\epsilon}$$

$$n \ll \left( \frac{\epsilon T}{e^2} \right)^2 .$$

Для  $\epsilon=1$  и  $T=1\text{К}$  получим  $n \ll 4 \cdot 10^5 \text{1/см}^2$ . Здесь условие слабости взаимодействия оказывается интуитивным с классической точки зрения — взаимодействие ослабевает при понижении концентрации. Однако и здесь при реальных концентрациях электронов над поверхностью гелия  $\sim 10^8 \dots 10^9 \text{1/см}^2$  электроны оказываются сильно взаимодействующими.

### **Взаимодействие со случайным потенциалом и локализация.**



*Рисунок 14 Схематическое представление случайной модуляции потенциала для электрона в кристалле. Из статьи [8].*

Помимо взаимодействия электронов друг с другом, в реальном кристалле важно учитывать взаимодействия электронов с возможными неоднородностями кристаллической решётки.

Мы уже знаем, что в идеальном периодическом потенциале волновые функции электронов в кристалле могут быть представлены в блоховском виде  $\psi = e^{i\vec{k}\vec{r}} u(\vec{r})$ , где  $u(\vec{r})$  периодическая функция. При этом энергия электрона оказывается его функцией квазиимпульса и движение электрона в кристалле может быть с некоторыми оговорками представлено, как свободное движение некоторой квазичастицы. Если в кристалле есть дефекты — а в реальном кристалле они есть всегда, то идеальная периодичность потенциала нарушается. Если дефектов мало и они «не слишком сильные», то такую неидеальность кристалла можно описать как добавление к формально идеальному периодическому потенциалу некоторой добавки.

Тогда мы перейдём от задачи о свободном движении квазичастиц в идеальном кристалле к задаче о движении квазичастиц в некотором случайном потенциале. Останется ли это движение свободным: сможет ли квазичастица удалиться «на бесконечность» при наличии такого случайного потенциала? Приведёт ли появление дополнительного беспорядка просто

к некоторому изменению длины пробега квазичастиц, или последствия будут более драматическими?

Оказывается, что ответ принципиально зависит от пространственной размерности. Мы знаем из квантовой механики, что в трёхмерном случае в потенциальной яме появляется локализованное состояние только если яма достаточно глубокая, а в одномерной потенциальной яме хотя бы одно такое состояние есть всегда. В двумерном случае оказывается, что локализованное состояние также есть для произвольной ямы, хотя для мелкой ямы глубина этого энергетического уровня экспоненциально мала. Это означает, что при  $T=0$  квазичастица в трёхмерном несовершенном кристалле останется делокализованной, пока случайный потенциал не создаст достаточно большую потенциальную яму, а вот в двумерном или одномерном несовершенном кристалле частица всегда попадёт в локализованное состояние. В реальном кристалле сколь угодно малая неидеальность потенциала будет иметься на каждом узле кристалла — а это означает, что при  $T=0$  в одномерном и двумерном кристалле все электроны попадут в локализованные состояния и, например, проводимости у такого кристалла не будет.

На эту же проблему можно взглянуть с другой стороны: если начать рассмотрение кристалла с предела сильной связи и учесть, что на каждом узле глубина ямы в «реальном» кристалле индивидуальна, то, так как положение уровней в яме тоже станет индивидуально, туннелирование между узлами окажется запрещено законом сохранения энергии. В трёхмерном случае такое рассмотрение позволяет оценить критическую степень беспорядка, приводящую к локализации: если разброс положения локальных уровней окажется больше, чем дисперсия делокализованного электрона, то электроны останутся локализованными. Наглядной аргументации об обязательности локализации в одномерном и двумерном случае в этом описании автору не известно.

За разработку теории локализации Ф.Андерсон был удостоен Нобелевской премии по физике 1977 года. Короткий обзор по явлению локализации может быть найден в статье [8].

### ***Пайерлсовская неустойчивость одномерного металла.<sup>†</sup>***

Рассмотрим модельный случай одномерного металла: цепочки атомов, каждый из которых отдаёт один электрон в резервуар электронов проводимости. Считаем электроны невзаимодействующими между собой, но взаимодействующими с решёткой. Это взаимодействие приведёт к возникновению зонной структуры. В спектре электронов на границе зоны Бриллюэна  $\pm \frac{\pi}{a}$  возникнут разрывы и запрещённые зоны. Фермиевский волновой вектор при наших условиях равен  $\frac{\pi}{2a}$ , первая зона Бриллюэна оказывается наполовину заполнена.

Пусть теперь наша цепочка атомов димеризуется: атомы попарно сближаются (например, все чётные атомы немного смещаются к своим соседям справа). Эта деформация кристалла конечно приводит к потере упругой энергии пропорциональной квадрату смещения. Посмотрим, что при этом произойдёт с электронным спектром.

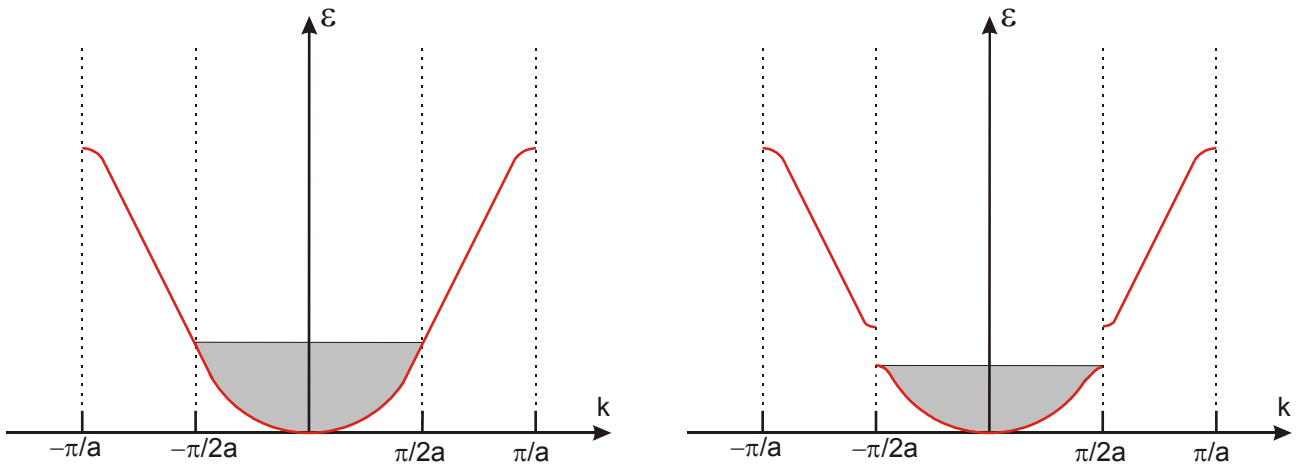


Рисунок 15: Схема заполнения электронных состояний до (слева) и после (справа) димеризации цепочек.

При удвоении периода цепочки изменится и период кристалла — теперь он равен  $2a$ , соответственно первая зона Бриллюэна в  $k$ -пространстве сжимается вдвое. На её границе откроются запрещённые зоны. Но количество электронов не изменилось и теперь новая первая зона Бриллюэна заполнена полностью — то есть цепочка перестаёт быть металлом и становится диэлектриком. Электроны становятся локализованы и не могут переносить заряд вдоль цепочки.

Вспоминая результаты модели слабой связи, мы можем заметить, что при открытии запрещённой зоны максимальная энергия электронов в первой зоне понизится. То есть для электронного газа эта димеризация выгодна, она понижает кинетическую энергию электронов.

Вопрос о балансе между проигрышем в упругой энергии и выигрышем в кинетической энергии выходит за рамки нашего курса<sup>15</sup>, поэтому мы приведём ответ для сведения: потеря упругой энергии, конечно же,  $\propto \delta^2$ , где  $\delta = \frac{\Delta a}{a}$  — деформация решётки при димеризации, а выигрыш в кинетической энергии оказывается  $\propto \delta^2 |\ln \delta|$ . То есть, такая деформация оказывается *всегда* выгодна при достаточно низкой температуре: в одномерном металле при понижении температуры будет происходить переход в диэлектрическое состояние, сопровождаемый изменением периода решётки. Этот переход называется пайерлсовским переходом.

### Состояние вигнеровского кристалла.

Если же взаимодействие между частицами оказывается достаточно сильным, то в двумерной системе может реализоваться необычное «упорядоченное» состояние, называемое

<sup>15</sup> Вычисление прямолинейно. При возникновении димеризации перестраивается спектр только в окрестности поверхности Ферми. Рассмотрим одну из точек поверхности Ферми с  $k = +k_F$ . До димеризации энергия электронов вблизи поверхности Ферми  $\varepsilon_0 \approx \varepsilon_F + \hbar v_F (k - k_F)$ . После димеризации открывается запрещённая зона и энергия заполненных электронных состояний  $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_F - \sqrt{\delta^2 + (\hbar v_F (k - k_F))^2}$ . Выигрыш в энергии  $\Delta E \propto \int (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) dk$ . Так как в глубине заполненной зоны изменения малы, то можно сделать нижний предел интегрирования произвольным  $\Delta E \propto \int_{-A}^0 \left( x + \sqrt{\left(\frac{\delta}{\hbar v_F}\right)^2 + x^2} \right) dx$ . При малом  $\delta$  в интеграле основным слагаемым окажется  $\delta^2 \ln \delta$ .

вигнеровским<sup>16</sup> кристаллом. В этом состоянии электроны локализируются и формируют, с экспериментальной точностью, треугольную решётку. Критерием формирования этого состояния является достаточно сильное превосходство потенциальной энергии взаимодействия над кинетической энергией движения частиц:  $\frac{U}{K} = \Gamma$ , коэффициент  $\Gamma$  для двумерного газа электронов оценивается в 100-150.

Подчеркнём, что речь не идёт о кристалле в его традиционном смысле — как мы показали выше двумерный кристалл не может существовать при конечной температуре. Строгое обоснование того что происходит выходит за рамки курса, переход в состояние вигнеровского кристалла является переходом типа Березинского-Костерлица-Таулеса<sup>17</sup>, специфичного для двумерных систем [20]. В системе бесконечного размера в этом упорядоченном состоянии при конечной температуре не будет «настоящего» трансляционного порядка<sup>18</sup>, характерного для «настоящих» кристаллов, а будут иметься незатухающие корреляционные функции более сложного вида  $\zeta(\vec{R}) = \langle (\vec{r}(\vec{R} + \vec{a}) - \vec{r}(\vec{R})) \cdot (\vec{r}(\vec{a}) - \vec{r}(0)) \rangle$ , описывающие относительные смещения атомов внутри двух пар, разнесённых на расстояние  $\vec{R}$ . Однако с точки зрения эксперимента медленная (логарифмическая) расходимость обычной корреляционной функции приводит к тому, что в экспериментальной ячейке конечного размера за счёт взаимодействия со стенками или какими-то неоднородностями стабилизируется обычная регулярная треугольная решётка.

Представляет интерес вопрос о разрушении (плавлении) вигнеровского кристалла. Здесь есть два предельных случая, зависящих от того вырождена или не вырождена неупорядоченная фаза.

При  $T=0$  из состояния вигнеровского кристалла в состояние электронной жидкости можно перейти, увеличивая плотность электронов. Это называют квантовым или холодным плавлением вигнеровского кристалла. Вспоминая полученные нами чуть ранее результаты, критерий перехода можно записать как  $\Gamma \pi \frac{\hbar^2}{m} n = \frac{e^2 \sqrt{n}}{\epsilon}$ , откуда  $n_c = \left( \frac{m e^2}{\Gamma \pi \epsilon \hbar^2} \right)^2$ .

Для электронов над поверхностью гелия это даёт концентрацию  $n_c \sim 10^{10} \dots 10^{11} 1/\text{см}^2$ , недостижимую в силу нестабильности электронного газа над гелием при таких концентрациях. Для полупроводниковых структур получаем концентрацию перехода порядка  $10^7 \dots 10^8 1/\text{см}^2$ , которая наоборот оказывается маленькой. Таким образом при  $T=0$  электронный газ над гелием (напомним, для электронов над гелием  $\epsilon_F \sim 10 \text{ мК}$ ) будет в состоянии вигнеровского кристалла, а в полупроводниковых структурах — в состоянии электронной жидкости. Подчеркнём ещё раз специфику вырожденных ферми-систем: «твёрдой» фазе соответствует менее плотная фаза, а «жидкой» фазе — более плотная.

Тепловое плавление вигнеровского кристалла с переходом в невырожденную жидкую фазу может наблюдаться в электронном газе над поверхностью гелия. Критерий перехода:

16 Юджин Вигнер (лауреат Нобелевской премии 1963 года «за вклад в теорию атомного ядра и элементарных частиц, особенно с помощью открытия и приложения фундаментальных принципов симметрии») в 1934 году рассмотрел задачу о поведении взаимодействующих электронов и предсказал возникновение «твёрдой» (кристаллической) фазы при некоторых условиях.

17 Джон Костерлиц и Дэвид Таулес являются лауреатами Нобелевской премии по физике 2016 года «за открытие топологических фазовых переходов и топологических фаз вещества».

18 Трансляционный порядок подразумевает, что, задав положение одного атома (для простого случая базиса, содержащего один атом), мы можем точно указать положения остальных атомов.

$$\Gamma T = \frac{e^2 \sqrt{n}}{\epsilon}$$

$$T_c = \frac{e^2}{\Gamma \epsilon} \sqrt{n_c} \propto \sqrt{n_c}$$

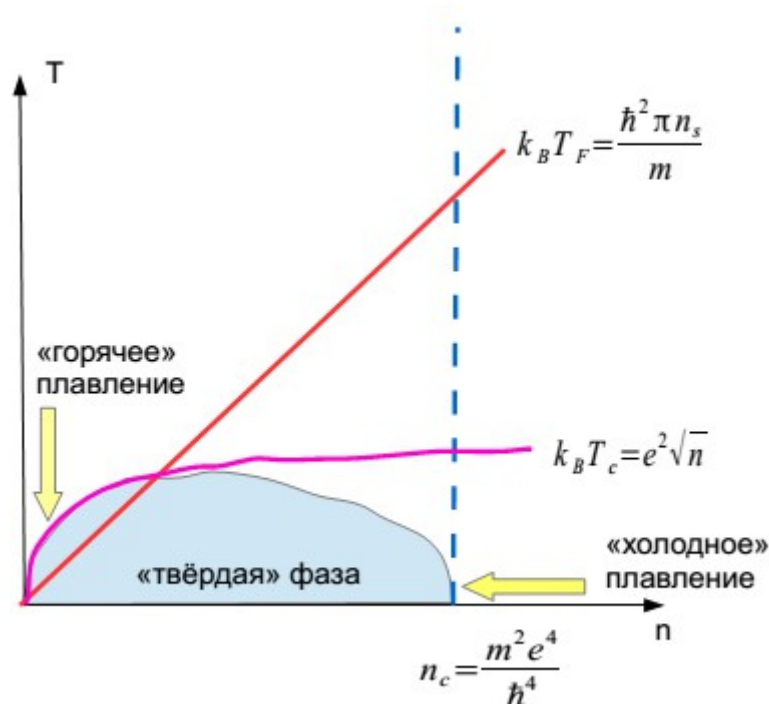


Рисунок 16: Схематическое построение фазовой диаграммы вигнеровского кристалла

Может показаться, что условия «холодного» и «горячего» плавления противоречат друг другу, но это не так. Во-первых, нужно отметить, что так как «твёрдая» и «жидкая» фазы отличаются по симметрии, то фаза вигнеровского кристалла на плоскости  $(n, T)$  со всех сторон отделена от «жидкой» фазы. Для грубого качественного анализа положим  $\epsilon = 1$  и построим на плоскости  $(n, T)$  три кривые: температуру Ферми  $k_B T_F = \frac{\hbar^2 \pi n_s}{m}$ , оценку

для концентрации «холодного» плавления  $n_c = \frac{m^2 e^4}{\hbar^4}$  и оценку для температуры «горячего»

плавления  $k_B T_c = e^2 \sqrt{n}$ . Мы не учитываем (вообще говоря, большие) множители отношения средней кинетической и потенциальной энергий, учёт которых не изменит качественно ответ. Заметим, что температура Ферми при концентрации холодного плавления

$$k_B T_F(n_c) = \pi \frac{m e^4}{\hbar^2} = 2\pi R_y, \text{ где } R_y = 13.6 \text{ эВ}, \text{ а температура горячего плавления при той}$$

же концентрации  $k_B T_c(n_c) = \frac{m e^4}{\hbar^2}$ . Так как  $\sqrt{n}$  вблизи нуля имеет бесконечную

производную, то при малых концентрациях всегда найдется область  $T_c \gg T_F$ , в которой жидкая фаза получается «горячим» плавлением. Грубая оценка для максимальной температуры «горячего» плавления это пересечение кривых  $T_c$  и  $T_F$ . При приближении по концентрации к  $n_c$  при низких температурах мы действительно оказываемся глубоко под прямой  $T_F(n)$ , т.е.  $T \ll T_F$ . Роль температуры вблизи концентрации холодного плавления сведётся к дополнительному разрушению упорядоченной фазы, что позволяет качественно провести фазовую границу (рисунок 16).

Состояние вигнеровского кристалла наблюдалось для электронов над поверхностью жидкого

гелия. Одно из наиболее чётких экспериментальных доказательств связано с возникновением при понижении температуры поглощения в мегагерцовом диапазоне [21].

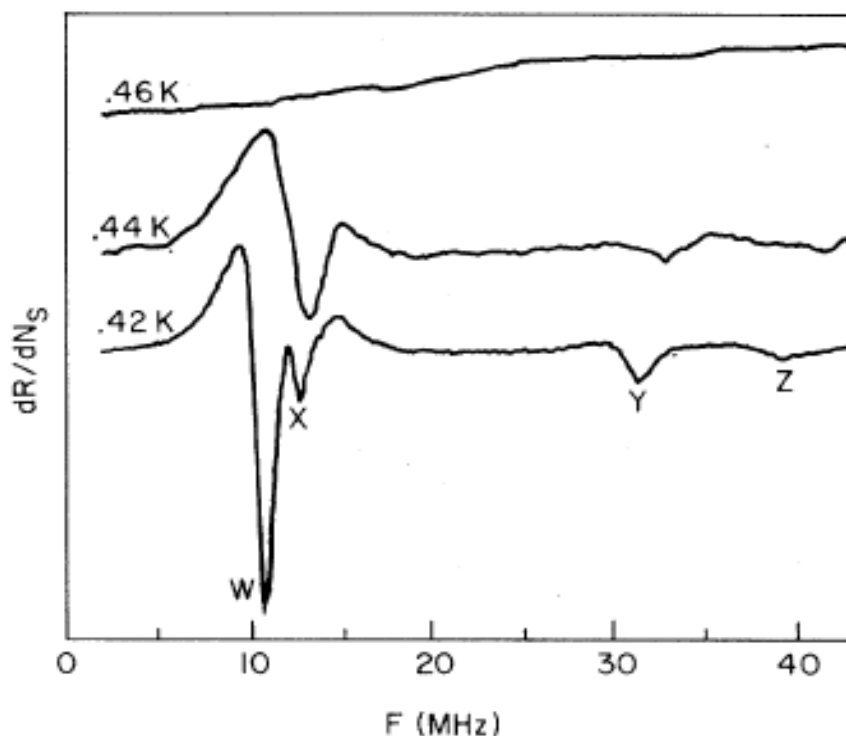


Рисунок 17: Экспериментальные записи линии, демонстрирующие возникновение плазмон-риплонных резонансов. Из работы [21]

Идея этого эксперимента связана с тем, что электроны взаимодействуют с поверхностью гелия, деформируя её (этот же механизм ответственен за предел устойчивости электронного газа над поверхностью гелия). При приложении радиочастотного излучения электроны колеблются, создавая периодические деформации поверхности. Это возбуждает поверхностные волны, риплоны, спектр и свойства которых в гелии хорошо изучены. В жидкой фазе, когда положения электронов нескоррелированы, положения центров генерации риплонов («ямки» под электронами) также нескоррелированы и никаких резонансных эффектов не возникает. При формировании скоррелированной структуры вигнеровского кристалла возникает возможность возникновения резонансных эффектов, которые могут быть рассчитаны [13]. В частности [13], положение резонансов Y и Z на рисунке 17 с точностью 2% соответствует риплонам с волновым вектором кратным 3 и 4 векторам обратной решётки для треугольной структуры вигнеровского кристалла. По модельным расчётам риплоны на удвоенном векторе обратной решётки для треугольной решётки не возбуждаются, а расщепление пика соответствующего основному резонансу на одинарном волновом векторе обратной решётки объясняется перестройкой спектра риплонов из-за взаимодействия с плазменными колебаниями электронной системы. Аналогичный расчёт для квадратной решётки даёт другие индексы возбуждаемых волновых векторов риплонов (1,2,4) [13], то есть наблюдаемая картина спектра плазмон-риплонных возбуждений также доказывает формирование именно треугольной решётки.

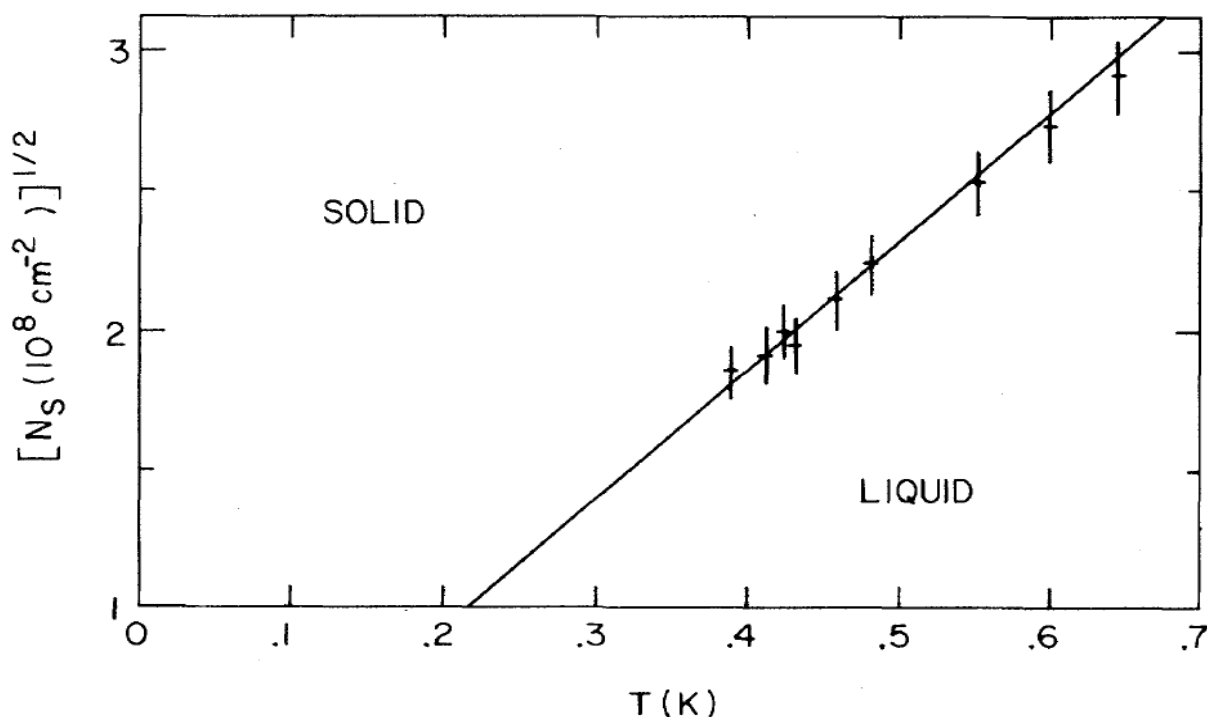


Рисунок 18: Фазовая диаграмма для двумерного электронного газа над поверхностью гелия. Из работы [21].

Полученная фазовая диаграмма (рисунок 18) соответствует корневой зависимости  $T_c(n)$  для теплового плавления вигнеровского кристалла.

В двумерном электронном газе в гетероструктурах электроны также взаимодействуют друг с другом. Однако из-за малой эффективной массы электрона в полупроводнике ( $m^* \sim 0.1 m_0$ ) и большой диэлектрической проницаемости среды ( $\epsilon \sim 10$ ) критическая концентрация холодного плавления  $n_c = \left( \frac{me^2}{\Gamma \pi \epsilon \hbar^2} \right)^2$  оказывается наоборот слишком маленькой, порядка

$10^7 \dots 10^8 \text{ 1/cm}^2$ . Поэтому двумерный электронный газ в гетероструктурах находится как правило в «жидком» состоянии, общепризнанных свидетельств формирования вигнеровского твёрдого состояния в этих системах нет. Поиск состояния вигнеровского кристалла в гетероструктурах ведётся<sup>19</sup>, но на практике эффекты локализации на неоднородностях оказываются более важными в этих системах.

<sup>19</sup> Одним из ожидаемых эффектов при формировании такого состояния является исчезновение металлической проводимости двумерного электронного газа при понижении концентрации электронов ниже критической (при холодном плавлении «жидкой» фазе соответствуют большие концентрации). Но тот же эффект будет демонстрироваться при локализации электронов на остаточных дефектах, а в случае малых концентраций электронов эти два эффекта трудно достоверно различить.



## Квантование одномерной проводимости.

Рассмотрим одномерный проводник, в котором электроны движутся в баллистическом режиме: то есть длина пробега электронов превышает длину образца. Концы этого проводника предполагаются подсоединёнными к массивным «обычным» проводникам, иногда называемым «берегами» этого контакта. Это означает, что на концах проводника электроны находятся в равновесии с берегами (в частности, характеризуются той же температурой и тем же уровнем химического потенциала).

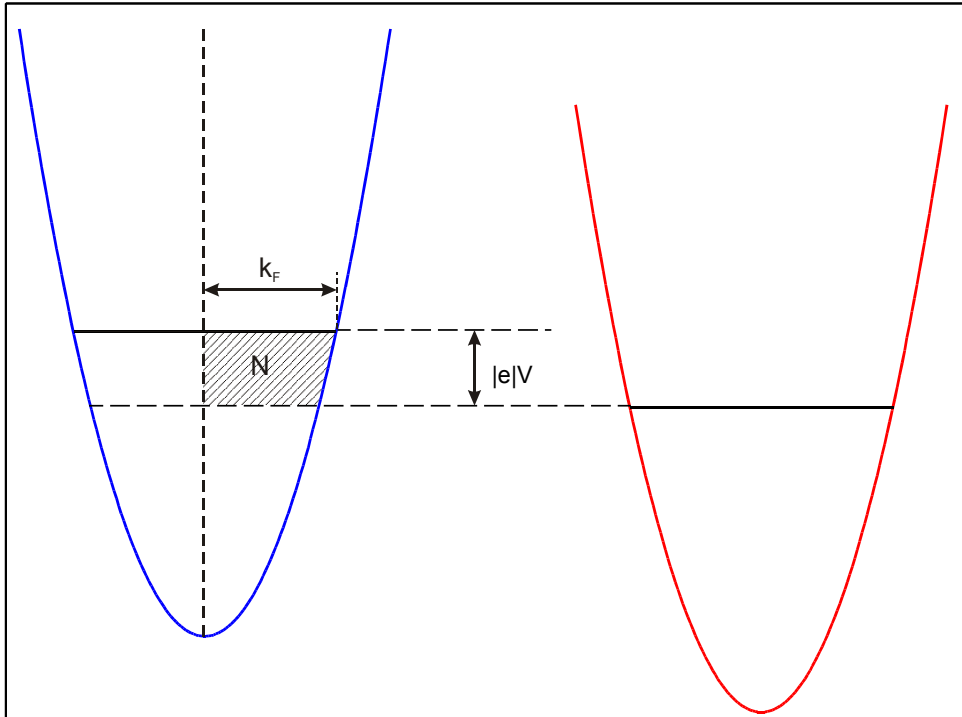


Рисунок 19: Зонная схема электронных состояний слева и справа от проводника. Штриховкой показаны состояния, участвующие в переносе заряда по проводнику.

Если к берегам приложить разность потенциалов  $V$ , то уровень химического потенциала на одном из контактов понизится и для электронов, пролетающих через контакт, возникнет возможность попадать на свободные состояния. Возникнет ток  $J = N |e| v_F$ , где  $N$  - число электронов на единицу длины проводника, участвующих в переносе тока (см. рисунок 20).

В одномерном случае  $N = \frac{1}{2} D(E_F) |e| V = |e| V \cdot 2 \left( \frac{d}{dE} \frac{k}{2\pi} \right) \Big|_{E=E_F}$ , здесь множитель  $\frac{1}{2}$  в первом равенстве отражает учёт только электронов, движущихся в одном направлении, множитель 2 во втором равенстве связан со спином,  $\frac{k}{2\pi}$  в одномерном случае есть число состояний на единицу длины проводника, соответствующих движению в заданную сторону.

Далее  $\frac{1}{2\pi} \frac{dk}{dE} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dE} \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{k}$ , а  $J = e^2 \frac{\hbar k_F}{m} 2V \frac{1}{2\pi} \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{k_F} = 2 \frac{e^2}{h} V$ .

Таким образом, независимо от вида проводника, его проводимость должна быть равна

$$\sigma = 2 \frac{e^2}{h} = 2G_0 \approx \frac{1}{12.9 \text{ КОм}}, \text{ где } G_0 = \frac{e^2}{h} \approx \frac{1}{23.8 \text{ КОм}} - \text{квант проводимости. Однако, хотя}$$

одномерная проводимость и выражается через фундаментальные константы, её практическое измерение требует наличие «обычных» электронных резервуаров по сторонам от проводника,

что вносит систематическую ошибку в измерение проводимости. Поэтому в метрологических целях использование этого эффекта оказалось непрактичным.

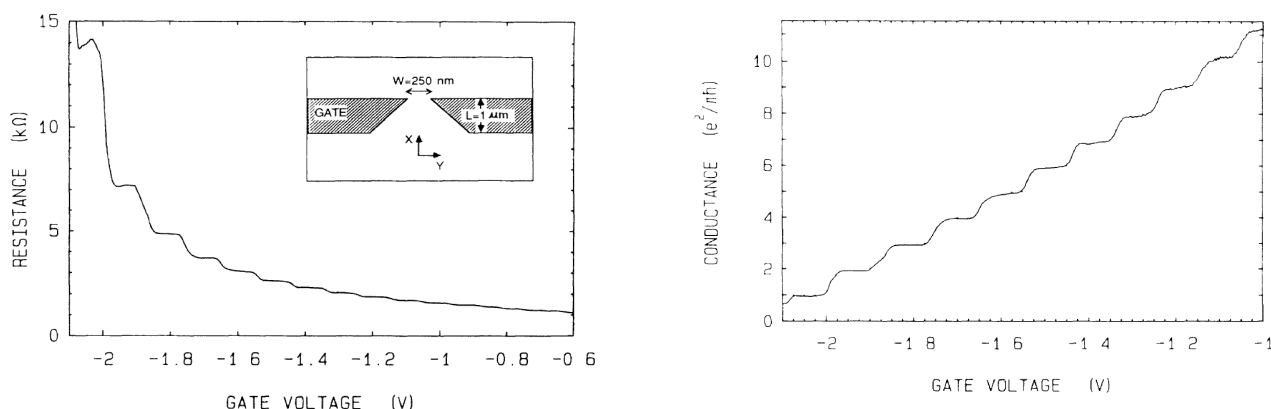


Рисунок 20: Слева: зависимость сопротивления точечного контакта от напряжения на затворе, на вставке показана схема точечного контакта. Справа: квантование проводимости (в единицах  $2 \frac{e^2}{h}$ ) как функция напряжения на затворе. Температура опыта 0.6K. Из работы [22].

Одномерные проводящие каналы можно получить экспериментально устанавливая затворы подобранной формы над двумерным электронным газом. В таких опытах наблюдают проводимость с целым числом квантов проводимости в зависимости от «ширины» канала. Это связано с тем, что при достаточно большой ширине канала в нём формируется несколько независимых мод для распространения электронов (оказываются заполнены несколько зон размерного квантования по ширине канала). Аналогией этого является распространения электромагнитных волн по волноводам: для заданной длины волны существуют размеры волновода, при которых по волноводу распространяется только волна определённого типа (с определёнными поляризациями полей), а при увеличении размера волновода он переходит в многомодовый режим. Пример данных, полученных на системе такого типа из работы [22] показан на рисунке 19. В этой работе при помощи затвора в двумерном электронном газе создавался точечный контакт, ширина которого регулировалась напряжением на затворе от 0 до 360 нм. Наблюдалось более 10 ступенек в проводимости с шагом в квант проводимости

$$\sigma = 2 \frac{e^2}{h} .$$

## Двумерная электронная система в квантующем магнитном поле. Основные факты о квантовом эффекте Холла.

### Историческое отступление.

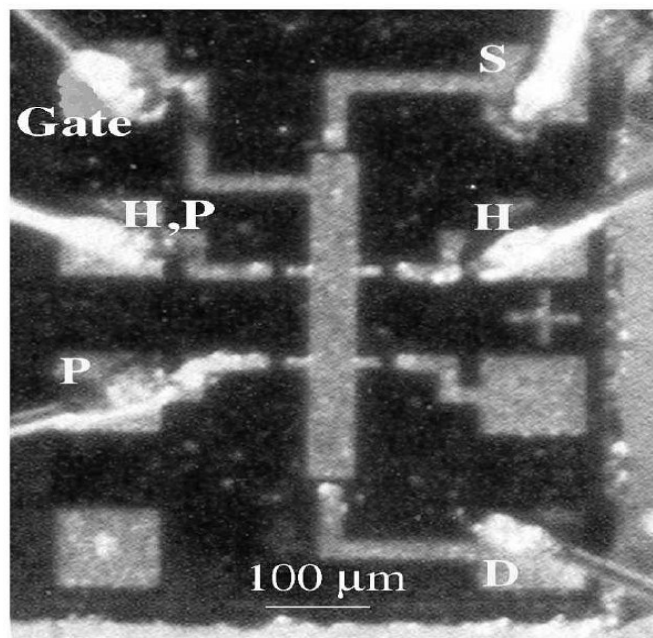
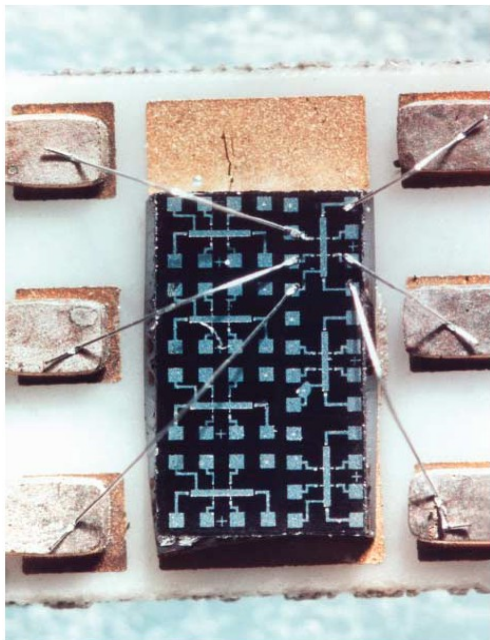


Рисунок 21: Слева: чип с кремниевыми МОП транзисторами, используемый в опытах по квантовому эффекту Холла. Из статьи [6]. Справа: увеличенное изображение одного из транзисторов с обозначением используемых электродов ( $H$  – измерение холловского напряжения,  $P$  – измерение продольного напряжения,  $Gate$  – затвор,  $S$  – исток, source,  $D$  – исток, drain. Из статьи [7].

Квантовый эффект Холла был одним из ярких физических открытий конца 20 века. Экспериментально обнаруженный Клитцингом в 1980 году<sup>20</sup>, этот эффект (и связанные с ним эффекты) активно изучался на протяжении более 30 последующих лет. В истории этих исследований и, последовавшее вскоре за открытием Клитцингом целочисленного квантового эффекта Холла, открытие дробного квантового эффекта (1982 год, Цуи, Штормер и Госсард), и две Нобелевские премии (1985 год — Клитцинг, 1998 год — Цуи с соавторами), и принятие квантового эффекта Холла в качестве метрологического стандарта сопротивления.

Прежде чем начинать короткий разговор о физике этого явления отметим, что этот прогресс существеннейшим образом связан с прогрессом развития полупроводниковых технологий, позволившим создавать структуры (гетероструктуры и полевые транзисторы) с двумерным электронным газом высокой подвижности, с возможностью создания различных геометрий управляющих затворов и измерительных контактов. Эта связь между прогрессом технологии и прогрессом фундаментальных исследований неразрывна: в современной физике невозможно вести исследования на высоком уровне без использования продуктов современных технологий, равно как и современные технологии появляются только там, где есть достаточные возможности для фундаментальных исследований и сопряжённого с ними поиска.

<sup>20</sup> Клитцинг в статье [7] приводит точные данные о времени и месте «рождения» этого открытия: около 2 часов ночи с 4 на 5 февраля 1980 года в лаборатории высоких магнитных полей (HMFL) в Гренобле (Франция).

## Тензоры сопротивления и проводимости в магнитном поле.

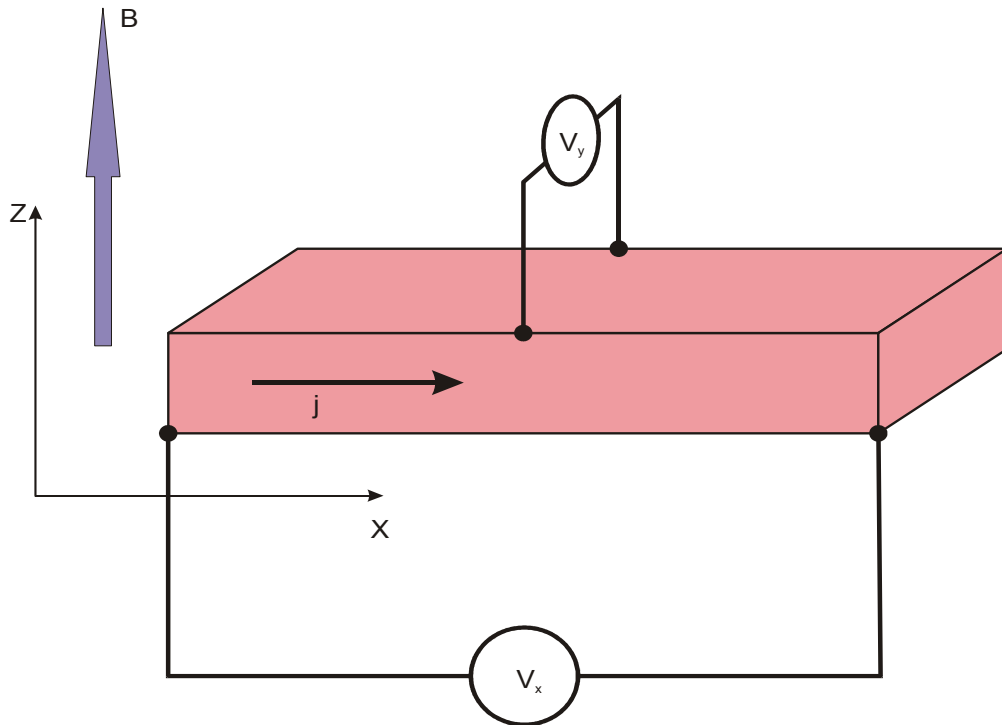


Рисунок 22: Схема опыта по измерению классического эффекта Холла.

Напомним постановку опыта по измерению классического эффекта Холла: при пропускании тока через образец проводника, находящийся во внешнем магнитном поле (рисунок 22), на боковых сторонах проводника возникает разность потенциалов (холловское напряжение), пропорциональная полю.

Для качественного описания удобно воспользоваться моделью свободных электронов. Уравнение динамики в электрическом и магнитном полях имеет вид:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}, \text{ здесь } \vec{v} \text{ — скорость, } q \text{ — заряд носителя заряда.}^{21}$$

Вводя, как и в модели Друде, понятие характерного времени пробега  $\tau$ , можно записать для дрейфовой скорости  $\vec{V}_d = q \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V}_d \times \vec{B}] \right) \frac{\tau}{m}$ . Пользуясь связью дрейфовой скорости и плотности тока  $\vec{j} = nq\vec{V}_d$ , получаем для плотности тока:

$$\vec{j} = nq\vec{V}_d = \sigma_0 \vec{E} + \frac{q\tau}{mc} [\vec{j} \times \vec{B}] = \sigma_0 \vec{E} + \frac{qB}{mc} \tau \begin{pmatrix} j_y \\ -j_x \end{pmatrix}, \text{ где } n \text{ — концентрация носителей, а } \sigma_0 = ne^2\tau/m \text{ — «обычная» проводимость в модели Друде-Лоренца. Откуда, вводя}$$

21 Можно показать, что для электрона или дырки в кристалле уравнение динамики окажется таким же, только под скоростью будет подразумеваться групповая скорость носителя заряда. Обоснование этого утверждения в рамках этой лекции нам не нужно и мы ограничимся рассмотрением только модели свободных электронов, чтобы получить выражение для тензора проводимости. Подробная аргументация есть в книге Киттеля [9] и в дополнительных материалах к лекции.

характерную циклотронную частоту<sup>22</sup>  $\omega_c = \frac{eB}{mc}$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\text{sign}(q)\omega_c \tau \\ \text{sign}(q)\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \vec{j} = \sigma_0 \vec{E} .$$

Плотность тока оказывается связана с напряжённостью поля матричным уравнением

$$\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E} , \text{ где тензор проводимости } \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} , \text{ а его компоненты:}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2}$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \text{sign}(q) \frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{1 + (\omega_c \tau)^2} .$$

Обратная связь напряжённости с плотностью тока задаётся тензором удельного сопротивления  $\vec{E} = \hat{\rho} \vec{j}$  . Взаимосвязь компонент этих тензоров может быть выражена следующим образом:

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} .$$

Интересно, что при  $\rho_{xy} \neq 0$  обращение в ноль диагональной части тензора сопротивления ведёт к одновременному обращению в ноль диагональной части тензора проводимости. В этом нет никакого противоречия<sup>23</sup>, так как измерение тензора сопротивления и тензора проводимости соответствует разной постановке эксперимента: либо создаётся и поддерживается однородное электрическое поле и измеряется ток вдоль поля (проводимость), либо создаётся и поддерживается ток и измеряется возникающее электрическое поле (сопротивление). Одновременное зануление диагональных компонент обоих тензоров просто соответствует тому, что созданы условия, в которых ток течёт перпендикулярно к электрическому полю.

Таким образом, в присутствии магнитного поля связь электрического поля и плотности тока в проводнике становится тензорной, и становится необходимо различать измерение диагональной и недиагональной компонент тензоров сопротивления или проводимости.

Классический эффект Холла определяется недиагональной компонентой тензора проводимости или сопротивления, его можно характеризовать константой Холла, зависящей

только от параметров проводника  $R_H = \frac{E_y}{B j_x} = \frac{1}{n q c}$  .

## **Квантование циклотронного движения электронов. Качественное представление об уровнях Ландау.**

Как известно из классической электродинамики, в магнитном поле заряженные частицы движутся по круговым траекториям (если магнитное поле нормально к скорости частицы).

<sup>22</sup> Циклотронная частота равна частоте периодического движения по круговой орбите для частицы массы  $m$  с зарядом  $q$  в магнитном поле  $B$  .

<sup>23</sup> Наивно, нулевая проводимость соответствует бесконечно большому сопротивлению, но такое рассуждение справедливо только для скалярных проводимости или сопротивления.

Такое движение называют циклотронным движением, траекторию частицы называют циклотронной орбитой. Классические уравнения движения имеют известный вид:

$$m \frac{V^2}{R} = \frac{q}{c} V B$$

$$R = \frac{c m V}{q B}$$

$$\omega_c = \frac{V}{R} = \frac{q B}{m c}$$

Так как движение по циклотронным орбитам финитно, то в соответствии с общими правилами квантовой физики оно должно квантоваться. Позднее мы получим строгий результат для квантования такого движения в двумерном случае, а пока рассмотрим эту задачу качественно.

Качественно результат квантования циклотронного движения можно получить пользуясь правилом Бора-Зоммерфельда. При движении по циклотронной орбите  $\oint \vec{p} d\vec{l} = n h$ . В магнитном поле импульс электрона перенормируется  $\vec{p} \Leftrightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$ , а для циркуляции вектор-потенциала есть связь с магнитным потоком.

Тогда:  $n h = 2 \pi r p - \frac{e}{c} B \pi r^2 = 2 \pi m \omega_c r^2 - \pi m \omega_c r^2 = \pi m \omega_c r^2$ . Откуда радиус n-ой

квантованной орбиты  $r_n = \sqrt{\frac{n h}{\pi m \omega_c}} = \sqrt{2 n \frac{c \hbar}{e B}}$ , а энергия квантованного движения

$$E_n = \frac{p_n^2}{2 m} = \frac{m \omega_c^2 r_n^2}{2} = n \hbar \omega_c.$$

То есть, возникают эквидистантные дискретные уровни энергии. Как обычно случается при квазиклассических вычислениях, «пропала» доля кванта энергии, соответствующая энергии состояния с  $n=0$ , точное рассмотрение даёт  $E_n = \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right)$ . Получающиеся квантованные уровни энергии называют уровнями Ландау.

Квантование уровней Ландау задаёт новый масштаб энергий, для массы свободного электрона циклотронная частота в поле 10Тл (это типичное магнитное поле для опытов с двумерными электронными системами) равна 280 ГГц, что соответствует расстоянию между уровнями Ландау чуть больше 10К. Если температура мала по сравнению с циклотронным расщеплением, то могут наблюдаться квантовые эффекты, связанные с дискретностью уровней. Отсюда следует, что обычно опыты по поиску квантовых эффектов в двумерном электронном газе в магнитном поле нужно проводить при температурах порядка 1К и ниже.

Отметим также, что направление циклотронного движения соответствует тому, что магнитный момент этого орбитального движения электрона направлен против магнитного поля. Таким образом, циклотронное движение электронов в поле приводит к диамагнитному вкладу в полную намагниченность, известному как диамагнетизм Ландау.

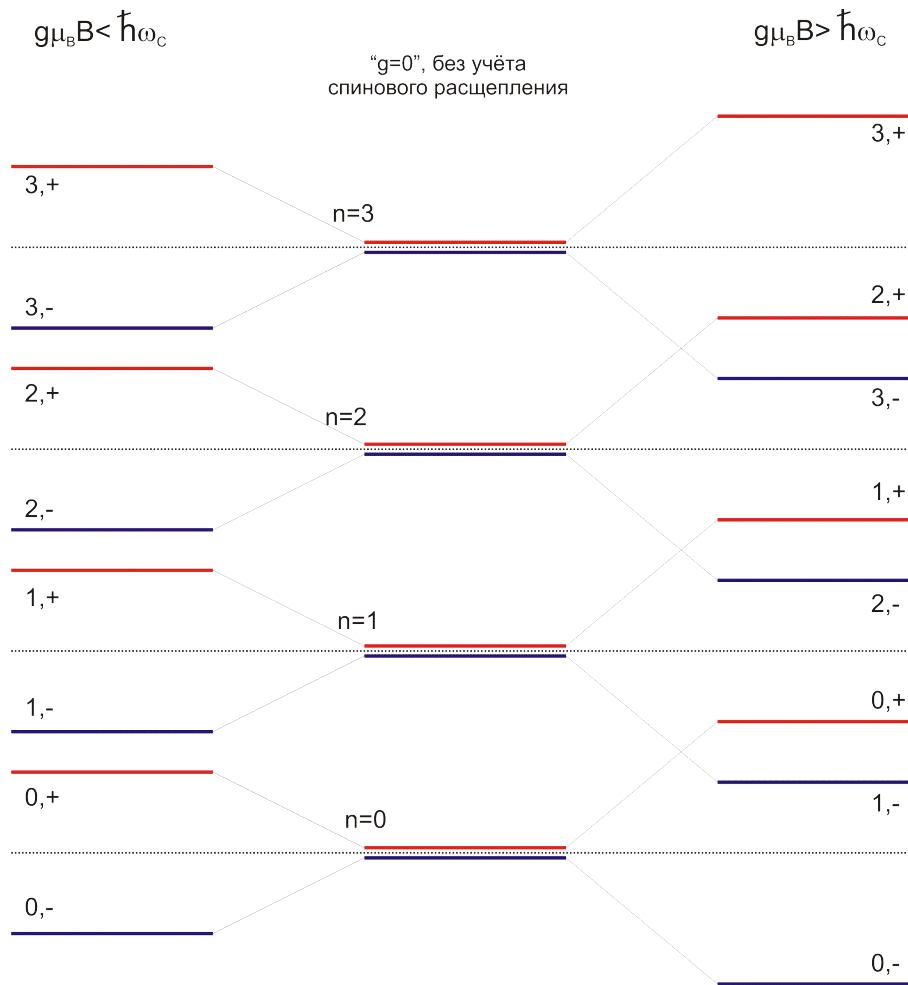


Рисунок 23: Схема чередования уровней Ландау с учётом спинового вырождения. В центре: без учёта зеемановского расщепления, каждый уровень Ландау двукратно вырожден по проекции спина. Слева: циклотронное расщепление больше зеемановского. Справа: зеемановское расщепление больше циклотронного.

Также отметим, что мы в нашем анализе не рассматривали спиновую степень свободы электрона. С учётом спина уровни Ландау должны расщепиться на два подуровня  $E_{n,\pm} = n\hbar\omega_c \pm \frac{1}{2}g\mu_B B$ . Для свободного электрона  $\hbar\omega_c = 2\mu_B B$ , а  $g = 2.00$  и спиновые подуровни двух соседних уровней Ландау совпадают ( $E_{n,+} = E_{n+1,-}$ ). Однако в реальных полупроводниковых системах, где получают двумерный электронный газ, в циклотронную частоту входит эффективная масса<sup>24</sup> электрона, а g-фактор может сильно изменяться (быть и меньше 1 и достигать нескольких десятков) из-за сильного спин-орбитального взаимодействия электронов. Поэтому в реальных структурах соотношение между циклотронным и зеемановским расщеплением может быть произвольным, однако важно, что оба расщепления линейны по магнитному полю и поэтому картина квантованных уровней в магнитном поле просто растягивается с полем, не претерпевая качественных изменений. Схематически порядок уровней Ландау с учётом спинового вырождения показан на рисунке 23.

<sup>24</sup> Вообще говоря, циклотронная эффективная масса может отличаться не только от массы свободного электрона, но и от определённой нами как коэффициента между квазиимпульсом и групповой скоростью эффективной массы для зонной структуры.

## Уровни Ландау в двумерном случае. Точный результат.

Рассмотрим свободный двумерный электрон в магнитном поле, нормальном к плоскости движения электрона. Нас интересует только орбитальное движение электрона, спиновую степень свободы учитывать не будем.

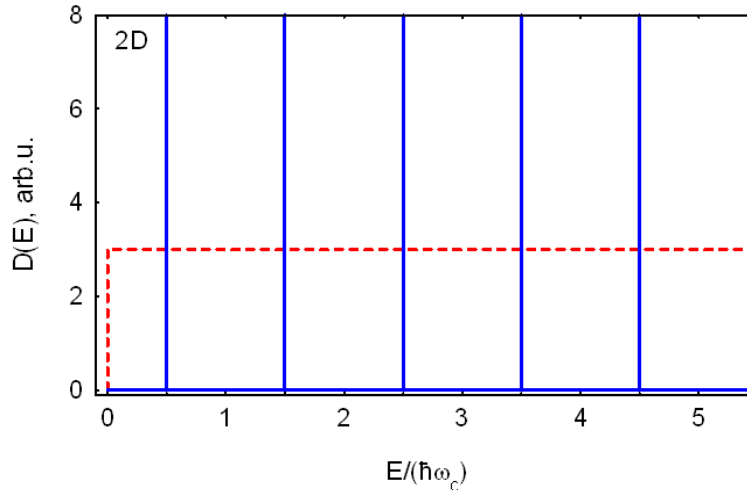


Рисунок 24: Плотность состояний как функция энергии (схематически) в трёхмерном (сверху) и двумерном (снизу) случае. Сплошная линия — с учётом квантования уровней Ландау, пунктир — в отсутствие магнитного поля. Спиновое расщепление не учитывается.

Уравнение Шредингера в магнитном поле с вектор-потенциалом  $\vec{A}=(0, Bx, 0)$  имеет для двумерной системы вид

$$\frac{1}{2m} \left( \hat{p}_x^2 + \left( \hat{p}_y - \frac{e}{c} B \hat{x} \right)^2 \right) \Psi(x, y) = E \Psi(x, y) .$$

Разделяя переменные заменой  $\Psi(x, y) = e^{ik_y y} \psi(x)$  (замена подсказана тем, что в уравнение  $y$  не входит явно) и вводя обозначения  $l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$  и  $x_0 = \frac{\hbar c k_y}{eB} = l_B^2 k_y$ , получаем, что после разделения переменных уравнение Шредингера принимает вид:

$$-\psi'' + \frac{(x-x_0)^2}{l_B^4} \psi = \varepsilon \psi , \text{ где } \varepsilon = \frac{2mE}{\hbar^2} .$$

Это уравнение одномерного гармонического осциллятора с точкой равновесия в точке  $x_0$ , называемой поэтому координатой ведущего центра, а магнитная длина  $l_B$  (она порядка радиуса классической циклотронной орбиты, в поле 10 Тл магнитная длина равна 8.1 нм) задаёт пространственный масштаб, на котором локализовано решение<sup>25</sup>. Возникнут дискретные уровни (уровни Ландау) с энергией  $E_n = \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right)$ .

25 Отметим также, что магнитная длина задаёт нам и размер, который надо учитывать при определении размерности нашей системы. Если поперечный размер области двумерного электронного газа окажется меньше магнитной длины, то в магнитном поле задача становится одномерной: циклотронная орбита не может уместиться в такой системе.



## Кратность вырождения уровня Ландау

Напомним, что для двумерного электронного газа в отсутствие магнитного поля плотность состояний постоянна<sup>26</sup>. В магнитном поле энергия двумерного электрона дискретна и плотность состояний имеет вид ряда дельта-функций (рисунок 24).

Определим, сколько электронных состояний может располагаться на одном уровне Ландау. На качественном квазиклассическом уровне, можно заметить, что запрет Паули в квантующем магнитном поле можно интерпретировать как запрет двум электронам находиться на одной циклотронной орбите. Квантовое состояние характеризуется номером уровня Ландау и координатами центра орбиты. Из-за непересечения орбит, требуемого запретом Паули, на одно квантовое состояние должна приходиться площадь

$$dS \simeq \pi l_B^2 = \frac{\pi \hbar c}{e B}, \text{ что соответствует концентрации } n \simeq \frac{e B}{\pi \hbar c} = \frac{B}{\Phi_0}.$$

Это даёт правильную зависимость, но отличается множителем  $\frac{1}{2}$  от строгого результата.

Для получения строгого ответа удобно рассмотреть образец в форме прямоугольника  $L_x \times L_y$ . Наложим периодическое граничное условие вдоль Y (это направление, вдоль которого координатная зависимость волновой функции такая же, как и для свободной частицы), это даст условие  $k_y = \frac{2\pi}{L_y} N$ .

Дополнительно потребуем, чтобы ведущий центр попадал внутрь образца  $0 < x_0 < L_x$  (в силу быстрого спада волновой функции гармонического осциллятора при выходе координаты ведущего центра за пределы образца мы не получим электрона локализованного в образце). Так как координата ведущего центра зависит от  $k_y$ , требование локализации ведущего центра в образце ограничит максимально возможное  $N$ :

$$N_{max} = \frac{e B}{h c} L_x L_y = \frac{1}{2\pi} \frac{S}{l_B^2}$$

и следовательно поверхностная плотность состояний на каждом уровне Ландау  $n_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_B^2} = \frac{e B}{h c}$ .

С ростом поля растёт и расстояние между уровнями Ландау, и ёмкость уровней Ландау. В поле 10 Тл  $n_0 = 2.4 \cdot 10^{11} 1/cm^2$ , то есть обычно в двумерном электронном газе в полупроводниковых структурах заполняется один или несколько первых уровней Ландау.

Мы не учитывали в этом анализе спиновую степень свободы, поэтому этот результат относится к спиновому подуровню уровня Ландау. Для компактности далее под уровнем Ландау будут подразумеваться именно спиновые подуровни. Заметим также, что магнитный поток через круг радиуса  $l_B$  равен кванту потока<sup>27</sup>  $\Phi = \pi l_B^2 B = \frac{\pi \hbar c}{e} = \Phi_0 = 2.05 \cdot 10^{-7} \text{ Э} \cdot \text{см}^2$

. Тогда  $n_0 = \frac{B}{2\Phi_0}$ , или на каждый электрон на уровне Ландау приходится два кванта потока.

26 Доказательство прямолинейно:  $D(\epsilon) = \frac{dN}{d\epsilon} = \frac{(dN/d|\vec{k}|)}{(d\epsilon/d|\vec{k}|)} \propto \frac{k dk}{k dk} = const$

27 Мы, следуя Абрикосову [12], используем для электронов обозначение кванта потока, принятое для сверхпроводников. Иногда вводят отличающееся в два раза значение кванта для нормальных металлов.

## **Связь транспортных свойств двумерной электронной системы с заполнением уровней Ландау**

Отметим, что по виду зависимости плотности состояний в магнитном поле от энергии (представляющей собой в двумерном случае последовательность дельта-функций) мы ожидаем сильных осцилляций транспортных свойств образца при изменении заполнения состояний электронами — а именно это изменение заполнения и контролируется экспериментально: мы можем либо изменяя магнитное поле менять расстояние между уровнями Ландау и их ёмкость, либо оперируя с затворами, контролирующими двумерный электронный газ, можем изменять полное число электронов (их поверхностную плотность). Действительно, принципиально различаются ситуации, когда последний уровень Ландау заполнен не полностью и когда уровень Ландау заполнен полностью. В первом случае уровень химпотенциала совпадает с уровнем Ландау, а во втором, аналогично положению уровня химпотенциала в запрещённой зоне полупроводника, должен оказываться ровно посередине между двумя уровнями Ландау.

Соответственно, для продольной проводимости мы ожидаем зануление, если последний уровень Ландау полностью заполнен. Для холловского сопротивления  $\rho = \frac{E_y}{j_x} = \frac{B}{nec}$  при

$$n = N \frac{eB}{hc} \text{ получим } \rho = \frac{1}{N} \frac{h}{e^2}. \text{ То есть, при полном заполнении уровней Ландау значение}$$

холловского сопротивления принимает дискретный набор значений.

В рамках этих рассуждений ноль продольной проводимости (или, при другой постановке опыта — продольного сопротивления) и квантованное значение холловского сопротивления должны наблюдаться в фиксированных точках на плоскости параметров  $(n, B)$ . Однако оказывается, что в реальных экспериментах нули продольной проводимости и квантованные значения холловского сопротивления наблюдаются в некоторых интервалах параметров, формируя «плато» на экспериментальных кривых. Примеры таких данных мы увидим далее. Описание холловских плато выходит за рамки нашего курса.

## **Учёт границ образца: краевые состояния и их роль в формировании плато КЭХ.<sup>†</sup>**

Пока мы рассматривали неограниченный в плоскости двумерный электронный газ. Однако это приближение не соответствует реальным условиям эксперимента. Более того, как мы увидим далее, именно наличие границ оказывается принципиальным для объяснения квантового эффекта Холла. Для этого описания также удобно рассмотреть геометрию эксперимента, соответствующую измерению тензора проводимости, а не тензора сопротивления: пусть мы задаём электрическое поле в образце (поддерживаем разность потенциалов на границе образца) и следим за направлением возникающего тока. Для упрощения рассмотрения рассмотрим образец, неограниченный в направлении  $Y$ , но имеющий конечный размер в направлении  $X$ .

Границы образца задаются либо физическими границами образца, либо границами разрешённой для двумерного газа области, контролируемой внешними затворами. Наличие границ можно описать, как появление некоторой потенциальной энергии  $U(x)$ , растущей по мере приближения к границе (этот рост описывает тот факт, что электроны не выходят самопроизвольно за границы образца).

Как будет зависеть энергия электрона от координаты в присутствии этого потенциала? На

качественном уровне можно выделить два случая: медленно меняющегося потенциала и бесконечной стенки. Если потенциал меняется мало на масштабе длины  $l_B$ , то нужно просто добавить  $U(x_0)$  к найденному значению энергии. Случай бесконечной стенки важен, когда ведущий центр оказывается на расстоянии порядка  $l_B$  от границы образца и классическая циклотронная орбита перестаёт уместиться в образце.

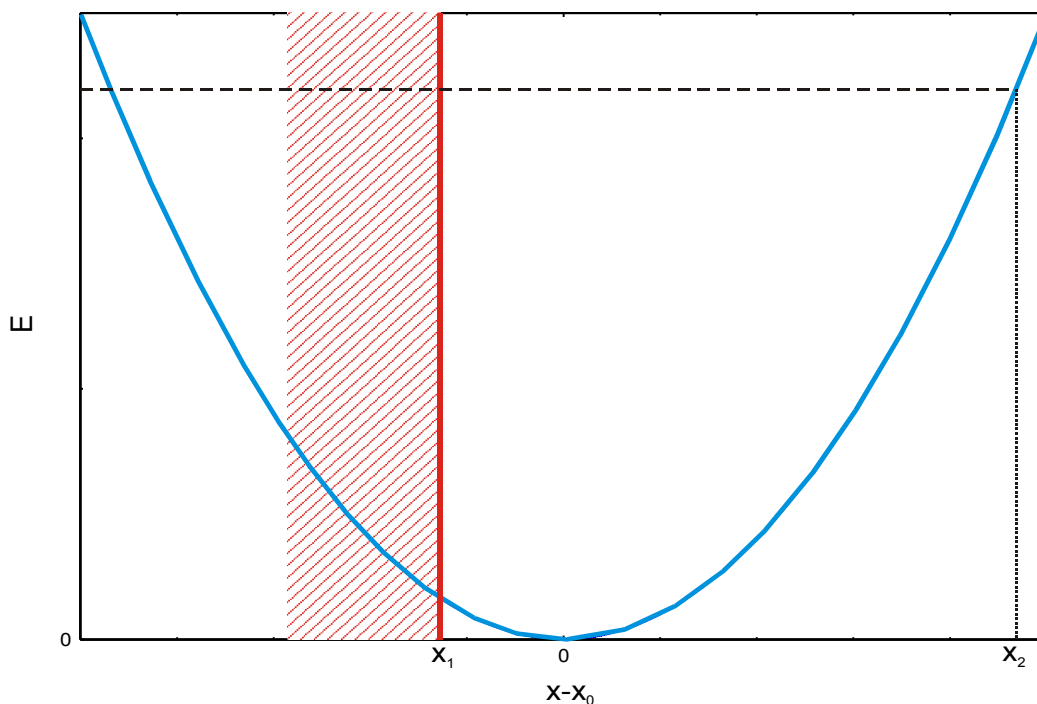


Рисунок 25: Потенциал гармонического осциллятора с запрещённой областью при  $x < x_1$ .

Пусть к потенциалу гармонического осциллятора добавлена бесконечной высоты потенциальная стенка, запрещающая пребывание частицы при  $x < x_1$  (рисунок 25). Классическое движение частицы с энергией  $E$  ограничено тогда координатами  $x_1$  и  $x_2 = \sqrt{\frac{2E}{k}}$ , где  $k$  — жёсткость осциллятора. Частота колебаний частицы в таком «ограниченном» осцилляторе будет расти и, следовательно, будет расти и квант энергии такого циклотронного движения вблизи границы.<sup>28</sup> Схематически эта зависимость показана

28 По правилу Бора-Зоммерфельда

$$nh = 2 \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = 2 \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m \left( E - \frac{kx^2}{2} \right)} dx = \frac{2E}{\omega_0} \left[ \arcsin \frac{x}{x_2} + \frac{x}{x_2} \sqrt{1 - \left( \frac{x}{x_2} \right)^2} \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$nh = \frac{2E}{\omega_0} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1}{x_2} \sqrt{1 - \left( \frac{x_1}{x_2} \right)^2} \right]$$

Полученное выражение довольно громоздко, координата  $x_2$  также является функцией энергии. Отметим сразу, что в обычном случае  $x_1 = -x_2$  (когда наличие стенки не важно) оно даст обычный ответ  $E = n\hbar\omega_0$ . Однако из вида выражения в скобках и неограниченного квадратичного роста потенциала можно отметить, что для сколь угодно близкого к 1 отношения  $\frac{x_1}{x_2}$  можно подобрать для любого  $n$  достаточно большое

значение энергии, обеспечивающее выполнение равенства и наоборот. Следовательно, вблизи от границы мы можем указать положения ведущего центра при котором энергия

на рисунке 26.

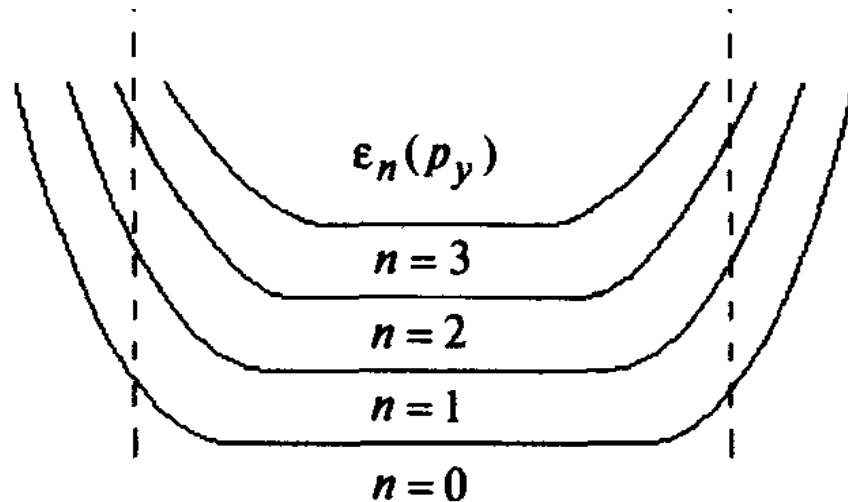


Рисунок 26: Схематическая зависимость положения уровня Ландау от координаты ведущего центра  $x_0 = \frac{\hbar c k_y}{eH}$ . Пунктиром показаны границы образца. Из книги [1].

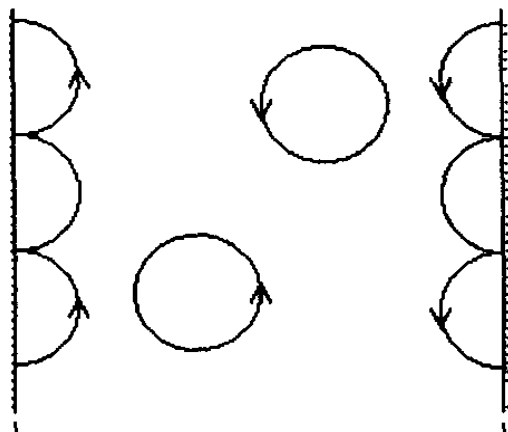


Рисунок 27: Замкнутые и скачущие циклотронные орбиты. Схематический рисунок. Из книги [1].

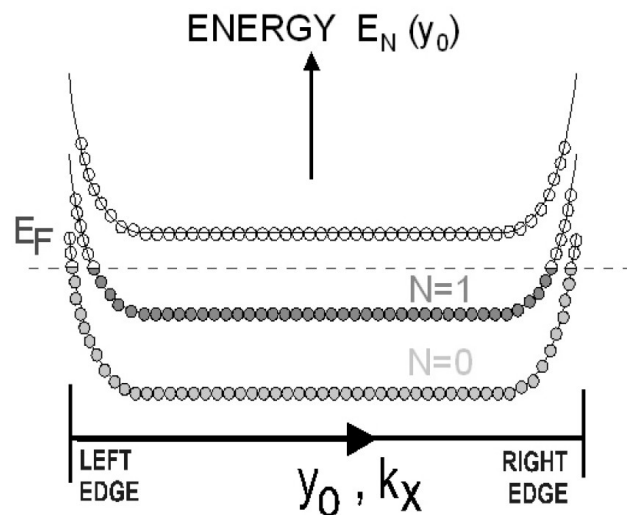


Рисунок 28: Схема заполнения уровней Ландау с учётом искривления уровней на границе образца. Из статьи [7]. Обозначения отличаются от обозначений нашего курса заменой  $y$  на  $x$ .

Зависимость энергии состояния от координаты ведущего центра означает (по определению этой координаты  $x_0 = \frac{\hbar c k_y}{eH}$ ) зависимость энергии от  $y$ -компоненты импульса  $p_y = \hbar k_y$ . Отсюда сразу следует наличие у электронов в таких состояниях групповой скорости в  $y$ -направлении  $V_y = \frac{\partial E_n(p_y)}{\partial p_y} \propto \frac{\partial E_n(x_0)}{\partial x_0}$ . Как легко видеть из рисунка 26 эта скорость

произвольного уровня Ландау равна наперёд заданной (не меньшей энергии первого уровня в глубине образца). То есть, для координаты ведущего центра вблизи от границы образца энергия уровня Ландау будет возрастать неограниченно.

направлена в противоположных направлениях на разных краях образца. Этот вывод не зависит от предположений о характере изменения потенциала и верен для произвольной формы потенциала на границе образца.

Таким образом, основное состояние двумерной электронной системы конечных размеров устроено так, что вдоль границы образца течёт незатухающий ток, называемый диамагнитным. Этот ток по краевым состояниям имеют наглядную классическую интерпретацию на языке циклотронных орбит. В магнитном поле электроны, находящиеся в глубине образца движутся по круговым орбитам и в среднем остаются на месте. Однако электроны, находящиеся на расстоянии меньше диаметра циклотронной орбиты от границы не могут замкнуть свою траекторию и упруго отражаются от границы. При этом упругом отражении сохраняется тангенциальная составляющая импульса, а нормальная меняет знак. Так как направление вращения электрона при этом не меняется, он начинает описывать фрагмент своей циклотронной орбиты заново, смещаясь к следующему удару о границу вдоль границы образца (рисунок 27) — это известное явление в чистых металлах, называемое скачущими траекториями. Как легко видеть, при этом вдоль одной границы длинного образца перемещение по скачущей орбите происходит в одном направлении, а вдоль другой границы — в противоположном. Важным свойством такого движения является отсутствие рассеяния назад: направление движения электрона в краевом состоянии задаётся ориентацией края и магнитным полем, для того, чтобы начать двигаться в противоположном направлении электрону нужно попасть на другой край образца.

Из-за граничных эффектов плотность состояний приобретает некоторую размытость, возникает ненулевая плотность состояний между острыми пиками на энергиях  $\hbar\omega_0(n+1/2)$ . Более того, теперь при заполнении некоторого числа уровней Ландау в глубине образца уровень химпотенциала вблизи каждой границы пересекает все эти уровни Ландау (рисунок 28). В пренебрежении эффектами взаимодействия электронов вдоль границы образца содержащего  $n$  заполненных уровней Ландау возникает ровно  $n$  одномерных краевых состояний. Таким образом, в любой, даже самой идеальной, лишённой дефектов, структуре для изучения двумерного электронного газа в квантующем магнитном поле невозможно попадание уровня Ферми в запрещённую зону: он всегда пересекает какие-то уровни Ландау.

Вычислим возникающий ток по краевым состояниям. Вклад в поверхностную плотность тока от  $i$ -ого уровня Ландау равен  $\vec{j}^{(i)} = n_s^{(i)} e \vec{V}^{(i)}$ , где  $n_s^{(i)}$  — поверхностная плотность электронов (для заполненного уровня Ландау она равна  $n_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_B^2}$  независимо от изгиба уровней (она не зависит от энергии). Ток краевых состояний направлен вдоль оси  $y$  вдоль групповой скорости электронов и равен:

$$I_y = \int j_y dx = \sum_i n_s^{(i)} e \int V_y^{(i)} dx = \sum_i \frac{c}{eH} n_s^{(i)} e \int \frac{\partial E_i(x)}{\partial x} dx = \frac{e}{h} \sum_i \frac{n_s^{(i)}}{n_0} \Delta E_i \Big|_{x=0}^{x=L},$$

здесь суммирование идёт по заполненным уровням,  $n_0$  ёмкость уровня Ландау, мы считаем, что спиновое вырождение полностью снято. Разность энергий на границах образца равна<sup>29</sup>  $e\Delta\phi$  при приложении разности потенциалов  $\Delta\phi$ . Подчеркнём, что разность потенциалов прикладывается вдоль направления  $x$ , а ток возникает вдоль оси  $y$ . То есть мы имеем дело с холловскими компонентами тензоров сопротивления и проводимости.

Таким образом, для  $N$  заполненных в глубине образца уровней Ландау холловский ток

<sup>29</sup> Пренебрегая изменением потенциала между точками пересечения с заполненными уровнями по сравнению с падением потенциала на всём образце ( $l_B \ll L$ ).

равен  $I_y = N \frac{e^2}{h} \Delta \varphi$  и холловское сопротивление нашего образца  $R_{xy} = \frac{1}{N} \frac{h}{e^2} \approx \frac{25.8 \text{ кОм}}{N}$ .

Подчеркнём, что для этого результата нам требуется наличие некоторого количества полностью заполненных в объёме уровней Ландау, однако из-за наличия всегда готовых заполняться граничных состояний это условие окажется не строгим равенством на поверхностную концентрацию  $n = N n_0$ , а возникнет некоторый интервал концентраций (определяемый скоростью роста энергии уровня Ландау на границе) при котором один из уровней Ландау в объёме уже заполнен (уровни  $N=0$  и  $N=1$  на рисунке 28), а следующий ещё не начал заполняться ( $N=2$  на рисунке 28). То есть, при изменении экспериментально доступных параметров, контролирующих заполнение уровней Ландау (концентрации носителей или магнитного поля), квантованные значения сопротивления будут наблюдаться в некотором интервале параметров — возникнут плато холловского сопротивления.

### Условия для наблюдения квантового эффекта Холла.

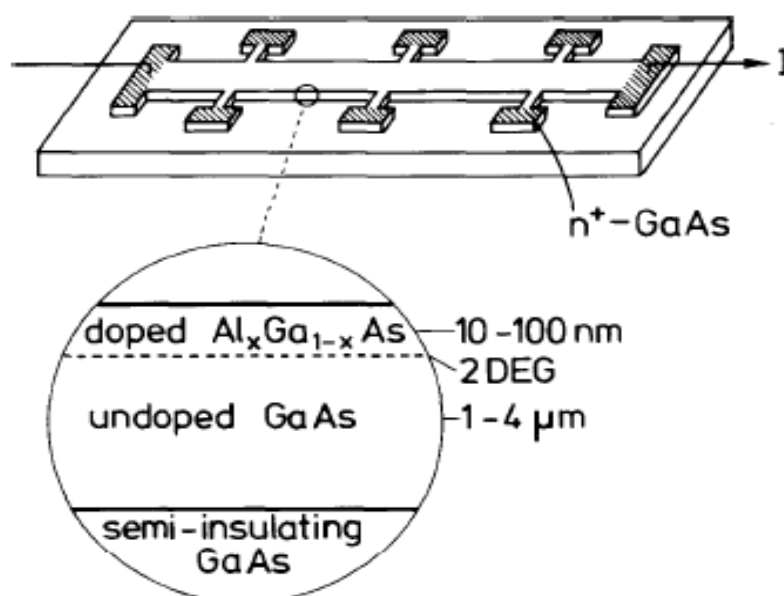


Рисунок 29: Форма и характерные размеры GaAs-AlGaAs гетероструктуры, используемой в опытах по квантовому эффекту Холла. Из статьи [5].

Квантовый эффект Холла наблюдают в двумерном электронном газе. Поэтому основным элементом является структура (гетероструктура или полевой транзистор), в которой получают двумерный электронный газ. Пример такой структуры из нобелевской лекции фон Клитцинга [5] приведён на рисунке 29. Гетеропереход формируется в структуре GaAs-AlGaAs<sup>30</sup>, изгиб зон на гетеропереходе создаёт условия для формирования двумерного электронного газа. Для транспортных измерений методом литографии создаются контактные площадки, в которых методом ионной бомбардировки создаётся проводимость n-типа.

Такая геометрия образца позволяет провести измерения аналогичные эффекту Холла: пропуская ток вдоль образца можно измерять напряжение между его боковыми сторонами.

30 Материал подложки — изолирующий (semi-insulating) арсенид галлия. Это номинально чистый GaAs, однако в нём при некотором подборе параметров роста кристалла формируются специальные дефекты, из-за которых уровень химического потенциала оказывается в середине запрещённой зоны (обычно чистый GaAs оказывается полупроводником p-типа).

При этом для наблюдения квантовых эффектов необходимо, во-первых, понизить температуру настолько, чтобы стало существенно размерное квантование и сформировался двумерный электронный газ, а во-вторых добиться того, чтобы движение электронов в магнитном поле стало квантовым. Это требует достаточно низкой температуры:  $T \ll \Delta E_{разм}$  и  $T \ll \hbar \omega_c$ . Размерное квантование в гетероструктурах наблюдается при гелиевых температурах (несколько кельвин, температура кипения гелия-4 при атмосферном давлении 4.2К). Для циклотронной частоты  $\omega_c = \frac{eB}{m^*c}$  в поле 1 Тл и для массы свободного электрона получим оценку  $\hbar \omega_c \approx 1.34 K$ . То есть, для выполнения требования  $T \ll \hbar \omega_c$  нужны температуры около 1К и ниже. Часто такие эксперименты проводят при температурах  $\sim 100 мК$  с использованием криостатов растворения.

Для наблюдения дробного квантового эффекта Холла требуется достаточно высокая подвижность носителей заряда, что накладывает специальные технологические требования при изготовлении гетероструктур.

### Наблюдение целочисленного квантового эффекта Холла.

Пример характерных экспериментальных данных [6] показан на рисунке 30. Через образец пропускался постоянный ток 10 мкА и измерялось падение напряжения вдоль образца и в поперечном направлении в зависимости от магнитного поля.

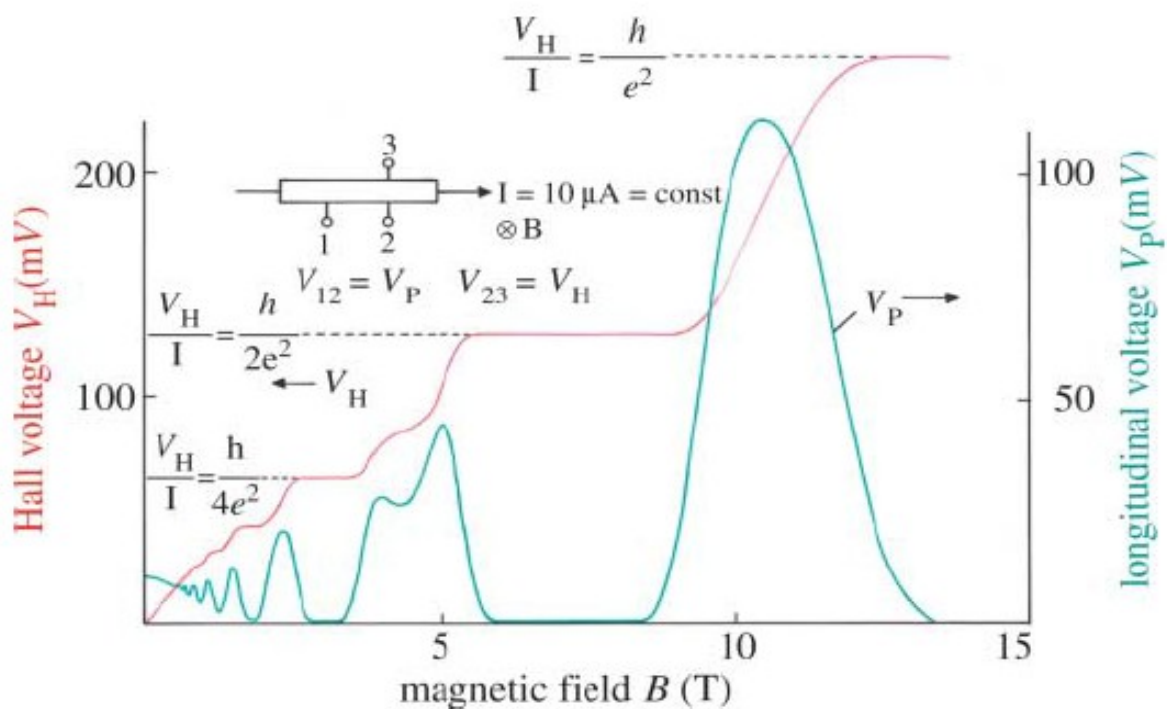


Рисунок 30: Зависимости от магнитного поля продольного и холловского напряжений на гетероструктуре GaAs-AlGaAs при токе 10 мкА.  $T=1.6 K$ . Из статьи [6].

Видно, что обе зависимости имеют сложную форму: в то время как для классического эффекта Холла мы бы ожидали просто линейного роста поперечного (холловского) напряжения и какого-то более слабого изменения продольного напряжения<sup>31</sup>, здесь мы

<sup>31</sup> Качественно, влияние магнитного поля на продольное сопротивление связано с тем, что траектория электрона искривляется в магнитном поле и проекция траектории на направление тока (транспортная длина

наблюдаем набор плато (горизонтальных участков) холловского напряжения и одновременно с этими плато до нуля проваливается продольное напряжение (пропадает продольное сопротивление). При этом наблюдаемые положения плато холловского напряжения следуют ряду  $\frac{1}{n}$  ( $n$  - целое), а значения холловского сопротивления выражаются через мировые константы  $R = \frac{U_H}{I} = \frac{1}{n} \frac{h}{e^2}$ .

$$R = \frac{U_H}{I} = \frac{1}{n} \frac{h}{e^2}$$

Этот экспериментальный результат и составляет содержание целочисленного квантового эффекта Холла: в двумерном электронном газе в квантующем магнитном поле при некоторых условиях наблюдаются плато холловского сопротивления, а одновременно с наблюдением плато происходит падение продольного сопротивления до нуля. За обнаружение этого эффекта Клаус фон Клитцинг был удостоен Нобелевской премии по физике (1985 год).

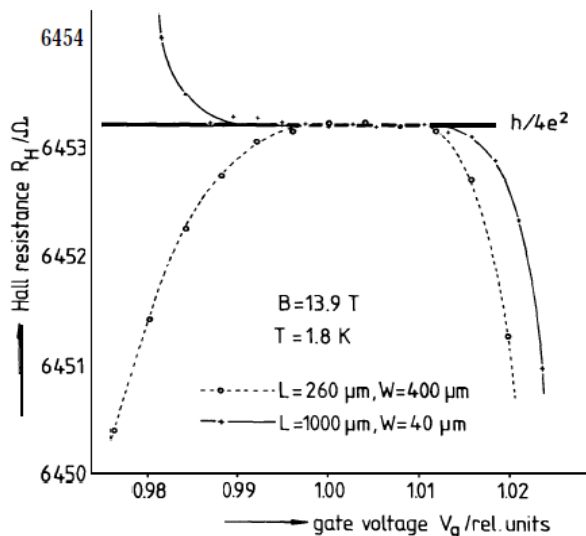


Рисунок 31: Сравнение плато Холловского сопротивления для образцов разной формы ( $L$  - длина,  $W$  - ширина). На графике изображена зависимость холловского сопротивления от напряжения на затворе МОП-структуры, контролирующего концентрацию электронов в двумерном газе. Из статьи [5].

Удивительным образом оказалось, что величина холловского сопротивления на плато обладает великолепной воспроизводимостью: она не зависит от типа структуры, в которой формируется двумерный газ, не чувствительна к размерам этой структуры (холловское напряжение может измеряться и вдоль длинной и вдоль короткой стороны образца, см. рисунок 31). Воспроизводимость результатов в разных лабораториях находится на уровне  $10^{-9}$  (рисунок 32). Эта независимость от точных параметров образца привела к тому, что квантовый эффект Холла используется как стандарт единицы сопротивления.

С 1990 года принято, что  $R_H = \frac{h}{e^2} = 25813.801 \text{ Ом}$  (для целей метрологии - точно) [6].

Измерение с высокой точностью холловского сопротивления позволяет также определить с высокой точностью постоянную тонкой структуры  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{2\pi}{R_H c}$

свободного пробега) уменьшается. Это приводит к росту сопротивления в магнитном поле.

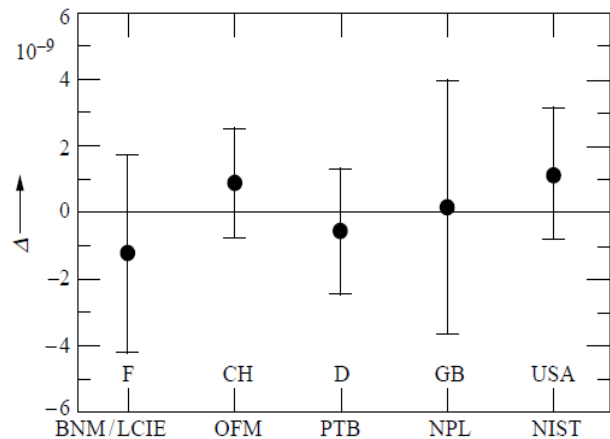


Рисунок 32: Воспроизводимость холловского сопротивления в различных лабораториях. Из статьи [6].



## Поучительный пример, или как правильно измерять сопротивление.

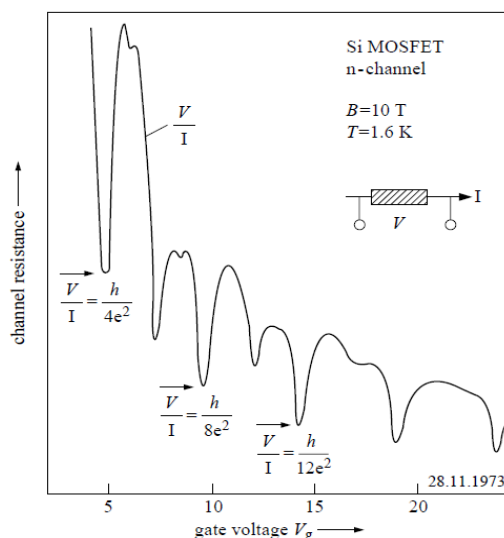


Рисунок 33: Зависимость двухконтактного сопротивления в цепи сток-исток МОП-транзистора от напряжения на затворе ( $B=10T$ ,  $T=2K$ ). Из статьи [6].

Исторически, первые наблюдения необычных свойств двумерного электронного газа в магнитном поле были сделаны в 1973 году [6] (рисунок 33), однако в то время они не были правильно интерпретированы. Проблема заключалась в том, что в этих ранних опытах не было дополнительных электродов для измерения разности потенциалов между сторонами образца, измерения проводились фактически по двухконтактной<sup>32</sup> схеме: разность потенциалов измерялась на тех же контактах, по которым в образец вводился ток. Сравнивая с рисунком 30, мы понимаем, что при этом измеряемое напряжение (в силу естественной неточности формы контактов для структур с размером в десятки микрометров) является какой-то смесью продольного и холловского напряжений, поэтому чёткая картина плато и провалов не видна. Однако, и это подчёркивает уже отмеченную независимость холловского сопротивления на плато от устройства образца, в условиях возникновения квантового эффекта Холла остаётся только холловское напряжение и положения наблюдаемых минимумов характеризуются величиной сопротивления очень близкой к  $R = \frac{U_H}{I} = \frac{1}{n} \frac{e^2}{h}$ .

Этот поучительный пример показывает нам, что даже изучая микро- и наноструктуры нельзя забывать, что четырёхконтактная схема измерения сопротивления, позволяющая исключить свойства «подводящих проводов» гораздо более надёжна.

32 В двухконтактной схеме для подачи тока на образец и измерения напряжения на образце используются одни и те же контакты, поэтому к измеряемому сопротивлению добавляется сопротивление «проводов». В четырёхконтактной схеме разность потенциалов измеряется по независимой паре контактов, ток через них (через идеальный вольтметр) не течёт, поэтому их сопротивления и сопротивления «проводов» оказываются исключены из измерения.

## Наблюдение дробного квантового эффекта Холла.<sup>†</sup>

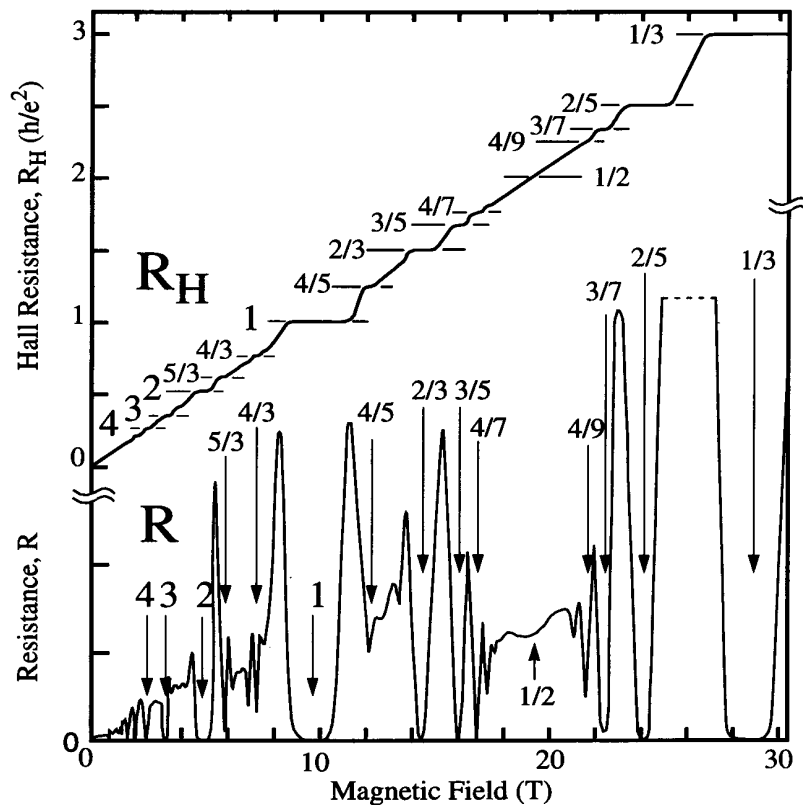


Рисунок 34: Наблюдение дробного квантового эффекта Холла в гетероструктуре GaAs-AlGaAs с высокой подвижностью носителей. Из статьи [23].

Помимо рассмотренного нами целочисленного квантового эффекта Холла, при котором холловское сопротивление демонстрирует плато на уровне  $\frac{1}{N} \frac{h}{e^2}$ , существует и дробный квантовый эффект Холла, при котором также наблюдаются плато сопротивления, но они индексируются дробными индексами  $\frac{p}{q}$ . За открытие и объяснение квантового эффекта Холла была присуждена Нобелевская премия 1998 года (Р.Лафлин, Х.Штёрмер, Д.Цуи).

Существование дробных плато связано с взаимодействием электронов и формированием многоэлектронных коррелированных состояний. Дробный квантовый эффект Холла более требователен к условиям наблюдения, требует более совершенных образцов (большей подвижности носителей), более низких температур (<100 мК) [23].