В.Н.Глазков, МФТИ, 2018

Неделя 12. Низкоразмерные электронные системы.

Оглавление

Задача Т.12.1 1
Задача Т.12.2 2
Задача Т.12.3 3
Задача 4.45 4

Задача Т.12.1

Вычислить энергетическое расстояние между нижними уровнями размерного квантования для двумерного электронного газа в Si и GaAs в приближении прямоугольной потенциальной ямы с бесконечно высокими потенциальными стенками в направлении, нормальном к плоскости двумерного электронного газа. Эффективная масса электрона в GaAs и Si составляет 0.067 и 0.19 масс свободного электрона, соответственно. Ширину ямы принять равной 20 нм. Сравнить полученное значение с характерными температурами – комнатной (300К), температурой жидкого азота (77К), температурой жидкого гелия (4К)

<u>Решение:</u>

Напомним о разделении переменных в уравнении Шредингера. Полное уравнение трёхмерное $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(\vec{r})\psi = E\psi$, однако если потенциал зависит только от одной координаты $U=U(z)$, то можно искать решение в виде $\psi(\vec{r})=\phi(x,y)\xi(z)$ и уравнение разделится на два уравнения:

- свободное движение частицы в плоскости *(xy)*: $-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi = E_{x,y}\phi$;
- одномерное движение в потенциале $U(z)$ $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\xi + U\xi = E_z\xi$.

Полная энергия $E=E_{x,y}+E_z$, если в потенциале $U(z)$ в одномерной задаче возникают связанные состояния, то движение в направлении оси Z оказывается проквантованно.

Из курса квантовой механики, известно что в яме шириной a волновой вектор k может принимать только значения, кратные π/a . Тогда два нижних разрешенных значения энергии равны $E_1=\hbar^2\pi^2/(2ma^2)$ и $E_2=2\hbar^2\pi^2/(ma^2)$ соответственно. Разница этих энергий даёт $\Delta E=3\hbar^2\pi^2/(2ma^2)$.

Численное значение для заданной ширины ямы для массы свободного электрона составляет примерно 33К. Тогда с учётом приведённых в условии эффективных масс для кремния и арсенида галлия получим примерно 170 К и 490 К, соответственно.

Для оценки достаточной температуры следует вспомнить активационную зависимость для полупроводника, где половина щели сравнивается с температурой. В итоге, даже температура жидкого азота недостаточна для проведения эксперимента в чисто двумерном случае –

активация носителей на второй уровень конечна. Тут стоит также отметить, что приближение потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками несомненно завышает оценку расстояния между уровнями, плюс всегда есть короткопериодный беспорядок, приводящий к уширению уровней энергии. По этой причине в качестве достаточной оценки надо брать температуру, на порядок меньшую чем щель в спектре – это является общепринятым критерием.

Ширина ямы в 20 нм является нижним пределом для структур в GaAs и верхним пределом для структур в кремнии.

Задача Т.12.2

Многие вопросы физики твёрдого тела рассматриваются в так называемом приближении невзаимодействующих электронов, когда учитывается лишь взаимодействие электрона с кристаллической решёткой, приводящее к появлению эффективной массы электрона, отличной от массы свободной частицы. Оценить концентрацию носителей для случая двумерного металла, при которой справедливо пренебрежение межэлектронным кулоновским взаимодействием. Для численной оценки взять параметры двумерного электронного газа в кремниевой МОП-структуре: эффективная масса носителя заряда равна 0.19 массы свободного электрона, диэлектрическую проницаемость принять равной 10.

Решение:

При достаточно низких температурах параметром, характеризующим кинетическое поведение электронов, является фермиевская энергия E_F. Чтобы можно было пренебречь взаимодействием между электронами, нужно, чтобы эта энергия существенно превышала энергию взаимодействия на характерном расстоянии между частицами. Характерное расстояние определяется концентрацией носителей $1/\sqrt{N_s}$ (в двумерном случае) где N_s –число электронов на единице площади.

Тогда условие слабого взаимодействия выглядит следующим образом:

$(p_F)^2=2\pi\hbar^2 N_s$; $E_F=(\pi\hbar^2 N_s)/m>e^2\sqrt{N_s}/\varepsilon$, где p_F –фермиевский импульс, m – эффективная масса частиц, ε - диэлектрическая проницаемость, а N_s –число электронов на единице площади. Следовательно, пренебрежение эффектами межэлектронного взаимодействия возможно при $N_s \gg \left(\frac{m e^2}{\pi\hbar^2\varepsilon}\right)^2 \sim 10^{12}\frac{1}{см^2}$.

Для того, чтобы численно охарактеризовать взаимодействие, используют безразмерный параметр r_s , равный отношению радиуса Вигнера-Зейтца[1] ($1/\sqrt{\pi N_s}$ в двумерном случае) к боровскому радиусу $a_B=\varepsilon_0\hbar/(m e^2)$. Легко убедиться, что этот параметр описывает отношение характерной кулоновской энергии к энергии Ферми. В современных двумерных электронных системах в полупроводниковых структурах сравнительно легко достигаются значения $r_s=6$, такая же ситуация и в нормальных трехмерных металлах, где для грубой оценки можно считать, что r_s попадает в интервал от двух до пяти.

Так как рекордные экспериментально достижимые концентрации носителей в двумерном газе в полупроводниковых структурах имеют как раз порядок $10^{12} 1/см^2$, то использование приближения невзаимодействующих электронов, вообще говоря, не обосновано никогда.

1 В трёхмерном случае радиус Вигнера-Зейтца — это радиус сферы, содержащей один электрон. В двумерном случае, соответственно — радиус круга, содержащего один электрон.

Утверждения, что, например, описание целочисленного квантового эффекта Холла не требует учёта электрон-электронного взаимодействия являются «научным жаргоном» — имеется в виду что общая картина происхождения целочисленного КЭХ может быть проиллюстрирована в одночастичной картине. (Однако эффекты взаимодействия важны и здесь — например в вопросах экранировки двумерной системой внешних электрических полей).

Задача Т.12.3

Для электрона в сильном магнитном поле получить квантование уровней энергии с помощью условия квантования Бора-Зоммерфельда. Провести численную оценку расстояния между двумя соседними уровнями энергии для GaAs (эффективная масса носителей $m=0.067\,m_0$ *массы свободного электрона) в магнитном поле 10 Тл и оценить температуру, необходимую для наблюдения эффектов, в которых наличие такой щели является существенным.*

Решение:

Строгое решение соответствующего уравнения Шредингера можно найти в любой литературе по теме (например, 3 том Ландау и Лифшица), задача решается в курсе теорфизики, решение уравнения Шредингера упоминается на лекции и обсуждается подробно в лекционных материалах.

Полезно получить тот же спектр $E=\hbar\omega_c(n+1/2)$, $n=0,1,2,3,\ldots$, где циклотронное расщепление $\omega_c=\frac{|e|B}{mc}$, из квазиклассических соображений – написав классическое уравнение для движения электрона в магнитном поле, подставить его в правило квантования Бора-Зоммерфельда и получить условие на квантование площади орбиты в пространстве импульсов, отсюда разрешённые значения импульса и соответственно энергию. Приводим этот вывод:

Для движения электрона по циклотронной орбите $\frac{e}{c}BV=m\frac{V^2}{R}$ откуда радиус циклотронной орбиты $R=mV\frac{c}{eB}$.

По правилу квантования Бора-Зоммерфельда $mV\times 2\pi R=nh$ (для кругового движения можно просто воспользоваться квантованием момента импульса: $mVR=n\hbar$). Откуда для энергии $E=\frac{mV^2}{2m}=\frac{1}{2}n\hbar\frac{eB}{mc}$. С точностью до множителя 1/2 результат совпадает с квантовомеханическим результатом.

По полученной формуле квант энергии около 100К, по точной формуле для циклотронной частоты около 200К.

Температура, необходимая для надёжного проявления эффектов квантования спектра должна быть на порядок ниже, т.е. мы опять-таки приходим к температурам жидкого гелия. В реальных системах существенную роль в определении возможности наблюдения квантования спектра играет уширение уровней Ландау короткопериодным беспорядком в образце.

Для исключения ошибки в 2 раза нужно в правиле Бора-Зоммерфельда использовать канонический импульс $\vec{p}=m\vec{V}-\frac{e}{c}\vec{A}$. Тогда для кругового движения

$nh = mV\times 2\pi R - \frac{e}{c}\oint \vec{A}\,d\vec{l} = mV\times 2\pi R - \frac{e}{c}\int\int rot\,\vec{A}\,d\vec{S} = mV\times 2\pi R - \frac{e}{c}B\times \pi R^2$. С учётом $R = mV\frac{c}{eB}$, получим $n\,h = \pi\,m\,V\,R = \pi\,m^2 V^2 \frac{c}{eB}$ и $E = \frac{mV^2}{2} = n\hbar\frac{eB}{mc} = n\hbar\omega_c$.

Задача 4.45

Сплав 95%Bi и 5%Sn является полуметаллом с перекрытием зон. В квантующем магнитном поле большем $B_c = 46.5\,Тл$ происходит переход металл-диэлектрик и сопротивление сплава резко возрастает. Оценить величину перекрытия зон при $B=0$. Эффективные массы электронов и дырок и их g-факторы равны $m_e = 0.128\,m_0$, $m_h = 0.21\,m_0$, $g_e = 5.56$, $g_h = 1.34$.

Указание: рассмотреть смещение экстремумов зон в магнитном поле, учитывая орбитальное и спиновое квантование спектра носителей тока.

Решение:

Задача решена в задачнике, здесь приводится краткое решение.

Эта задача описывает свойства трёхмерного полуметалла в квантующем магнитном поле. Для трёхмерного электрона разделяются переменные в уравнении Шредингера: движение в плоскости, перпендикулярной полю, квантуется, а движение вдоль поля остаётся классическим: $E = \frac{p_z^2}{2m} + \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)$.

Если искомое перекрытие зон полуметалла Δ , то, отсчитывая энергию от дна электронной зоны, получаем для электронов в поле:

$$E_e = \frac{p_z^2}{2m_e} + \hbar\omega_c^{(e)}\left(n+\frac{1}{2}\right) + g_e\mu_B B S_z \quad .$$

Для дырок:

$$E_h = \Delta - \frac{p_z^2}{2m_h} - \hbar\omega_c^{(h)}\left(n+\frac{1}{2}\right) + g_h\mu_B B S_z \quad .$$

Циклотронные частоты для электронов и дырок отличаются, так как отличаются их эффективные массы.

Переход металл-диэлектрик произойдёт, если минимальная энергия электронного состояния сравняется с максимальной энергией дырочного состояния:

$$\begin{aligned} &\Delta - \frac{\hbar\omega_c^{(h)}}{2} + \frac{g_h\mu_B B}{2} = \frac{\hbar\omega_c^{(e)}}{2} - \frac{g_e\mu_B B}{2} \\ &\Delta = \frac{\mu_B B}{2}\left(2\frac{m_0}{m_h} + 2\frac{m_0}{m_e} - g_h - g_e\right) \approx 25\,мэВ \end{aligned} \quad .$$

Интересно отметить, что возникновение именно такого перехода связано с положительностью выражения в скобках выше — для чего, вообще говоря, нет априорных причин: и эффективная масса, и g-фактор квазичастицы в полупроводнике являются функцией материала. Например, в задаче 4.46 иллюстрируется обратный эффект, когда полупроводник становится металлом в сильном поле.