

В.Н.Глазков

«Ведение в квантовую физику»

Москва  
2015

## Оглавление

От автора.....	4
Лекция 1. История возникновения квантовой теории. ....	7
Введение.....	7
О «здоровом смысле».....	7
Место квантовой физики в современной научной картине мира.....	9
Возникновение квантовой теории. Проблемы классической физики конца 19 века.....	12
Проблема 1. Строение атома.....	13
Проблема 2. Линейчатые спектры испускания и поглощения.....	14
Проблема 3. Фотоэффект.....	15
Проблема 4. Излучение чёрного тела.....	17
Проблема 5. Теплоёмкость твёрдых тел и газов при низкой температуре. ....	18
Первый шаг к разрешению противоречий классической физики: гипотеза Планка.....	22
Лекция 2. Гипотеза Планка. Отказ от детерминизма классической физики.....	23
Квант энергии.....	23
Формализм Гамильтона в классической механике.....	23
Отказ от детерминизма в квантовой теории.....	24
Проблема измерения в квантовой физике. Принцип неопределённости Гейзенберга.....	25
Статистическая трактовка квантовой механики. Волновая функция.....	27
Задача о гармоническом осцилляторе. ....	28
Вычисление энергии, запасённой в гармоническом осцилляторе.....	31
Теплоёмкость твёрдых тел. Модель теплоёмкости Эйнштейна. Теорема Нернста.....	33
Теплоёмкость многоатомных газов.....	34
Теплоёмкость твёрдых тел при низкой температуре. Модель теплоёмкости Дебая.....	37
Излучение чёрного тела.....	39
Лекция 3. Взаимодействие излучения с веществом.....	45
Фотон и другие квазичастицы.....	45
Давление света. ....	46
Законы внешнего фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. ....	50
Задачи на световые кванты и внешний фотоэффект.....	51
Внутренний и многоквантовый фотоэффект. ....	54
Практические применения фотоэффекта.....	57
Вакуумные фотоэлектронные умножители.....	57
Фотодиоды, фоторезисторы.....	58
Солнечные батареи.....	58
Эффект Комптона.....	60
Лекция 4. Волновые свойства частиц. Строение атома и периодическая система Д.И. Менделеева. Различные квантовые эффекты.....	63
Гипотеза де Бройля.....	63
Дифракция частиц. ....	64
Опыты Дэвиссона-Гермера. ....	65
Опыт Томсона.....	68
Дифракция нейтронов.....	69
Модель атома водорода Бора-Резерфорда.....	72
Ферми- и Бозе-частицы. Принцип Паули.....	73
Момент импульса и спин.....	74

Строение атома. Периодическая таблица Д.И.Менделеева.....	75
Различные квантовые эффекты.....	77
Ферми-газ в металле.....	77
Гиромангнитное отношение свободного электрона.....	80
Туннельный эффект.....	82
Квантовая «телепортация».....	87
Сверхтекучесть и сверхпроводимость.....	88
Заключение.....	92

## От автора

Данный текст написан по курсу лекций, прочитанных автором в Московском институте открытого образования в 2010 и 2012 году. Текст был вычитан в 2015 году с внесением незначительных исправлений. Лекционный курс читался учителям физики средних школ, проходящим профессиональную переподготовку. Предполагается наличие у слушателей знаний в рамках базовой школьной программы, владение математическим аппаратом в рамках чуть больше школьной программы.

Цель курса — показать как возникновение квантовой теории сняло неразрешимые противоречия классической физики, рассмотреть некоторые квантовые явления, лежащие в основе экспериментального обоснования квантовой теории, показать что квантовая физика позволяет понять и объяснить многие явления микро- и макромира. Курс был рассчитан на четыре шестичасовые лекции, разбиение текста по темам связано с этим форматом представления курса.

Автор является с.н.с. Института физических проблем им.П.Л.Капицы и доцентом МФТИ. Профессиональные интересы автора лежат в области физики низких температур — одной из тех областей физики, где проявляются квантовые явления.

Автор выражает благодарность всем слушателям МИОО, вместе с которыми и создавался лекционный курс, лёгший в основу этого текста.

Данный текст создан в некоммерческих образовательных целях. Используемые рисунки и данные взяты в открытых источниках и снабжены соответствующими ссылками на оригиналы. Разрешается свободное распространение этих материалов в некоммерческих целях без изменения содержания на условиях лицензии Creative Commons: Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International.

*Москва, 2015*

## Список литературы

- 1: Сайт нобелевского комитета, Список нобелевских лауреатов по физике, [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/)
- 2: Сайт нобелевского комитета, Список нобелевских лауреатов по химии, [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/chemistry/laureates/](http://nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/)
- 3: Amateurspectroscopy.com, Оптические спектры ряда распространённых химических элементов, <http://www.amateurspectroscopy.com/color-spectra-of-chemical-elements.htm>
- 4: Н.С.Хлебников, Работы А.Г.Столетова по фотоэффекту, УФН ,22, 384 (1939)
- 5: D.F.Weber , Die specifischen Wärmen der Elemente Kohlenstoff, Bor und Silicium, Annalen der Physik , 154, 553 (1875)
- 6: W.DeSorbo, Specific Heat of Diamond at Low Temperatures, J. Chem. Phys. , 21, 876 (1953)
- 7: R.E.Cornish and E.D.Eastman, The specific heat of hydrogen gas at low temperatures..., J. Am. Chem. Soc. , 50, 627 (1928)
- 8: G. G. Sherratt and Ezer Griffiths, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences , 147, 292 (1934)
- 9: G. G. Sherratt and Ezer Griffiths, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences , 156, 504 (1936)
- 10: A.Einstein, Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme, Annalen der Physik , 327, 180 (1907)
- 11: Лазарев П. П., К двадцатипятилетию со дня смерти П. Н. Лебедева, УФН , 17, 405 (1937)
- 12: Японское космическое агентство, Зонд IKAROS, <http://www.jspec.jaxa.jp/e/activity/ikaros.html>
- 13: Википедия, Работа выхода, [http://en.wikipedia.org/wiki/Work\\_function](http://en.wikipedia.org/wiki/Work_function)
- 14: M.C.Teich and G.J.Wolga, Two-Quantum Volume Photoelectric Effect in Sodium, Physical Review , 171, 809 (1968)
- 15: Википедия, Список крупных солнечных электростанций, [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_photovoltaic\\_power\\_stations](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_photovoltaic_power_stations)
- 16: A.Compton, A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements, Physical Review , 21, 483 (1923)
- 17: L. de Broigle, Waves and Quanta, Comptes Rendus , 177, 507 (1923)
- 18: C.Davisson, Nobel prize lecture, [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1937/index.html](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1937/index.html)
- 19: G.P.Thomson, A.Reid, Diffraction of Cathode Rays by a Thin Film, Nature , 119, 890 (1927)
- 20: G. P. Thomson, Experiments on the Diffraction of Cathode Rays, Proc. R. Soc. Lond. A , 117, 600 (1928)
- 21: Clifford G. Schull, Early development of neutron scattering, Rev. Mod. Phys. , 67, 753 (1995)
- 22: ILL, Веб-сайт Института Лауэ и Ланжевена, [www.ill.eu](http://www.ill.eu)
- 23: Ч.Киттель, Введение в физику твёрдого тела,
- 24: Википедия, Precision tests of QED, [http://en.wikipedia.org/wiki/Precision\\_tests\\_of\\_QED](http://en.wikipedia.org/wiki/Precision_tests_of_QED)
- 25: Википедия, Сканирующий туннельный микроскоп, [http://en.wikipedia.org/wiki/Scanning\\_tunneling\\_microscope](http://en.wikipedia.org/wiki/Scanning_tunneling_microscope)
- 26: FZ Juelich, STM Group, Scanning Probe Microscopy, [http://www.fz-juelich.de/ibn/Scanning\\_probe\\_microscopy](http://www.fz-juelich.de/ibn/Scanning_probe_microscopy)
- 27: Wake Forest University, STM Group, <http://www.wfu.edu/nanotech/Microscopy%20Facility/STMInstructions.html>
- 28: IBM Corp., STM Images Gallery, <http://www.almaden.ibm.com/vis/stm/gallery.html>

29: [superconductors.org](http://superconductors.org), , [www.superconductors.org](http://www.superconductors.org)

30: Википедия, , <http://en.wikipedia.org/wiki/Superconductor>

## Лекция 1. История возникновения квантовой теории.

### Введение.

Квантовая теория в школьной программе физики занимает не самое заметное место. Во многом это связано с чисто технической невозможностью рассматривать многочисленные (необычные и интересные) физические явления, относящиеся к квантовой физике, на достаточно строгом уровне (что часто требует владения достаточно сложным математическим аппаратом). В чём-то это связано и с тем, что квантовая физика это одна из завершающих тем курса физики и может сказываться нехватка учебных часов для изучения этой темы. В результате в школьной программе из вопросов квантовой физики остаются некоторые вопросы строения атома (боровская модель атома водорода), фотоэффект и давление света (которое, строго говоря, квантовым эффектом не является).

В результате такого поверхностного изучения может возникать существенный пробел в формировании научной картины мира — обрывочные знания порой страшнее незнания. И почти каждый может найти в памяти какие-то «заклинания»: «корпускулярно-волновой дуализм», «волновая природа частиц», «неопределённость». При этом уже трудно понять или вспомнить, откуда возникли эти «заклинания», что они означают. И начинается неуёмный полет фантазии. Из-за этого квантовая физика занимает почётное второе место (после теории относительности) в попытках ниспровержения «неправильных», «непонятных», «противоречащих здравому смыслу» теорий. Поэтому одной из задач нашего курса будет вспомнить и ПОНЯТЬ, что квантовая физика это не набор мистических «заклинаний», а логичная, связанная область научного знания, достоверно подтверждённая многочисленными экспериментами и наблюдениями.

Другое, может быть даже более важное, значение изучения квантовой физики для нас будет заключаться в возможности проследить, как развивается научное познание мира. На примере изучения теории электричества мы можем увидеть, как двигалось понимание электрических явлений от простых опытов и эмпирических законов к системе уравнений Максвелла — четырёх уравнений, в которых выражаются все наши знания о электрических и магнитных явлениях. На примере квантовой теории можно увидеть, как возникает новая область научного знания — от проблем в существующей картине мира к их пониманию и объяснению, и как эта новая область оказывается связана с уже существующими областями.

### О «здравом смысле».

Одна из психологических проблем при знакомстве с неклассическими разделами физики: в частности, квантовой физикой или теорией относительности, заключается в попытке примирить новые знания со своим повседневным опытом и с житейским «здравым смыслом». Так, узнав о волновых свойствах объектов микромира, человек подсознательно пытается применить это новое знание к привычным объектам. В результате, возникает конфликт: ведь наш опыт говорит, что мяч, книга, кошка — это вполне определённые объекты, находящиеся в определённом месте и уж точно никакими волнами в стороны не разбегающиеся.

Во избежание возникновения этой проблемы в дальнейшем, необходимо чётко понять, что наш «здравый смысл» формируется в очень ограниченном пространстве параметров — это

не слишком маленькие и не слишком большие предметы, двигающиеся не слишком быстро, взаимодействующие не очень сильно и не очень слабо и так далее. Частично это можно отобразить следующей схемой (рисунок 1).

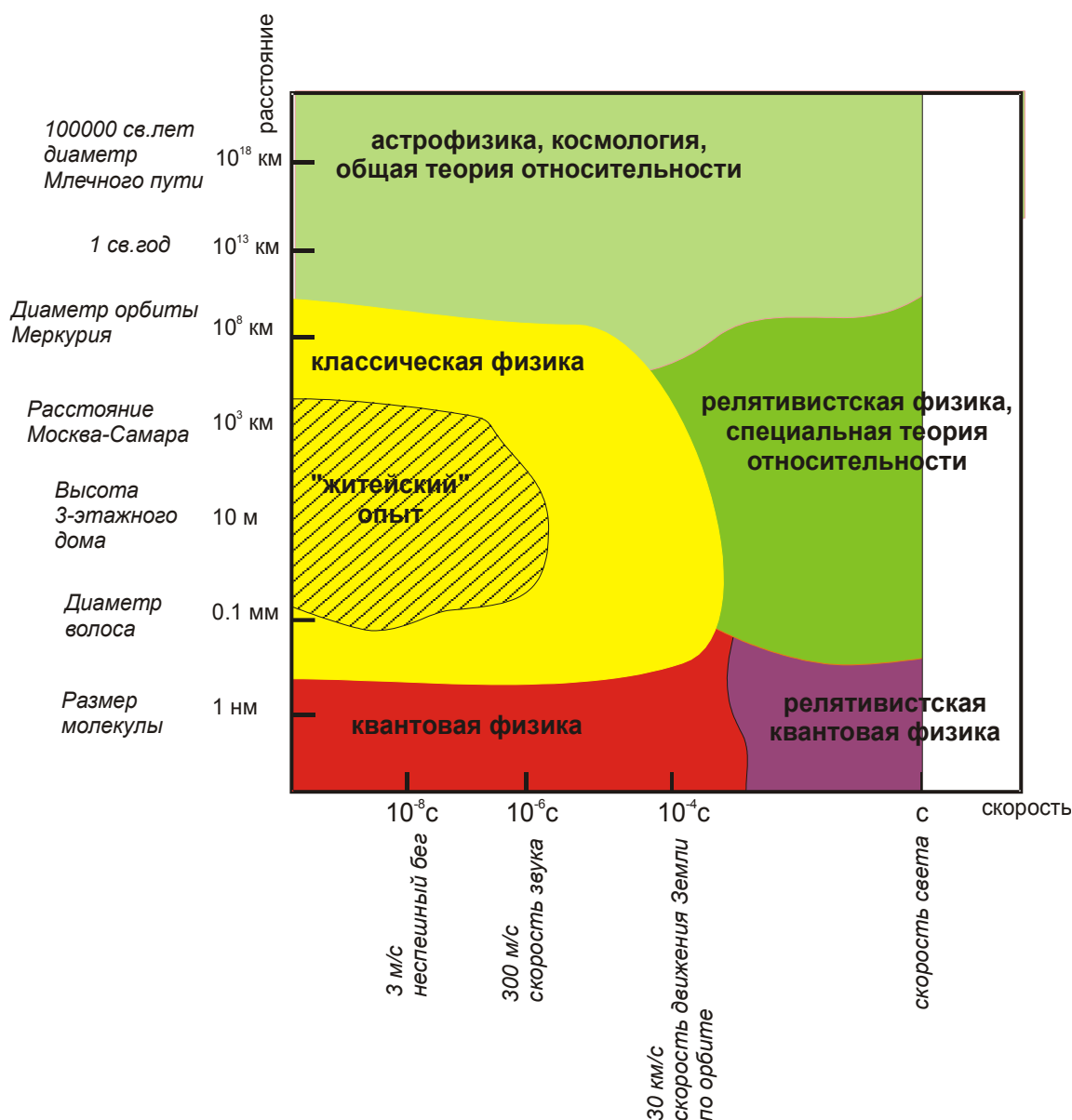


Рисунок 1: Область параметров на плоскости (скорость; расстояние) в которой формируется наш "здоровый смысл".

Схема эта весьма условна, чётких границ между различными областями физики нет — они переходят друг в друга непрерывно. Схема эта несомненно неполна, можно её уточнять, например, вспомнив про физику элементарных частиц. Но есть один важный вывод, ради которого мы и нарисовали эту схему: область параметров, в которой формируется наш «жизненный опыт» и «здоровый смысл» очень небольшая. Поэтому нет ничего удивительного, что в условиях далёких от привычных нам (в частности, в микромире) действуют другие законы. И применять понятия «здорового смысла» всегда надо с осторожностью, отдавая себе отчёт в том, что этот «здоровый смысл» не универсален.

Многое в природе оказывается невозможно вообразить опираясь на наш повседневный опыт,



однако при этом можно понять и объяснить. И в этом, возможно заключается одно из величайших достижений научного познания мира, одно из величайших достижений человеческого разума: мы можем понять то, чего не можем представить.

## **Место квантовой физики в современной научной картине мира.**

Забегая немного вперёд, до начала разговора о причинах, вызвавших переход к квантовой физике, можно отметить, что квантовая физика является важной составляющей научной картины мира, она тесно связана с другими областями физики: физика твёрдого тела это во многом квантовая физика, явления сверхтекучести и сверхпроводимости — это квантовые явления, вопросы строения материи и взаимодействия излучения с веществом не могут быть поняты во всей полноте без методов квантовой физики. В качестве в значительной степени объективной оценки роли квантовой физики можно рассмотреть список Нобелевских премий по физике [1] и химии [2] — и мы увидим, что за открытия, связанные с квантовой физикой присуждена заметная часть премий:

- 1904 — Уильям Рамзай (химия). В том числе, за получение и идентификацию гелия. Газ был идентифицирован по линейчатым спектрам поглощения, совпадающим с характерными линиями поглощения в излучении Солнца, обнаруженным ранее (Локьер, Жансен, ок. 1870).
- 1906 — Джозеф Джон Томсон. В признание выдающегося вклада его теоретических и экспериментальных исследований электропроводности газов. Одно из этих исследований привело к открытию электрона и, таким образом, открыло вопрос об установлении внутренней структуры атома.
- 1911 – Вильгельм Вин. За открытие законов, описывающих тепловое излучение. Задача об излучении абсолютно твёрдого тела рассматривалась многими выдающимися учёными того времени (Кирхгоф, Рэлей, Больцман). Как мы увидим позднее, полностью эта задача может быть решена только методами квантовой физики (что и сделал М.Планк).
- 1918 — Макс Карл Эрнст Людвиг Планк. За открытие кванта энергии (точная, трудно переводимая, формулировка: "in recognition of the services he rendered to the advancement of Physics by his discovery of energy quanta").
- 1919 — Иохан Штарк. В том числе, за открытие расщепления спектральных линий в электрическом поле. Этот эффект, эффект Штарка, был объяснен квантовой механикой.
- 1920 – Вальтер Герман Нернст (по химии). В признание его работ в области термодинамики. В частности, за открытие теоремы Нернста или третьего начала термодинамики, описывающего поведение материи вблизи абсолютного нуля и объяснимого только в рамках квантовой теории.
- 1921 — Альберт Эйнштейн. За достижения в области теоретической физики и, в особенности, за открытие закона фотоэффекта.
- 1922 — Нильс Хенрик Давид Бор. За достижения в изучении структуры атомов и испускаемого ими излучения.
- 1923 — Роберт Эндрю Милликен. За определение элементарного заряда и работы в области фотоэффекта. Интересно, что целью опытов Милликена по фотоэффекту

было опровержение гипотез Эйнштейна и Планка и «восстановление в правах» классической максвелловской электродинамики. Однако его опыты были выполнены настолько точно, что без всяких сомнений подтвердили эти гипотезы. В речи при представлении лауреата председатель Нобелевского комитета профессор А.Гуллstrand сказал: «Если бы опыты Милликена дали другой результат, закон фотоэффекта Эйнштейна оказался бы пустым, а теория Бора не получила бы такой опоры. После появления результатов Милликена оба они были удостоены Нобелевской премии.»

- 1924 — Карл Манне Георг Зигбан. За открытия и исследования в области рентгеновской спектроскопии. Его исследования рентгеновских спектров позволили связать рентгеновское излучение с переходами электронов между внутренними оболочками атомов и таким образом внесли вклад в обоснование теории Бора.
- 1925 — Джеймс Франк и Густав Людвиг Герц (в равных долях). За открытие законов, определяющих столкновения электронов и атомов. С появлением теории Бора задача о столкновении атома и частицы (электрона, например) перестала быть задачей классической механики, так как атом может поглощать только вполне определённые порции энергии, соответствующие переходу электрона между некоторыми уровнями. В своей речи при представлении лауреата член Нобелевского комитета профессор С.В.Озеен сказал: «Посредством разработанного лауреатами метода, при их личном участии получен большой материал, касающийся столкновений между электронами и различными объектами. Хотя полученные результаты важны и сами по себе, более важным в настоящий момент является заключение о том, что гипотеза Бора о различных состояниях атома и связь между этими состояниями и излучением по результатам этих измерений полностью соответствует реальности. »
- 1927 — Артур Холли Комптон (1/2 премии). За открытие эффекта Комптона. Эффект Комптона — это рассеяние фотона на электроне, при котором проявляются корпускулярные свойства излучения. Мы рассмотрим его позднее.
- 1929 — Луи де Бройль (герцог Луи-Виктор Пьер Раймонд де Бройль). За открытие волновой природы электрона.
- 1930 — Шандрасехара Венката Раман. За работы по изучению рассеяния света и открытие эффекта Рамана. Эффект Рамана или комбинационное рассеяние света был одновременно и независимо открыт советскими физиками Л.И.Мандельштамом и Г.С.Ландсбергом. Он проявляется в том, что при рассеянии света в среде возможны процессы, когда поглощённый и переизлучённый фотоны имеют несколько разную частоту. Разность этих частот соответствует энергии возбуждения центра рассеяния (например молекул среды).
- 1932 — Вернер Карл Гейзенберг. За создание квантовой механики, применение которой привело, в числе прочего, к открытию аллотропных форм водорода.
- 1933 — Эрвин Шредингер и Поль Адриен Морис Дирак (в равных долях). За открытие новых продуктивных представлений атомной теории. Основные уравнения нерелятивистской и релятивистской квантовой физики называются уравнениями Шредингера и Дирака, соответственно.
- 1937 — Клинтон Йозеф Дависсон и Джордж Пагет Томсон (в равных долях). За экспериментальное открытие дифракции электронов на кристалле.

- 1943 — Отто Штерн. За вклад в развитие метода молекулярных лучей и открытие магнитного момента протона. Эта работа связана с понятием спина элементарной частицы — специальной квантовой характеристики собственного момента вращения частицы. Полученный результат, известный как опыт Штерна — Герлаха, заключается в том, что при прохождении узкого пучка частиц (ионов) через область с неоднородным магнитным полем пучок не уширяется, как предсказывает классическая теория, а разбивается на несколько (в зависимости от вида частиц) узких пучков. Этот эффект непосредственно связан с не имеющими классического аналога правилами квантования момента вращения, о которых мы вкратце поговорим, когда будем обсуждать строение атома.
- 1945 — Вольфганг Паули. За открытие принципа исключения, также называемого принципом Паули.
- 1954 — Макс Борн (1/2 премии). За фундаментальный вклад в развитие квантовой механики и в особенности за статистическую интерпретацию волновой функции.
- 1955 — Виллис Эжен Лэмб, за открытие тонкой структуры спектра атома водорода, и Поликарп Куш, за точное определение магнитного момента электрона (в равных долях). Оба результата связаны с проявлением релятивистских эффектов и были позднее объяснены в рамках релятивистской квантовой теории (квантовой электродинамики). Мы вкратце затронем этот вопрос, так как с магнитным моментом электрона связан один из самых точных случаев совпадения теории и эксперимента.

К этому времени квантовая теория уже полностью принята и не вызывает сомнений, её методы применяются во многих областях физики. Так, вся физика конденсированного состояния опирается на квантовую теорию: это и теория металлов, и сверхпроводимость, и физика полупроводников. В физике элементарных частиц, естественно, царит квантовая физика. Поэтому далее перечислим только наиболее яркие открытия, или открытия связанные с советскими или российскими учёными:

- 1962 — Лев Давидович Ландау, за разработку передовых теорий в области физики конденсированных сред и, в особенности, жидкого гелия. Сверхтекучее состояние гелия является одним из макроскопических квантовых эффектов.
- 1964 — Чарльз Хард Таунс (1/2 премии), Николай Геннадьевич Басов (1/4 премии) и Александр Михайлович Прохоров (1/4 премии). За фундаментальные работы в области квантовой электроники, приведшие к созданию генераторов и усилителей работающих на принципе мазера-лазера.
- 1965 — Шин-Итиро Томонага, Джулиан Швингер, Ричард Фейнман. За их фундаментальный вклад в квантовую электродинамику. В частности, ими были объяснены аномалии в собственном магнитном моменте электрона, за обнаружение которых была присуждена Нобелевская премия по физике 1955 года.
- 1972 — Джон Бардин, Леон Нейл Купер, Джон Роберт Шрифер (в равных долях). За разработку теории сверхпроводимости, обычно называемой теорией БКШ.
- 1973 — Лео Есаки (1/4 премии) и Ивар Гиавер (1/4 премии), за экспериментальное обнаружение эффекта туннелирования в полупроводниках и сверхпроводниках, и Брайан Давид Джозефсон (1/2 премии), за теоретическое предсказание свойств тока сверхпроводимости через туннельный барьер и в особенности за совокупность явлений, называемую эффектом Джозефсона. Туннельный эффект — это особенная

форма «движения», не имеющая аналогов в классической физике. В результате туннелирования, например, электрон может перескочить («протуннелировать») из проводника в проводник через слой диэлектрика (туннельный барьер). На этом эффекте, например, работают туннельные микроскопы, позволяющие изучать поверхность с атомным разрешением.

- 1978 — Пётр Леонидович Капица (1/2 премии), за изобретения и открытия в области физики низких температур, Арно Аллан Пенциас и Роберт Вудро Вилсон (по 1/4 премии), за открытие реликтового космического излучения. Открытие Капицы — это в первую очередь открытие сверхтекучести гелия. Сверхтекучесть гелия это уникальное, квантовое, макроскопическое явление, теория которого была создана Л.Д.Ландау. Реликтовое излучение тоже несколько связано с квантовой физикой, так как спектр этого излучения является спектром абсолютно чёрного тела с температурой около 2К.
- 1985 — Клаус фон Клитцинг. За открытие квантового эффекта Холла.
- 1994 — Бертрам Н. Брокхауз и Клиффорд Г. Шульц (в равных долях). За пионерский вклад в развитие техники рассеяния нейтронов при исследовании конденсированных сред. Нейтроны проявляют волновые свойства, как и электроны. Поэтому при облучении кристалла нейтронами возникает дифракция. В силу малой длины волны и некоторых особенностей взаимодействия нейтронов с веществом, это представляет в руки исследователя мощный инструмент для изучения свойств вещества.
- 1996 — Дэвид М. Ли, Дуглас Д. Ошероф, Роберт С. Ричардсон ( в равных долях). За открытие сверхтекучести гелия-3. В изотопе гелия-3 на один нейтрон меньше, чем в обычном гелии-4. Поэтому свойства этих двух изотопов сильно отличаются: гелий-4 оказывается бозоном (подчиняется статистике Бозе), а гелий-3 оказывается фермионом (подчиняется статистике Ферми). Поэтому сверхтекучее состояние гелия-3 существенно отличается от аналогичного состояния гелия-4.
- 2003 — Алексей А. Абрикосов, Виталий Лазаревич Гинзбург, Энтони Дж. Леггет (в равных долях). За пионерский вклад в теорию сверхтекучести и сверхпроводимости.

Итак, заметная часть важнейших открытий в области физики связана с квантовой теорией. Квантовая теория, как мы видим по этому перечислению достижений, объяснила многие явления природы. Она является признанной и многократно подтверждённой теорией.

## **Возникновение квантовой теории. Проблемы классической физики конца 19 века.**

Только что мы рассмотрели путь становления квантовой теории «с высоты птичьего полёта» по Нобелевским премиям, которыми отмечено это развитие. Рассмотрим подробнее как возникла квантовая физика, какие причины привели к её возникновению. Это рассмотрение важно с познавательной, исторической и философской точки зрения, так как показывает на наглядном примере, как развиваются *научные* теории. Понимание этого вопроса позволит вам в последующем легко отсеивать часто возникающие *лженаучные* теории, о которых, к сожалению, слишком часто говорят и пишут в «популярных» средствах массовой «информации».

Итак, первым необходимым шагом к возникновению новой теории, в чём-то

ограничивающей область применения существующих теорий является появление объективно установленных фактов, которые нельзя объяснить существующими теориями. Что было известно в физике в конце 19 века? Довольно много: уже сложилась классическая механика (Ньютон, ок.1690; Лагранж, 1788; Гамильтон, 1833), термодинамика (Джоуль, Клаузиус, Больцман, Кельвин активно работали в середине-конце 19 века), электродинамика (уравнения Максвелла опубликованы в 1873 году). Известна история о том, как примерно в 1875 году молодой Макс Планк спросил своего профессора в университете Мюнхена Филиппа фон Жолли о новых областях в физике и получил ответ: «В этой области знаний все уже открыто, осталось только уточнить кое-какие детали». Как оказалось, некоторые из этих «деталей» являлись указателями на пути к революционным изменениям в физике.

Среди них выделим и рассмотрим подробнее следующие:

1. Строение атома. Невозможность существования стабильного атома с точки зрения электродинамики.
2. Линейчатые спектры испускания и поглощения. Классическая теория не может объяснить почему испускание и поглощение света различными атомами происходит на дискретных частотах, связанных к тому же простыми алгебраическими соотношениями (например, для серии Бальмера в спектре атома водорода  $\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ ).
3. Фотоэффект. Невозможность объяснить красную границу фотоэффекта и зависимость энергии фотоэлектронов только от частоты.
4. Излучение чёрного тела. Отсутствие полного объяснения зависимости интенсивности излучения нагретого тела от частоты и температуры.
5. Теплоёмкость твёрдых тел и газов при низкой температуре. При понижении температуры теплоёмкость тел меняется так, что нарушается теорема о равномерном распределении.

### **Проблема 1. Строение атома.**

В 1897 году Дж.Дж.Томсон опубликовал свою работу об обнаружении частиц более мелких, чем атомы. Фактически, этим было установлено существование электрона, как более мелкой составной части материи.<sup>1</sup> После этого сразу возник вопрос об устройстве атома, который, как тогда уже было известно, в целом электронейтрален.

В попытке разрешить эту задачу Томсон предложил (1903) свою модель атома, в которой положительный заряд распределён непрерывно по объёму «атома», а электроны оказываются погружены в эту положительно заряженную каплю. Эта модель известна так же как «модель пудинга» — электроны напоминают изюминки в пудинге. Эта модель кажется странной сейчас, когда мы уже привыкли к планетарной модели Резерфорда-Бора. Однако надо заметить, что есть одно простое соображение из теории электричества, которое возможно подтолкнуло Томсона к его модели. Дело в том, что в электростатике строго доказывается, что система из точечных зарядов не может пребывать в статическом равновесии. То есть, вероятно, Томсону было прекрасно известно, что устроить равновесие между малым (точечным) электроном и малым (точечным) ядром невозможно. Модель, в которой электрон

---

<sup>1</sup> Этот результат был в числе тех, за которые Дж.Дж.Томсону была присуждена Нобелевская премия по физике 1906 года.

погружен в «пудинг» положительного заряда такого недостатка лишена. Например для простейшего случая одного электрона и сферической «капли» положительного заряда для электрона есть положение устойчивого равновесия в центре «капли».

Дальнейшие исследования Резерфорда (1911, после присуждения ему нобелевской премии по химии в 1908 году) показали, что положительный заряд локализован. Это привело к планетарной модели атома — для обхода упомянутой выше статической нестабильности системы точечных зарядов электроны предположены движущимися по орбите вокруг массивного положительно заряженного ядра.

При этом однако возникает проблема связанная с электродинамикой: движение по окружности ускоренное, а ускоренно движущаяся частица излучает. Таким образом, движущийся по круговой орбите электрон должен все время излучать электромагнитные волны и, следовательно, терять энергию и, в конечном итоге, падать на ядро. Время жизни такого атома оказывается ничтожно малым.

*Итак: эксперимент указывает на планетарную модель атома, однако такой атом не может существовать с точки зрения классической теории.*

### **Проблема 2. Линейчатые спектры испускания и поглощения.**

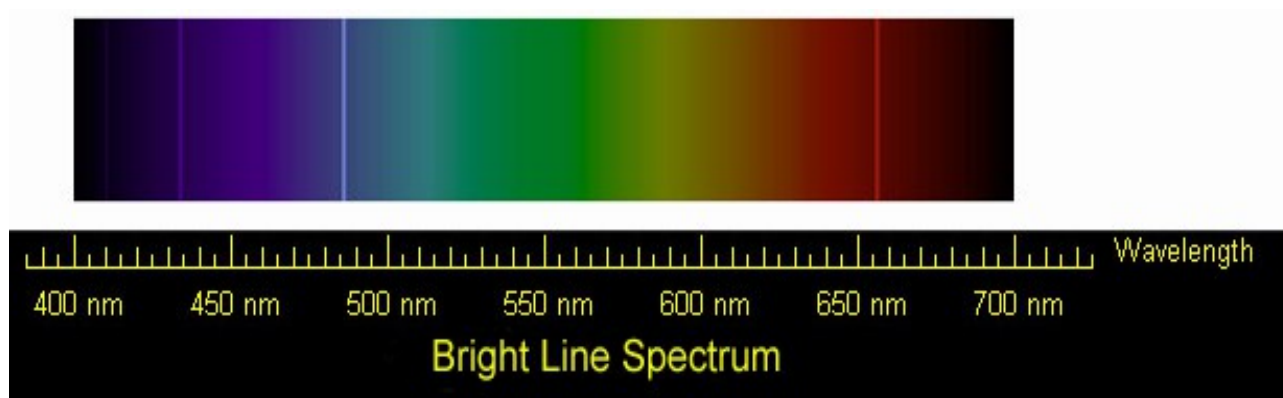


Рисунок 2 Серия Бальмера в спектре водорода. С сайта [http://imagine.gsfc.nasa.gov/science/toolbox/xray\\_generation\\_atom.html](http://imagine.gsfc.nasa.gov/science/toolbox/xray_generation_atom.html)

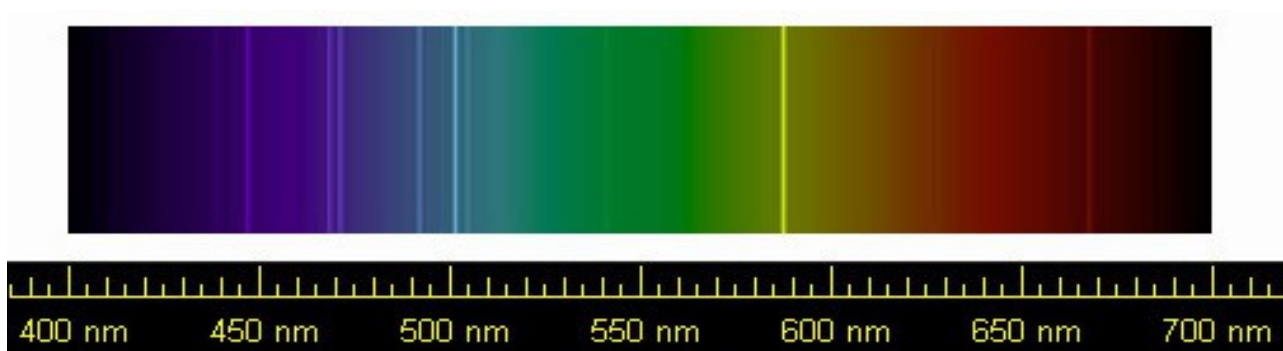


Рисунок 3 Спектральные линии гелия. С сайта [http://imagine.gsfc.nasa.gov/educators/lessons/xray\\_spectra/worksheet-specgraph2-sol.html](http://imagine.gsfc.nasa.gov/educators/lessons/xray_spectra/worksheet-specgraph2-sol.html)

В 1704 году в труде Ньютона «Оптика» было описано разложение белого света на составляющие. В начале 19 века Фраунгофер (1814) обнаружил что в спектре солнечного света существует свыше 500 тёмных линий (называемые теперь линиями Фраунгофера). В 1854 году Кирхгоф и Баузен начали изучать спектры пламени, окрашенного парами

металлических солей, и пришли к выводу (1859), что яркие линии в спектре пламени совпадают с тёмными линиями, проявляющимися при пропускании через пламя «внешнего» света, а также к выводу о том, что эти линии уникальны для различных элементов (сравните серии спектральных линий для водорода и гелия на рисунках 2 и 3, многочисленные примеры спектров испускания и поглощения различных элементов могут быть найдены в литературе или на специализированных сайтах, например [3]).

Эти наблюдения привели к развитию спектрального анализа — мощного метода бесконтактного определения состава тел. В частности было установлено присутствие на солнце натрия и калия (Кирхгоф). Позднее (1868) Пьер Жансен и Норман Локьер практически одновременно обнаружили в спектре Солнца жёлтую линию, не соответствующую никакому из известных элементов — так был открыт гелий.<sup>1</sup> Он был получен в лаборатории только в 1895 году Уильямом Рамзаем и именно спектроскопия подтвердила, что этот элемент совпадает с «солнечным» элементом гелием. Исследования Рамзая были отмечены Нобелевской премии по химии 1904 года.

Спектр излучения водорода показан на рисунке 2. Яркие линии, попадающие в видимую часть спектра, называют серией Бальмера (длины волн четырёх видимых линий серии Бальмера: 656 нм, 486 нм, 434 нм и 410 нм). Серия Бальмера открыта Иоганном Бальмером в 1885 году. Кроме этого, известны серии спектральных линий в других областях спектра: серия Лимана (1906-1914) в ультрафиолетовой части спектра, серия Пашена (серия Ритца-Пашена) (1908) в инфракрасной части спектра, серии Браккетта (1922), Пфунда (1924), Хэмпфри (1953) и безымянные серии в области ещё более длинных волн.

Оказалось удивительным, что все линии спектра водорода могут быть описаны простой эмпирической формулой Ридберга:  $\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ . Здесь  $R_H$  — постоянная Ридберга

для водорода, равная  $109737 \text{ см}^{-1}$ , а целое число  $n_0$  принимает разные значения для разных серий:  $n_0=2$  для серии Бальмера, 1 — для серии Лимана, 3 — для серии Пашена, 4, 5 и 6 — для серий Браккетта, Пфунда и Хэмпфри соответственно. Аналогичной формулой (с другим значением постоянной Ридберга) описывались спектры других водородоподобных атомов.

*При этом классическая теория не может объяснить ни причины для появления дискретных линий в спектре излучения элементов, ни происхождение такого простого алгебраического правила, связывающего длины волн спектральных линий.*

### **Проблема 3. Фотозффект.**

Первые наблюдения влияния света на электрические свойства относятся к 1839 году, когда французский физик А.Э.Беккерель обнаружил, что ток в электролите немного увеличивается при облучении катода светом. Следующим важным наблюдением было открытие в 1873 году английским инженером В.Смитом увеличения проводимости селена под действием сильного освещения — фактически это было открытие внутреннего фотозффекта.

Подробное исследование фотозффекта началось с опытов Г.Герца (1887). Герц исследовал приём электромагнитных волн, в качестве «индикатора» использовался искровой промежуток — при принятии катушкой антенны электромагнитной волны возникающая ЭДС индукции проявлялась в виде искрового разряда. Для облегчения наблюдения Герц поместил разрядник в затемнённую коробку со стеклянным окном. При этом он заметил, что длительность

---

<sup>1</sup> Наблюдённая Жансеном и Локьером линия — это жёлтая D3 линия гелия с длиной волны около 587.7 нм.

разряда уменьшается. При удалении стеклянного окна длительность разряда увеличивалась. При замене стеклянного окна кварцевым (прозрачным в ультрафиолетовой области спектра) уменьшения длительности не наблюдалось. По результатам этих опытов Герц установил, что прохождение искры облегчается при облучении разрядника ультрафиолетом.

Систематическое исследование фотоэффекта было предпринято в 1888-1890 году Александром Георгиевичем Столетовым<sup>1</sup> (исторический обзор результатов этих работ имеется в статье [4]). Он разработал ставшую классической при исследовании фотоэффекта схему с двумя электродами: анодом-сеткой и сплошным катодом, к которым прикладывался внешний потенциал. В этих опытах А.Г.Столетов обнаружил возникновение фототока при облучении катода светом от вольтовой дуги. Столетову пришлось преодолеть много технических трудностей: например, напряжение до 200В на электродах приходилось получать набором элементов Вольта или подобных, свет вольтовой дуги был нестабилен по интенсивности (её питали от генератора, городской сети электроснабжения в лаборатории изначально не было) и для проведения количественных измерений пришлось разработать методику при которой в ходе опыта постоянно регистрировалась и интенсивность света.

В результате опытов Столетовым установлен первый закон фотоэффекта (закон Столетова):

- фототок прямо пропорционален интенсивности падающего на фотокатод света (облучение анода не вызывает появления фототока).

В 1902 году Филипп фон Ленард (Нобелевский лауреат по физике 1905 года за работы по «катодным лучам» - т.е. за исследования потока электронов от катода в вакуумной трубке) установил, что запирающее напряжение, останавливающее фототок, определяется длиной волны облучающего излучения, а не его интенсивностью, причём с уменьшением длины волны запирающее напряжение растёт. По техническим причинам (быстрое окисление фотокатода) Ленард не смог получить количественных результатов, связывающих длину волны (частоту) излучения с величиной запирающего напряжения. Позднее, уже после появления работы Эйнштейна по фотоэффекту, Милликен провел серию точных опытов<sup>1</sup> (1905-1916), в которых качественные наблюдения Ленарда были подтверждены. Результаты опытов Милликена и Ленарда обобщаются в ещё два закона фотоэффекта:

- максимальная скорость фотоэлектронов (величина запирающего напряжения) определяется только частотой излучения и не зависит от частоты.
- существует зависящая от материала фотокатода «красная граница фотоэффекта»: при облучении фотокатода излучением с длиной волны меньшей граничной фототок не возникает.

С точки зрения классической теории, о фотоэффекте можно было бы рассуждать, как о взаимодействии электронов катода с полем падающей волны. В рамках этих представлений закон Столетова (зависимость фототока от интенсивности излучения) выглядит достаточно естественно: чем больше интенсивность, тем больше амплитуды поля в волне, тем сильнее они действуют на электроны, тем больше электронов создаёт фототок.

*Однако классическая теория не может объяснить существование красной границы фотоэффекта (ниже которой никакая<sup>2</sup> интенсивность излучения не приводит к*

1 А.Г.Столетов (1839-1896), русский физик, заслуженный профессор Московского университета

1 Историческим курьёзом является то, что Милликена к проведению этих опытов простимулировало недоверие к теории фотоэффекта Эйнштейна — однако именно качественное выполнение этих опытов подтвердило теорию с высокой точностью.

2 Точнее, ниже красной границы фотоэффекта возможен *многоквантовый фотоэффект*, когда энергия



*фототоку!) и зависимость максимальной скорости электронов только от частоты излучения.*

#### **Проблема 4. Излучение чёрного тела.**

Абсолютно чёрным телом в физике называют тело, которое поглощает все падающее на него излучение. Эта концепция была введена Кирхгофом в 1862 году. Если абсолютно чёрное тело находится в термодинамическом равновесии с окружающей средой, оно не только поглощает излучение, но и излучает само — это просто требование закона сохранения энергии. Из-за этого такое «абсолютно чёрное» тело визуально имеет цвет. Примером может служить раскалённый уголь в печи — на вид он красный, однако он поглощает падающее на него излучение, в чем легко убедиться посветив на него чем-либо. Задача о «цвете» этого собственного излучения (точнее о его спектре) — это одна из важных задач термодинамики и теории электричества.

Й.Стефан (1879, эмпирически) и Л.Больцман (1884, с использованием теории Максвелла) установили закон (закон Стефана-Больцмана) связывающий полный поток излучения от абсолютно чёрного тела с его температурой:  $\frac{P}{S} = \sigma T^4$ , где  $\sigma$  - т.н. постоянная Стефана-Больцмана. Закон подтвержден экспериментально Л.Гретцем в 1880 году.

В 1893 году В.Вин, используя термодинамику и теорию электричества, вывел первый закон Вина для спектральной плотности излучения черного тела:  $\frac{dP}{d\nu} = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ . Отсюда, в частности следует закон смещения Вина: положение максимума  $\nu_{max}$  в спектре излучения чёрного тела определяется только его температурой,  $\nu_{max} = AT$ . За эти работы Вин был удостоен Нобелевской премии по физике 1911 года.

Однако точный вид спектральной функции излучения чёрного тела вывести из классических соображений невозможно. В 1900 году Рэлей вывел спектральную функцию из классических соображений, этот вывод был приведён в более строгую форму Джинсом (1905). Согласно закону Рэля-Джинса  $\frac{dP}{d\nu} = \frac{2\nu^2 kT}{c^2}$ . При низких частотах предсказания классической

теории соответствуют опыту. Однако, с ростом частоты спектральная плотность  $\frac{dP}{d\nu}$  неограниченно возрастает, так что полная излучённая энергия оказывается бесконечно велика. Полученный вывод получил название «ультрафиолетовой катастрофы». Вин на основании эмпирических соображений предложил в 1896 году другой вид спектральной функции, лишённый этой проблемы (второй закон Вина):  $\frac{dP}{d\nu} = C_1 \nu^3 e^{-C_2 \nu/T}$ . Но эта формула не описывает правильно низкочастотное поведение, кроме этого, в ней содержатся неизвестные константы  $C_1$  и  $C_2$ .

*Применение классической теории приводит к «ультрафиолетовой катастрофе», классическая теория не в состоянии последовательно описать свойства излучения абсолютно чёрного тела.*

---

нескольких квантов тратится на вырывание из катода единственного электрода. Однако наблюдение многоквантового фотоэффекта стало возможно только с появлением лазеров, никакие другие источники света не создают достаточную интенсивность. Мы приведём пример эксперимента по многоквантовому фотоэффекту при более подробном рассмотрении этого явления.

**Проблема 5. Теплоёмкость твёрдых тел и газов при низкой температуре.**

В 1819 году французские физики Дюлонг и Пти обнаружили, что молярная теплоёмкость практически всех простых твёрдых тел при комнатной температуре составляет примерно 25 Дж/(моль·К). В этом легко убедиться по табличным данным из справочников (данные при комнатной температуре):

Вещество	Удельная теплоёмкость, Дж/(кг·К)	Молярная масса, кг/моль	Молярная теплоёмкость, Дж/(моль·К)
Алмаз	502	$12 \cdot 10^{-3}$	6.02
Железо	444	$55.8 \cdot 10^{-3}$	24.8
Свинец	130	$207.2 \cdot 10^{-3}$	26.9
Литий	3582	$6.94 \cdot 10^{-3}$	24.9
Вольфрам	134	$184 \cdot 10^{-3}$	24.7
Золото	129	$197 \cdot 10^{-3}$	25.4
Медь	385	$63.5 \cdot 10^{-3}$	24.4
Бериллий	1824	$9.01 \cdot 10^{-3}$	16.4

Обоснование этого правила окончательно сложилось с доказательством Людвигом Больцманом теоремы о равнораспределении (1876). Согласно этой теореме в равновесии средняя энергия распределена равномерно между всеми независимыми степенями свободы системы. Энергия, приходящаяся на одну «кинетическую» степень свободы связана с температурой — это  $\frac{1}{2}kT$ . В твёрдом теле степени свободы атомов в кристалле являются колебательными степенями свободы, при колебаниях средняя кинетическая и средняя потенциальная энергии равны, поэтому энергия на колебательную степень свободы вдвое больше. Наконец, у каждого атома есть три степени свободы (по числу координат). Таким образом, по теореме о равнораспределении на моль твёрдого тела приходится тепловая энергия  $3k N_A T = 3RT$  ( $R$  – универсальная газовая постоянная), а молярная теплоёмкость равна  $3R = 24.9 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ .

Из той же теоремы о равнораспределении следует привычное нам правило о теплоёмкости идеального газа: для одноатомного газа  $c_V = \frac{3}{2}R$ , для двухатомного  $c_V = \frac{5}{2}R$ , для трёх- и более атомного  $c_V = 3R$ .

Однако эксперимент не полностью соответствует этой простой и понятной картине. Уже в 1872 году Д.Ф.Вебер обнаружил [5], что теплоёмкость некоторых твёрдых тел (бора, кремния, графита, алмаза) зависит от температуры (рисунок 4).

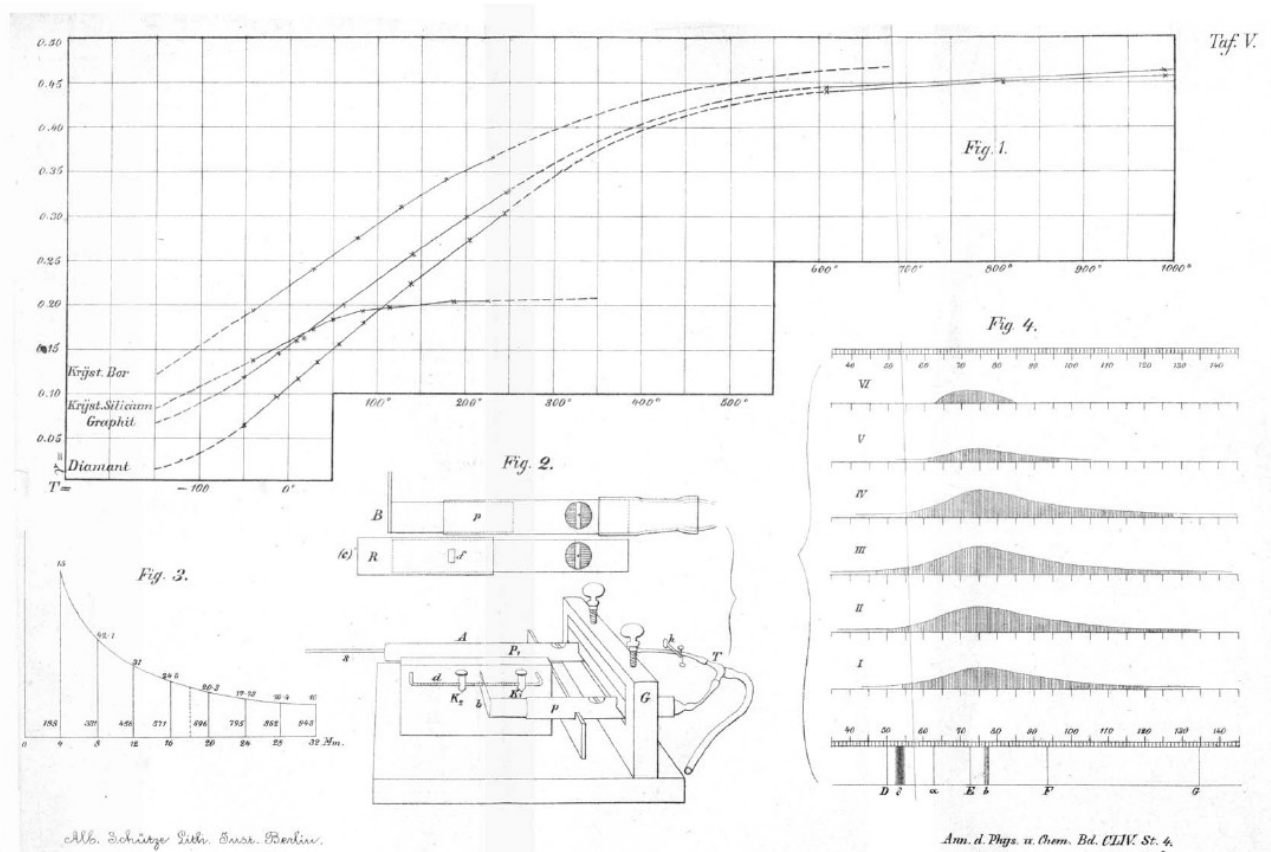


Рисунок 4: Зависимости теплоёмкости бора, кремния, графита и алмаза от температуры. Из статьи [5].

С появлением сжиженных газов физикам стали доступны низкие температуры, и оказалось, что при дальнейшем понижении температуры теплоёмкость продолжает уменьшаться и уменьшается до нуля. Эти исследования, в частности, проводились Дьюаром (1905), Нернстом (1911). В качестве примера [6], на рисунке 5 приведена зависимость теплоёмкости алмаза от температуры

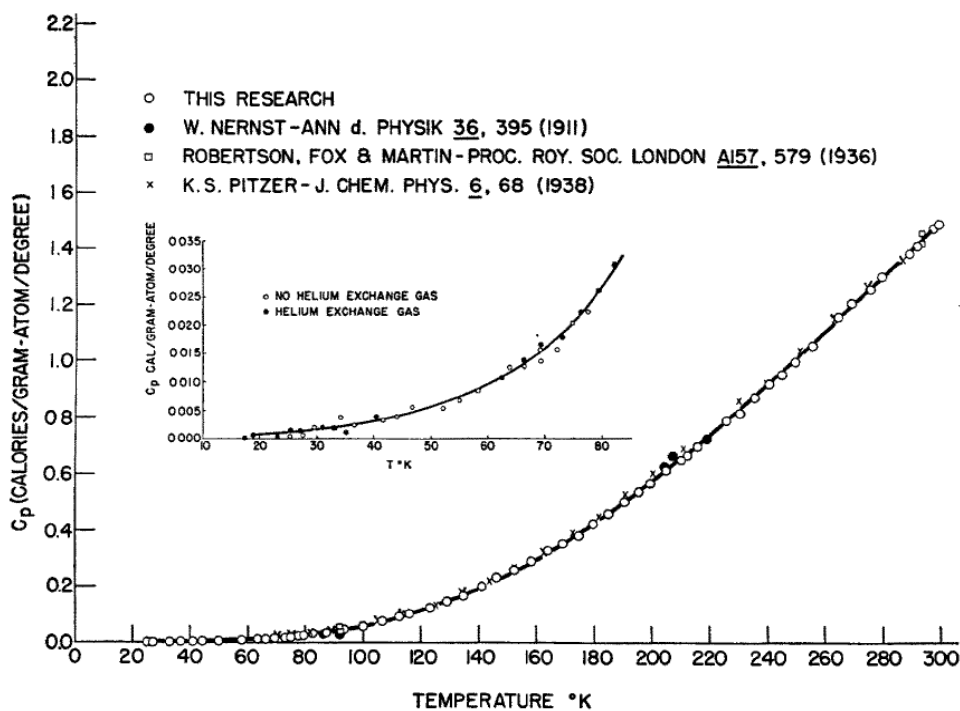


FIG. 1. Low temperature specific heat of diamond; this research and previous investigations.

Рисунок 5: Зависимость теплоёмкости алмаза от температуры при низких температурах. Из статьи [6].

Так же не все хорошо оказалось с теплоёмкостью газов — она на поверку тоже оказалась зависящей от температуры, что не соответствовало теореме о равнораспределении. Например, для молекулярного водорода при понижении температуры «пропадает» часть теплоёмкости, соответствующая (по теореме о равнораспределении) вращательным степеням свободы [7](рисунок . То есть при низких температурах двухатомная молекула начинает вести себя как одноатомная.

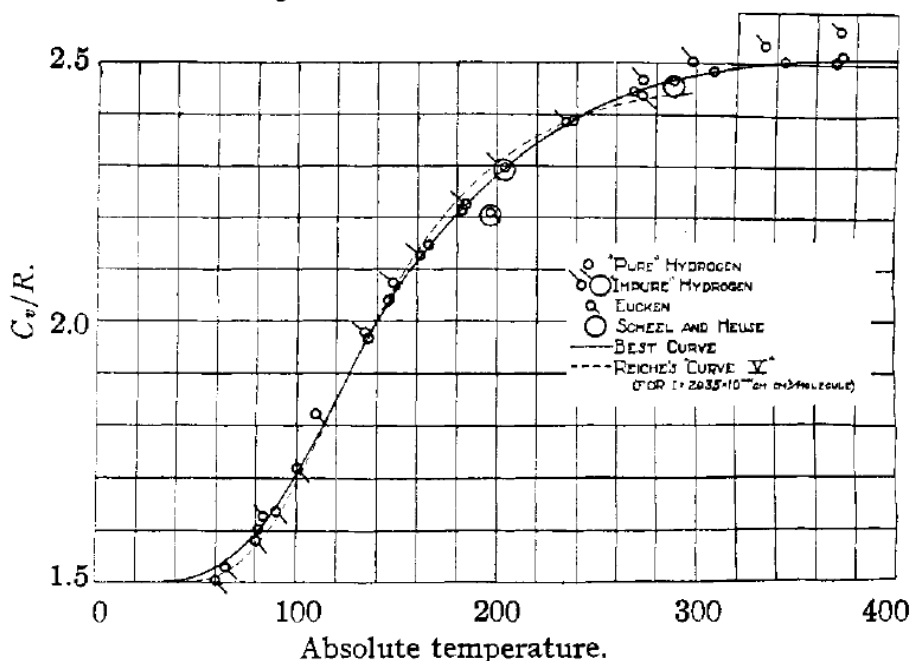


Fig. 3.—Specific heat of hydrogen.

Рисунок 6: Теплоёмкость газообразного водорода при низких температурах. Из статьи [7].

Более того, оказалось, что при повышении температуры теплоёмкость газов, состоящих из многоатомных молекул, увеличивается по сравнению со значением, определяемым теоремой о равномерном распределении. Например, для окиси углерода (двухатомная молекула CO, предсказание теоремы о равномерном распределении:  $c_v/R=5/2$ ) Шеррат и Гриффитс получили [8] в 1934 году результаты для  $c_v$ , показанные на рисунке 7. Видно, что при температуре более 1000 °C наблюдаемое значение  $c_v/R$  оказывается больше трёх.

Temperature ° C	$\beta \times 10^5$ second	Experi- mental	$C_v/R$		
			Planck Einstein	Gordon and Barnes	Kassel
1000	1.0	3.147	3.127	3.150	3.135
1200	1.2	3.257	3.204	3.231	3.215
1400	1.15	3.261	3.260	3.291	3.273
1600	1.1	3.305	3.302	3.338	3.320
1800	1.0	3.368	3.334	3.376	3.354

Рисунок 7: Таблица экспериментальных результатов для теплоёмкости окиси углерода при высоких температурах. Экспериментальные данные для отношения  $c_v/R$  приведены в третьем столбце, в следующих столбцах - сравнение с разными моделями. Из статьи [8].

А для двуокиси углерода (трехатомная молекула CO<sub>2</sub>, предсказание теоремы о равномерном распределении:  $c_v=3R=24.9$  Дж/(K·моль)=5.9 кал/(K·моль)) они же двумя годами позже получили [9] аналогичные результаты: значение близкое к предсказанию теоремы о равномерном распределении наблюдается при комнатной температуре, но при нагреве до 1000 °C теплоёмкость газа возрастает вдвое (рисунок 8).

The specific heat values obtained are given below:

Temperature °C.	$C_v$ cal./gm. mol. at 1 atmosphere pressure		
	Present investigation	I.C.T.	Spectroscopic
0	6·62	6·63	6·67
200	8·65	7·60	8·49
400	10·06	8·48	9·80
600	10·81	9·15	10·64
800	11·30	9·72	11·21
1000	11·76	10·17	11·61

The figures in the column denoted by I.C.T. are based on data given in the International Critical Tables.

*Рисунок 8 Таблица экспериментальных результатов для теплоёмкости окиси углерода при высоких температурах. Экспериментальные данные (в единицах кал/(К·моль)) приведены по результатам нескольких исследований. Из статьи [9].*

*Все эти наблюдения показывают, что количество «активных» степеней свободы, для которых верна теорема о равномерном распределении оказывается зависящим от температуры. Классическая физика не может объяснить причин такой «активации».*

## Первый шаг к разрешению противоречий классической физики: гипотеза Планка.

В 1900 году Макс Планк (которому когда-то его профессор говорил, что ничего существенного в физике не осталось) для решения задачи об излучении чёрного тела выдвинул предположение, которое открыло дорогу к революционному перевороту в физике. Он предположил, что излучение излучается и поглощается не произвольными количествами, а дискретными порциями, и что размер одной такой порции (кванта излучения) пропорционален частоте излучения:  $\Delta E = h\nu = \hbar\omega$ . Коэффициент пропорциональности называется постоянной Планка, это фундаментальная физическая константа не сводящаяся к другим, её величина:  $h = 6.62606896(33) \times 10^{-34}$  Дж·с. Иногда, когда удобнее использовать не частоту колебаний  $\nu$ , а угловую скорость  $\omega$  используют «постоянную Планка с чертой»  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571628(53) \times 10^{-34}$  Дж·с.

Как мы увидим на следующей лекции, в десятке слов этой гипотезы содержатся идеи в корне изменившие наше восприятие мира. Эта гипотеза оказала такое влияние на развитие физики, что в 1918 году Планку была присуждена Нобелевская премия по физике «in recognition of the services he rendered to the advancement of Physics by his discovery of energy quanta» (в признание услуг, которые он оказал продвижению Физики своим открытием кванта энергии).

## Лекция 2. Гипотеза Планка. Отказ от детерминизма классической физики.

### Квант энергии.

На предыдущей лекции мы рассмотрели какие неразрешимые задачи возникли перед классической теорией на рубеже 19 и 20 веков. Как мы уже сказали, первый большой шаг к решению этих задач сделал Макс Планк: он выдвинул предположение, что электромагнитное излучение излучается и поглощается дискретными порциями (квантами). Собственно эту гипотезу Планк выдвинул для решения задачи об излучении чёрного тела (позднее мы решим эту задачу), однако значение этой гипотезы быстро вышло за рамки задачи о чёрном теле. Сразу оговоримся, что теперь мы не будем придерживаться исторической последовательности в изложении материала. История помогла нам на прошлой лекции понять, как появлялась квантовая физика, теперь же нам надо понять как связаны понятия квантовой теории с описанием различных физических явлений.

Действительно, если взаимодействие электромагнитного поля и материи происходит путём излучения или поглощения дискретных порций энергии, то и взаимодействие двух тел посредством электромагнитного поля должно подчиняться этим новым квантовым правилам. Но, если посмотреть на многие задачи той же механики, то оказывается, что взаимодействие тел в этих задачах сводится к электромагнитному: например, удар двух тел, происходит из-за электрического взаимодействия атомов (заряженных частиц, составляющих атомы) при сильном сближении этих тел. А это значит, что и в таких чисто механических задачах энергия взаимодействующих тел по крайней мере в некоторых случаях должна изменяться только дискретными порциями.

Таким образом, гипотеза Планка, сформулированная для задачи об излучении, приводит к выводу о дискретности изменения энергии в механике. Но в механике энергия — это очень важное понятие. Дело не только в том, что энергия это сохраняющаяся величина, а в том, что энергия системы (точнее форма зависимости энергии от координат и импульсов) в классической механике полностью определяет динамику системы.

### Формализм Гамильтона в классической механике.

Нам со школы привычна запись уравнений динамики в форме второго закона Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d \vec{p}}{dt} .$$

Однако у классической механики есть и другие формы записи,

эквивалентные ньютоновской.

Одна из этих форм была предложена в 1833 году В.Гамильтоном. Получим уравнения механики в форме Гамильтона (вывод не совсем строгий). Пусть никаких диссипативных сил в рассматриваемой механической системе нет — то есть все силы являются потенциальными (например, силы упругости). Пусть нам известна функция энергии системы:

$$E = E(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\}) = K(\{\vec{p}_i\}) + \Pi(\{\vec{r}_i\})$$

здесь  $K(\{\vec{p}_i\})$  и  $\Pi(\{\vec{r}_i\})$  — кинетическая и потенциальная энергии системы, которые являются функциями импульсов (кинетическая энергия) и координат (потенциальная энергия) всех частиц системы. По определению потенциальной энергии, сила действующая

на  $i$ -ую частицу есть:

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial \Pi(\{\vec{r}_i\})}{\partial \vec{r}_i}$$

Объединяя это равенство со вторым законом Ньютона и вспоминая, что кинетическая энергия явно от координат не зависит, получаем:

$$\frac{d \vec{p}_i}{dt} = -\frac{\partial E(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\})}{\partial \vec{r}_i}$$

Вспоминая, что  $K(\{\vec{p}_i\}) = \sum \frac{\vec{p}_i^2}{2m}$ , можно написать тождество

$$\frac{d \vec{r}_i}{dt} = \vec{V}_i = \frac{\partial K(\{\vec{p}_i\})}{\partial \vec{p}_i} = \frac{\partial E(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\})}{\partial \vec{p}_i}.$$

Полученные уравнения называют уравнениями Гамильтона. Эти уравнения полностью определяют динамику в задаче классической механике:

$$\begin{aligned} \frac{d \vec{p}_i}{dt} &= -\frac{\partial E(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\})}{\partial \vec{r}_i} \\ \frac{d \vec{r}_i}{dt} &= \frac{\partial E(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\})}{\partial \vec{p}_i} \end{aligned}$$

Мы получили их из уравнений Ньютона, можно проделать все рассуждения наоборот и получить из них уравнения Ньютона.

Уравнения Гамильтона являются одной из эквивалентных форм записи уравнений классической механики. И, как и положено уравнениям классической механики, они сохраняют свойства детерминизма: если задан вид энергии (задан закон взаимодействия всех тел) и заданы точно все начальные координаты и импульсы, то мы можем (в принципе) решить эти уравнения и найти положения частей системы в любой момент времени.

## Отказ от детерминизма в квантовой теории.

Ранее мы показали, что из гипотезы Планка с необходимостью следует вывод о том, что по крайней мере в некоторых задачах механики энергия изменяется дискретно (квантами). Однако, уравнения классической физики, полученные нами выше, предполагают дифференцируемость энергии, что по известной математической теореме означает непрерывность энергии, как функции координат и импульсов. Противоречие этих двух выводов показывает, что гипотеза Планка, строго говоря, несовместима с классической механикой.

Этот вывод, это противоречие показывают, что необходимо установить связь между новой (квантовой) теорией и классической механикой. Необходимо определить область применения старой, хорошо проверенной теории с точки зрения новой теории. И это не так трудно сделать. Действительно, с точки зрения математики производные в уравнении Гамильтона есть предел  $\left(\frac{\partial E}{\partial \vec{r}}\right)_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta E}{\Delta x}\right)$ . Такой предел можно приближенно заменить отношением  $\left(\frac{\Delta E}{\Delta x}\right)$ , где  $\Delta x$  и  $\Delta E$  достаточно малы, но изменение энергии



достаточно велико по сравнению с квантом энергии:  $\Delta E \gg h\nu$ . С этой оговоркой, классические уравнения остаются применимы. А областью применения классической теории с точки зрения квантовой являются процессы, в которых характерные изменения энергии велики по сравнению с квантом энергии.

Такая подмена вычисления производной как точного предела на отношение малых, но конечных изменений величин, встречалась и в практических задачах классической механики — из-за конечной точности практических измерений измерение всё меньших приращений становится затруднительным и, с практической точки зрения, при измерении координат или скоростей в задаче приходится останавливаться на точности измерения, приемлемой для данной задачи. Более того, так как в достаточно сложных механических системах аналитические решения обычно невозможны (например, задача трёх тел в небесной механике), то решать уравнения динамики вероятно придётся при помощи численных (компьютерных) методов, где вычисление производных также часто заменяется конечными приращениями.

Однако есть принципиальное отличие. Из-за существующего в уравнениях классической механики детерминизма можно (в рамках классической теории) утверждать, что, задав желаемую точность нахождения решения задачи классической механики, можно определить необходимую точность задания (измерения) начальных координат и импульсов частиц системы и необходимый шаг численных методов решения. Таким образом, в классической механике точность решения задачи может становиться сколь угодно высокой. Квантовая физика накладывает ограничения на применимость классической теории: как мы уже обсудили, для применимости классической теории изменения координат и импульсов при вычислениях или измерениях не должны становиться настолько малы, чтобы соответствующие изменения энергии стали сравнимы с величиной кванта энергии. Это означает, что мы более не можем даже теоретически достигнуть наперёд заданной точности предсказания положения частей системы. То есть, с учётом квантовой теории строгий детерминизм классической механики пропадает.

## **Проблема измерения в квантовой физике. Принцип неопределённости Гейзенберга.**

Недетерминизм квантовой физики проявляется не только в рассмотренных выше ограничениях на точность решения задач классической механики. В тех условиях, когда квантовые эффекты становятся существенными (квант энергии становится сравним с характерным масштабом изменения энергии в задаче), возникает другая проблема, называемая проблемой измерения.

Классическая механика описывается координатами и импульсами (скоростями) частиц системы. Начальные условия задачи классической механики — это набор координат и импульсов (скоростей) частиц в начальный момент времени. В классической механике нет никакой проблемы в том, чтобы измерить (или, что то же самое, задать) и координаты, и импульсы всех частиц одновременно. Однако в квантовой теории оказывается, что такое измерение невозможно в принципе.

Это связано с тем, что в процессе измерения происходит взаимодействие изучаемой частицы с «инструментом», которым производится измерение. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим задачу об измерении координаты или импульса микрочастицы подробнее. Итак, пусть есть частица и мы хотим определить её координаты в пространстве. Если нужно грубое

измерение — мы берём линейку и измеряем координаты частицы. Для более точного измерения мы воспользуемся более точным прибором, например микрометром. Но тут в какой-то момент возникает проблема, связанная с тем, что для того чтобы «рассмотреть» нашу частицу, мы должны её осветить, а тогда точность определения её положения ограничивается дифракционными эффектами: приближённо длиной волны используемого излучения. Мы можем уменьшать длину волны, усиливать интенсивность излучения, чтобы сделать определение положения частицы более точным. Но при этом наше излучение начинает взаимодействовать с частицей, как минимум давить на неё (существование давления света следует из классической электродинамики) — возникает сила, действующая на частицу, возникает смещение частицы под действием этой силы. В результате, к тому моменту когда мы закончили наше измерение частица оказалась в новом положении *из-за взаимодействия с прибором*, который измеряет её положение — так что результат точных измерений потерял практический смысл.

Аналогичная проблема возникнет, если мы попытаемся измерить импульс (скорость) частицы. Определить скорость можно измерив два раза положения частицы — но при повышении точности уже первое измерение исказит состояние частицы, как описано выше, так, что полученный результат не будет иметь никакого отношения к реальной скорости частицы. Можно наоборот, измерить импульс частицы, воспользовавшись законом сохранения импульса — но тогда частица передав весь свой импульс «прибору» остановится.

Таким образом, оказывается принципиально невозможным измерить координаты или импульсы объекта, не внося изменений в его состояние. И чем точнее желаемое измерение, тем больше отличается состояние объекта (частицы, например) после измерения от состояния до измерения.

Это ограничение, впрочем позволяет определить координаты или импульсы частицы со сколь угодно высокой точностью — просто после измерения состояние частицы будет совершенно другим. Но оказывается, что никакими способами нельзя *одновременно* точно измерить координату и проекцию импульса на это направление. Более того, существуют и другие пары величин, которые принципиально нельзя одновременно точно измерить.

Поясним ещё раз эту проблему на примере координаты и импульса. Дело в том, что гипотетические «приборы» для измерения координаты и импульса выдвигают несовместимые требования. Для точного измерения координаты нам необходимо остановить частицу. Например, вынудить реакцию частицы с зерном фотоэмульсии. При этом нам не важно, куда уйдёт импульс частицы — передастся атому серебра в фотоэмульсии, излучится в виде света или упругих волн в кристалле. Для измерения импульса нам, наоборот, важно чтобы импульс частицы полностью передался «прибору», без неконтролируемых потерь, для чего частица должна «завязнуть» в «приборе» подобно пуле в баллистическом маятнике. При этом нам совершенно не важно, где остановится частица внутри «прибора». Таким образом, пытаясь получить точную информацию о координате мы теряем информацию об импульсе, и наоборот. Лучшее что возможно — это некоторый компромисс, когда и координата, и соответствующая проекция импульса известны с некоторой неопределённостью. Это утверждение называется принципом неопределённости Гейзенберга и записывается как  $\Delta x \cdot \Delta p_x \sim \hbar$ , где  $\hbar = h/(2\pi)$  ( $h$  — постоянная Планка).<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Эта запись соотношения неопределённости несколько условна. В ней под неопределённостями координаты  $\Delta x$  и импульса  $\Delta p_x$  подразумеваются не средние отклонения от среднего значения  $\langle \Delta x \rangle = \langle x - x_0 \rangle$ , которые по определению среднего равны нулю, а среднеквадратичные отклонения

## Статистическая трактовка квантовой механики. Волновая функция.

Итак, мы показали, что гипотеза Планка оказалась не так безобидна. Принятие этой гипотезы требует отказа от привычного детерминизма классической физики. Как описывать ситуации, когда результат эволюции системы во времени может оказаться неоднозначен? Какими переменными описывать «механические» системы в квантовой физике, если классические координаты и импульс одновременно принципиально не измеримы?

Ответом является использование вероятностной (статистической) интерпретации. Этот подход развивался в работах Гейзенберга и Шредингера, за которые им были присуждены Нобелевские премии по физике. Опишем вкратце, не вдаваясь в математические детали, как строится этот формализм.

Состояние системы описывается так называемой волновой функцией (или  $\Psi$ -функцией<sup>1</sup>), зависящей только от одновременно измеримых величин, например, в простейшем одномерном случае только от координаты  $\Psi = \Psi(x)$ . В общем случае волновая функция комплексная. Волновая функция по определению задаёт вероятность обнаружения системы (частицы) в данной области координат:  $w = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi(x)|^2 dx$ .

Название «волновая функция» связано с тем, что для частицы, свободно движущейся в пространстве, зависимость  $\Psi$ -функции от координаты оказывается гармонической функцией, а изменение волновой функции описывается формально тем же уравнением, что и распространение волн. Фактически, это отражает тот факт, что гипотеза де Бройля о волновых свойствах частиц уже включена в формализм волновой функции.

Тогда задача классической механики о траектории движения частицы превращается в задачу об эволюции волновой функции во времени — о том как меняется вероятность обнаружения частицы в различных областях пространства. Уравнение эволюции волновой функции называется в нерелятивистском случае уравнением Шредингера, в релятивистском — уравнением Дирака.

Из-за связи волновой функции с вероятностью обнаружения частицы, особую ценность приобретают такие состояния частицы, в которых это распределение вероятности остаётся неизменным, стационарным. Такие состояния называют стационарными. Например ими являются электронные состояния в атоме: при «движении» электрона по орбите мы не можем сказать, где электрон находится в данный момент, однако вероятность с которой электрон может быть обнаружен в некоторой области пространства одна и та же в любой момент времени. Существенным свойством квантовой физики является то, что система может находиться и в нестационарном состоянии, являющемся своеобразной «смесью» различных состояний. В случае электрона в атоме, например, это может означать что электрон, находящийся в таком «смешанном» состоянии, будет обнаруживаться при измерении его положения некоторым прибором то на одной, то на другой орбите.

Зная распределение вероятности можно найти среднее значение любой физической

---

$\sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle}$  и  $\sqrt{\langle (\Delta p_x)^2 \rangle}$ , которые всегда положительны. Более того, существуют более строгие

формы записи этого соотношения, такие как неравенство Вейля  $\sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle} \sqrt{\langle (\Delta p_x)^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2}$ . Однако для

качественного понимания наиболее наглядна именно запись в тексте: произведение характерных неопределённостей измерения координаты и импульса порядка постоянной Планка «с чертой».

1 Читается: «пси-функция».

величины:  $\bar{A} = \sum A_n w_n = \int \psi^+(x) \hat{A} \psi(x) dx$ . Если распределение вероятности не зависит от времени то и среднее значение оказывается постоянным — то есть сохраняющейся в условиях задачи величиной. В классической механике законы сохранения энергии, импульса, момента импульса играют важную роль. В квантовой механике они также важны — в частности, оказывается, что стационарное состояние можно однозначно задать (то есть задать его волновую функцию во всем пространстве), определив достаточное количество таких сохраняющихся величин. По этой причине, например, состояние электрона в атоме водорода описывается несколькими так называемыми «квантовыми числами», знание которых позволяет тут же полностью и однозначно восстановить всю информацию о волновой функции электрона.

### Задача о гармоническом осцилляторе.

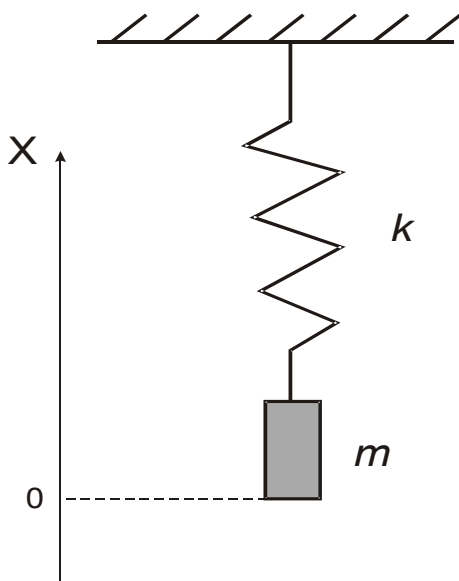


Рисунок 9: Пружинный маятник: простейший пример гармонического осциллятора.

На этом мы прекратим общие рассуждения и приступим к применению квантовой теории в практических задачах. Основная цель решения этих задач будет заключаться в том, чтобы указать, как квантовая теория разрешила сформулированные нами ранее противоречия в классической картине мира, а также в том, чтобы рассмотреть интересные физические явления.

Первая задача, которую мы рассмотрим, не входит в школьную программу, но её решение необходимо для того, чтобы разрешить далее некоторые из проблем классической теории. Это задача об гармоническом осцилляторе.

Гармоническим осциллятором, в принципе, является любая система с квадратичным минимумом в потенциальной энергии. Для определённости рассмотрим груз массы  $m$ , колеблющийся на пружинке жёсткости  $k$  в отсутствие силы тяжести (рисунок 9). Нас интересует, каковы могут быть

значения энергии, запасённой колебательной системой. Напомним ещё раз, что в классической механике эта энергия может быть произвольна, в то время как в квантовой механике значения энергии в некоторых системах оказываются дискретными. Строгое решение этой задачи требует использование математического формализма квантовой механики, что не входит в наши цели. К счастью, ответ в данном случае можно в основном угадать, пользуясь простыми дополнительными предположениями.

Частота колебаний классического осциллятора находится из закона сохранения энергии:

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = 0$$

$$m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + kx \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Последнее уравнение — это уравнение свободных колебаний, решения которого имеют вид  $x = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ , где частота колебаний  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . В сделанных нами предположениях затухания колебаний и потерь энергии нет, такие колебания могут продолжаться вечно.

Поместим теперь на груз небольшой заряд  $q$ . Этот заряд движется ускоренно, поэтому по законам классической электродинамики он должен излучать электромагнитные волны. Причём, как легко заметить, эти волны будут иметь частоту, равную частоте колебаний. Применим теперь к этому излучению гипотезу Планка: излучение энергии происходит порциями-квантами, величина кванта  $\Delta E = \hbar \omega_0$ . Это означает, что энергия, запасённая в осцилляторе будет уменьшаться не непрерывно, а «ступеньками» величины  $\Delta E$ . В конце концов вся энергия которую можно излучить будет излучена. Рассмотрев все сделанные «ступеньки» мы приходим к выводу, что энергия, запасённая в осцилляторе, принимает дискретные значения  $E_n = n \hbar \omega_0 + E_0$ , где  $E_0 < \hbar \omega_0$  - это некоторая остаточная энергия, которую также называют энергией нулевых колебаний. В полученном ответе для запасённой энергии нигде не фигурирует величина заряда  $q$ , а значит ответ остаётся в силе и для электронейтрального осциллятора.

Таким образом, энергия, запасённая в колебаниях маятника, может быть равна только некоторым дискретным значениям. Это напоминает дискретные уровни энергии электронов в атоме. Отметим здесь без доказательства, что дискретность уровней энергии является в квантовой механике общим свойством для всех финитных (происходящих в ограниченной области пространства) движений.

Оценим, сколько квантов энергии запасено в привычном нам «бытовом» пружинном маятнике. Возьмём пружину от динамометра жёсткостью примерно  $1 \text{ Н/см} = 100 \text{ Н/м}$ , подвесим к ней груз массой  $10 \text{ г} = 0.01 \text{ кг}$ . Угловая частота колебаний такого пружинного маятника  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 100 \text{ с}^{-1}$ . Рассмотрим минимально заметную амплитуду колебаний маятника в  $1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м}$ . Количество квантов энергии, запасённых в колебаниях

$$N = \frac{kX_{max}^2}{2 \hbar \omega_0} = \frac{100 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 10^{-34} \cdot 100} = 5 \cdot 10^{21}$$

Получено огромное число, сравнимое с числом молекул в одном моле. Эта оценка ещё раз показывает, почему квантовые эффекты так редко наблюдаются в повседневной жизни. Во многих случаях заметить изменение энергии на один квант также сложно, как заметить удар о стенку сосуда отдельной молекулы газа.

Величина  $E_0$  (очевидно,  $E_0 < \hbar \omega_0$ ) называется энергией нулевых колебаний, она не

равна нулю, так как по принципу неопределённости Гейзенберга состояние «классического» покоя с точно определёнными и равными нулю *и координатой, и скоростью* маятника невозможно. В то же время состояние с энергией  $E_0$  является состоянием с наименьшей возможной энергией — *основным* состоянием гармонического осциллятора. Энергия не может уменьшиться, так как излучение происходит только квантами величины  $\hbar\omega_0$ . Эта энергия соответствует принципиально квантовому явлению: как и движение электронов в атоме, нулевые колебания гармонического осциллятора сохраняются и при температуре абсолютного нуля.

Оценим величину  $E_0$  с помощью соотношения неопределённостей. Как мы уже сказали, в состоянии с наименьшей энергией сохраняется своеобразная квантовая форма движения — нулевые колебания осциллятора. Пусть  $x_0$  и  $p_0$  - амплитудные значения колебаний координаты и импульса. Эти же величины, очевидно, характеризуют «неопределённость» положения осциллятора (груза пружинного маятника в нашем примере), тогда по соотношению неопределённостей Гейзенберга:

$$x_0 p_0 \sim \hbar$$

С другой стороны, при колебаниях энергия осциллятора равна максимальной кинетической и максимальной потенциальной энергии маятника:

$$E_0 = \frac{kx_0^2}{2} = \frac{p_0^2}{2m}$$

Отсюда

$$x_0 = \sqrt{\frac{1}{km}} p_0 = \frac{1}{m\omega_0} p_0$$

$$\frac{1}{m\omega_0} p_0^2 \sim \hbar; m\omega_0 x_0^2 \sim \hbar$$

$$p_0^2 \sim m\hbar\omega_0; x_0^2 \sim \frac{\hbar}{m\omega_0} = \frac{\hbar}{\sqrt{km}}$$

$$E_0 \sim \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

Точное решение задачи об уровнях энергии гармонического осциллятора дает ответ

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_0, \text{ то есть } E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega_0.$$

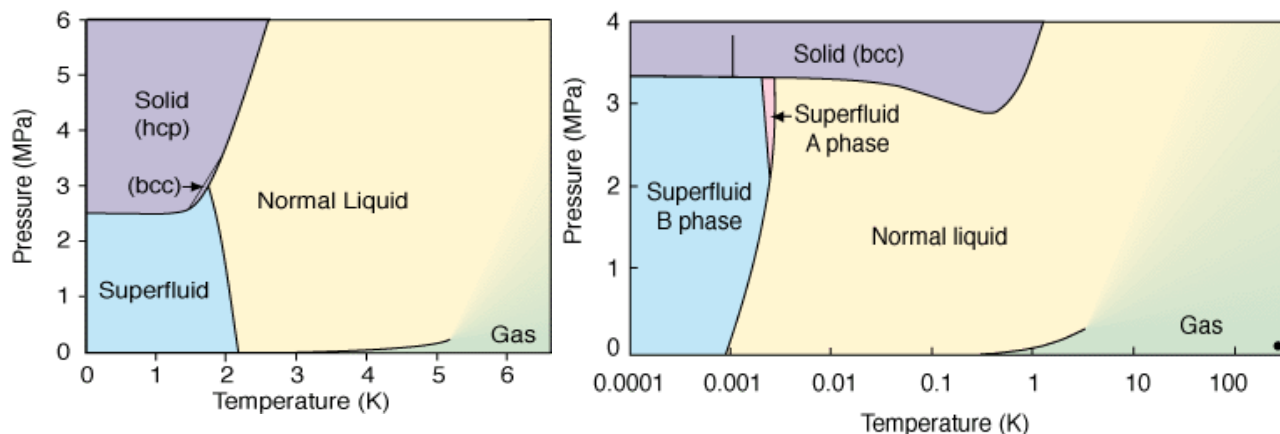


Рисунок 10 Фазовые диаграммы изотопов гелия: гелий-4 (слева) и гелий-3 (справа). С сайта <http://lfl.tkk.fi/~ethuneb/theory/helium.html>

Рассмотрим подробнее вопрос об амплитуде нулевых колебаний. Мы получили только что

результат:  $x_0 = \sqrt[4]{\frac{\hbar^2}{km}}$ . Это означает, что чем меньше жёсткость пружины и масса груза, тем

больше амплитуда колебаний. Одним из примеров «пружинного маятника» с малой массой является атом в кристаллической решётке — положение атома определяется квадратичным минимумом потенциальной энергии его взаимодействия с соседями. При малых отклонениях от положения равновесия описание колебаний маятника формально эквивалентно описанию пружинного маятника. Атомы гелия являются очень лёгкими (легче только водород), а взаимодействие атомов гелия друг с другом слабо (очень симметричная электронная конфигурация приводит к практически полной компенсации всех электрических сил). Таким образом в кристалле твёрдого гелия оказываются малы и «масса груза», и «жёсткость пружины». Из-за этого в кристалле гелия амплитуда нулевых колебаний оказывается сравнима с межатомным расстоянием. Поэтому твёрдая фаза гелия является очень своеобразным состоянием вещества — квантовым кристаллом. Из-за таких сильных флуктуаций на «мгновенной фотографии» кристалла, если бы её можно было сделать, оказалось бы, что около 10% узлов кристаллической решётки свободны, в них нет атома гелия. По этой же причине твёрдую фазу гелия не так просто получить, фазовая диаграмма гелия не имеет тройной точки (фазовая диаграмма для изотопов гелия показана на рисунке 10): гелий может оставаться жидким вплоть до нулевой температуры, а чтобы получить твёрдое состояние гелия необходимо не только охладить гелий до низких температур, но и приложить давление примерно 25-30 атмосфер.

### Вычисление энергии, запасённой в гармоническом осцилляторе.

Нам понадобится для дальнейших применений знать, какая средняя энергия запасена в осцилляторе, находящемся в тепловом равновесии со термостатом при температуре  $T$ . Например, если наш пружинный маятник находится в контакте с газом при температуре  $T$ . Строго говоря, мы при этом предполагаем наличие некоторого взаимодействия осциллятора с термостатом — но мы будем считать это взаимодействие достаточно слабым, чтобы считать, что возможные значения энергии описываются также, как в идеальном осцилляторе:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0 .$$

Для того, чтобы найти среднюю энергию осциллятора необходимо воспользоваться

сведениями из термодинамики — необходимо усреднить энергии различных состояний осциллятора, используя распределение Больцмана для нахождения вероятности обнаружить осциллятор в  $n$ -ом состоянии:  $w_n = A \cdot \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)$ . Нормировочная константа  $A$  определяется из условия  $\sum w_n = 1$ .

Для простоты расчета выберем энергию основного состояния в качестве точки отсчёта энергии:  $E'_n = E_n - E_0 = \hbar \omega_0 n$ . Точка отсчёта энергии всегда (в нерелятивистских теориях) является произвольной, важна только разность энергий (для вычисления работы, например). При этом, конечно, необходимо всегда в ходе решения конкретной задачи придерживаться одного выбора.

Определим нормировочный множитель:

$$A \sum \exp\left(-\frac{\hbar \omega_0 n}{kT}\right) = 1$$

Пользуясь формулой для суммы бесконечной геометрической прогрессии, получаем:

$$A \cdot \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\hbar \omega_0}{kT}\right)} = 1$$

$$A = 1 - \exp\left(-\frac{\hbar \omega_0}{kT}\right)$$

Перейдём теперь к вычислению средней энергии:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \bar{E} &= A \sum \hbar \omega_0 n \exp\left(-\frac{\hbar \omega_0 n}{kT}\right) = -A \frac{d}{d\left(\frac{1}{kT}\right)} \sum \exp\left(-\frac{\hbar \omega_0 n}{kT}\right) = \\ &= -A \frac{d}{d\left(\frac{1}{kT}\right)} \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\hbar \omega_0}{kT}\right)} = A \hbar \omega_0 \frac{\exp\left(-\frac{\hbar \omega_0}{kT}\right)}{\left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar \omega_0}{kT}\right)\right)^2} = \frac{\hbar \omega_0}{\exp\left(\frac{\hbar \omega_0}{kT}\right) - 1} \end{aligned}$$

Вычисленная энергия по своему смыслу есть энергия связанная с тепловым движением.

Вычислим тогда теплоемкость  $C = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T}$  :

<sup>1</sup> В этих вычислениях мы пользуемся тем, что производная суммы равна сумме производных, и замечаем, что исходное выражение является производной от суммы геометрической прогрессии по некоторой переменной. Для математической строгости, отметим, что внос и вынос дифференцирования под знак суммы для бесконечного ряда вообще говоря возможен не всегда, но в данном случае все требования сходимости суммы выполнены и эта операция корректна.



$$C = \frac{(\hbar \omega_0)^2}{kT^2} \cdot \frac{\exp\left(\frac{\hbar \omega_0}{kT}\right)}{\left(\exp\left(\frac{\hbar \omega_0}{kT}\right) - 1\right)^2}.$$

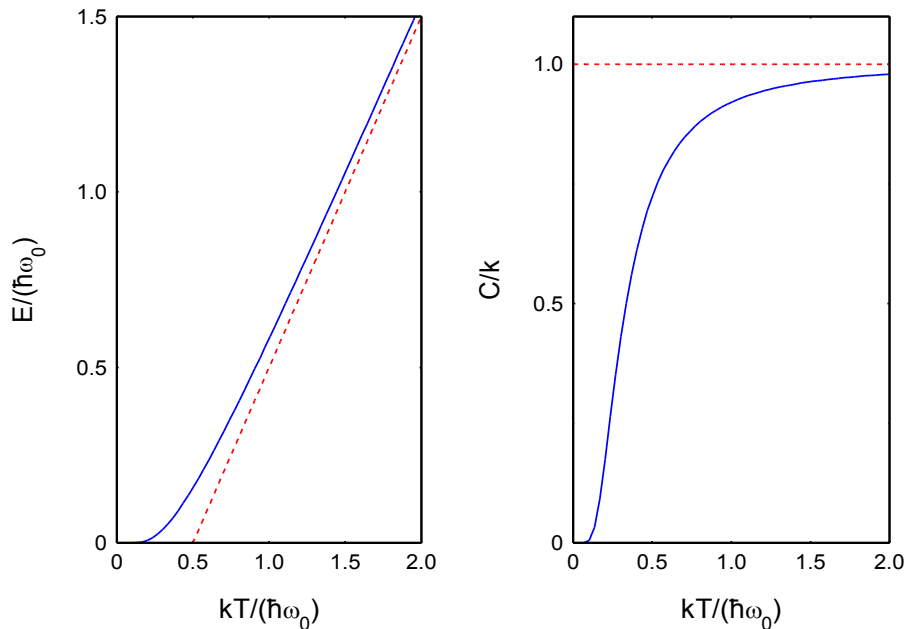


Рисунок 11: Средняя энергия и теплоёмкость гармонического осциллятора как функция температуры.

Зависимости средней энергии и теплоёмкости от температуры показаны на рисунке 11. Видно, что при высокой температуре ( $\hbar \omega_0 \ll kT$ ) энергия линейно зависит от температуры, а теплоёмкость стремится к своему классическому значению: постоянной Больцмана  $k$  для колебательной степени свободы. При низкой температуре зависимость энергии осциллятора от температуры становится нелинейной, а теплоёмкость обращается в ноль.

### Теплоёмкость твёрдых тел. Модель теплоёмкости Эйнштейна. Теорема Нернста.

Применим теперь полученный результат к некоторым из сформулированных проблем. Первое применение очевидно — примером колебательной системы являются колебания атомов в кристалле вблизи положения равновесия. Три пространственные координаты соответствуют трём степеням свободы, если «жесткости» этих колебательных систем равны (равны характерные частоты колебаний во всех трёх направлениях), то для нахождения теплоёмкости такого твёрдого тела надо просто умножить на  $3N_A$  полученный нами результат для одного осциллятора:

$$C = 3R \frac{(\hbar \omega_0)^2}{(kT)^2} \cdot \frac{\exp\left(\frac{\hbar \omega_0}{kT}\right)}{\left(\exp\left(\frac{\hbar \omega_0}{kT}\right) - 1\right)^2}$$

При высоких температурах получаем закон Дюлонга и Пти ( $C=3R$ ), при низких температурах — теплоёмкость экспоненциально стремится к нулю. Этот подход к описанию теплоёмкости твёрдого тела был впервые предложен А.Эйнштейном в 1907 году, поэтому эту модель описания теплоёмкости твёрдых тел называют моделью Эйнштейна.

Точные измерения показывают, что теплоёмкость твёрдых тел обращается в ноль не экспоненциально, а по степенному закону  $C \propto T^3$ , чуть ниже мы получим объяснение этого факта. К счастью для развития квантовой теории, эти точные измерения появились позднее работы Эйнштейна — так что работа Эйнштейна «Планковская теория излучения и теория теплоёмкости» [10] послужила подтверждением развивающейся квантовой теории.<sup>1</sup> Рисунок из этой работы, на котором сравниваются данные по теплоёмкости алмаза с предсказанием теории приведён на рисунке 12.

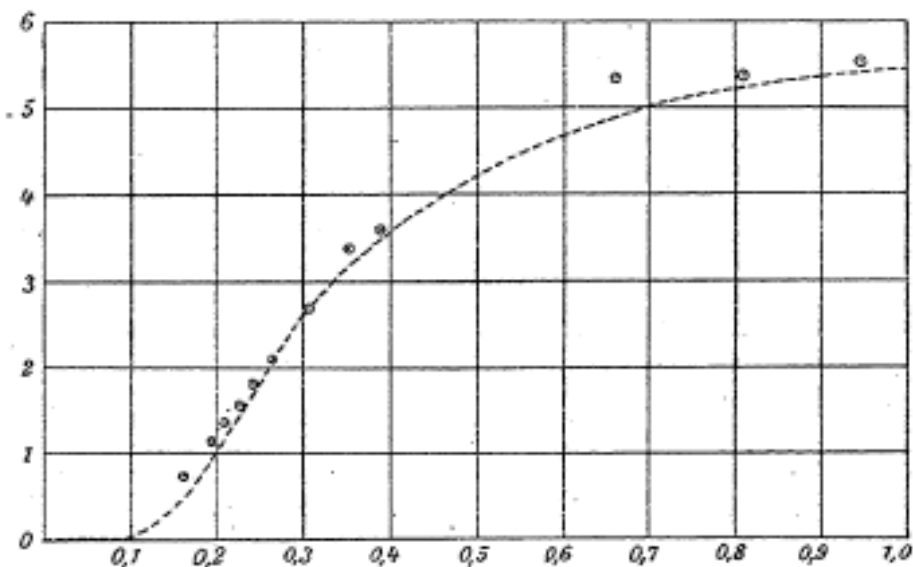


Рисунок 12: Сравнение экспериментальных данных по теплоёмкости алмаза (символы) с предсказанием модели Эйнштейна (кривая). Из работы [10].

Отметим, что обращение теплоёмкости в ноль соответствует тому, что при достаточно низкой температуре сколь угодно малый теплоподвод приведёт к заметному нагреву тела — что равносильно практической недостижимости абсолютного нуля и составляет содержание третьего начала термодинамики или теоремы Нернста (Нернст, 1912; Нобелевская премия по химии 1920 года).

### Теплоёмкость многоатомных газов.

Напомним, в чем заключается проблема с теплоёмкостью многоатомных газов: эксперимент показывает, что при достаточно низкой температуре все газы ведут себя как одноатомные (

$$C_V = \frac{3}{2} R),$$

а при высоких температурах теплоёмкость газов оказывается больше, чем величина, предсказываемая теоремой о равномерном распределении.

<sup>1</sup> Было бы однако некорректно говорить, что модель Эйнштейна не правильная. Она описывает вклад в теплоёмкость от степеней свободы имеющих фиксированную частоту. Такие степени свободы (так называемые «оптические колебания» решётки) также присутствуют в реальных кристаллах, но подробное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки этого простого курса.

Сначала рассмотрим случай высоких температур. Причиной повышения теплоёмкости является в этом случае активизация колебательных степеней свободы внутри молекулы. Это происходит, как мы видели, если температура сравнивается с характерной энергией колебаний. В случае внутримолекулярной связи эта энергия естественным образом связана с энергией связи. Таким образом, при активизации колебательной степени свободы мы неизбежно окажемся вблизи «разрыва» этой связи. По этой причине колебательные степени свободы обычно не учитываются в классической термодинамике при расчёте теплоёмкости газов: при тех температурах, когда этот учёт был бы необходим начинается активная диссоциация молекул. Однако на практике существует небольшое «окно» температур, когда колебательные степени свободы уже дают заметный вклад в теплоёмкость, а диссоциация молекул ещё несущественна. Для простых молекул (типа  $H_2$ ,  $O_2$  и похожих) эти температуры начинаются в районе 1000К, для сложных органических молекул уже при комнатной температуре вклад колебаний может быть большим, поэтому к сложным молекулам теорему о равнораспределении всегда следует применять с осторожностью и по возможности использовать табличные данные для теплоёмкости.

Что происходит при низких температурах? То, что теплоёмкость многоатомного газа оказывается равной теплоёмкости одноатомного газа означает, что пропадает вклад всех вращательных степеней свободы. Отметим сразу, что, в отличие от поступательного движения в неограниченном пространстве, вращательное движение финитно — оно происходит в ограниченной области пространства. Значит, в соответствии с уже упоминавшимся общим правилом, уровни энергии при вращательном движении должны квантоваться. То есть, как и в атоме водорода или гармоническом осцилляторе, энергия стационарных состояний вращательного движения принимает вполне определённые значения. Каково правило квантования и каков квант энергии в этом случае?

Точное вычисление в данном случае выходит за рамки нашего курса, но ответ можно частично угадать из соображений размерности. Характерная энергия (квант энергии) должна зависеть от постоянной Планка (все формулы для квантовых эффектов включают в себя постоянную Планка), ее размерность [Дж·с], и от момента инерции вращающегося тела (который является характерной величиной для динамики вращения), размерность момента инерции [кг·м<sup>2</sup>]. Пусть  $n$  и  $m$  — степени в которых в ответ входит постоянная Планка и момент инерции, соответственно. Тогда:

$$[\text{Дж}] = [\text{Дж} \cdot \text{с}]^n [\text{кг} \cdot \text{м}^2]^m$$

$$\left[ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \right] = \left[ \frac{\text{кг}^{\frac{m+n}{2}} \cdot \text{м}^{2m+2n}}{\text{с}^n} \right]$$

Откуда  $n=2$ ,  $m=-1$  и для характерной энергии получаем:

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{I} .$$

Точный ответ для уровней энергии вращающегося тела:  $E_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$ , где  $l$  — вращательное квантовое число.

Можно аналогично тому как мы вычислили среднюю энергию, запасённую в осцилляторе вычислить какая средняя энергия запасена во вращательной степени свободы при температуре термостата  $T$ .<sup>1</sup> Однако физический смысл этого вычисления понятен сразу

<sup>1</sup> Это сведётся к двукратному повторению преобразования с дифференцированием суммы.

— результат неизбежно будет аналогичен тому, что мы получили для осциллятора. При высоких температурах  $kT \gg E_0$  вклад вращательной степени свободы в теплоёмкость будет соответствовать результату теоремы о равнораспределении ( $\frac{1}{2}R$ ), а при низких температурах  $kT \ll E_0$  вклад в теплоёмкость будет экспоненциально вымерзнуть.

Интересно оценить характерную температуру, начиная с которой вращение молекулы водорода «активизируется». Момент инерции молекулы водорода при вращении вокруг оси, перпендикулярной связи, есть  $I \sim ma^2$ , где  $a$  — размер молекулы,  $m$  — масса протона. Принимая для оценки  $a \sim 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ ,  $m = 1.7 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ , получаем

$$T = \frac{E_0}{k} \sim \frac{\hbar^2}{kma^2} = \frac{10^{-68}}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 1.7 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{-20}} \sim 50 \text{ К}$$

что прекрасно соответствует описанным ранее экспериментальным результатам. Отметим тут же, что для вращения вдоль оси двухатомной молекулы в качестве характерного размера надо брать для тяжёлых «больших» ядер атомов размер ядра (так как основная масса сосредоточена в ядре), а для атома водорода, возможно, массу электрона (протон практически точечная частица и вся инерция к такому вращению создаётся лёгким электроном) — в любом случае это приводит к тому, что в знаменателе дроби в выражении для характерной температуры появятся существенно меньшие величины (масса электрона примерно в 1800 раз меньше массы протона, размер ядра приблизительно в 100000 раз меньше размера атома) — то есть характерная температура «активизации» такого вращения окажется существенно больше чем температура диссоциации молекул. Так что, действительно, при применении теоремы о равнораспределении вращению молекулы вокруг оси учитывать не надо.

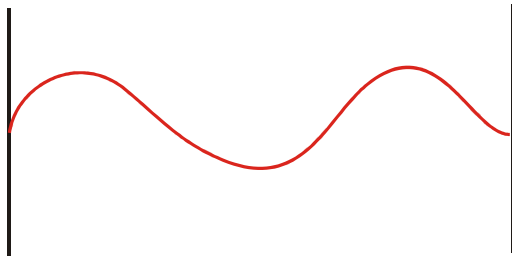
Таким образом при помощи представлений квантовой физики мы объяснили последовательно все изменения в поведении теплоёмкости многоатомных газов с температурой. Более того, мы получили простые объяснения того, почему определённые степени свободы «активны» при вычислении теплоёмкости, а другие не «активны».

Во избежание возникновения ложного противоречия, необходимо сделать одно замечание. Выше мы сказали, что по теореме Нернста теплоёмкость любой системы должна обращаться в ноль при приближении к абсолютному нулю. Но в рамках изложенного в этом параграфе мы получили, что при низкой температуре теплоёмкость любого идеального газа равна теплоёмкости одноатомного газа ( $C_V = \frac{3}{2}R$ ). Есть ли здесь противоречие? Нет, противоречия нет. Во первых, при понижении температуры становятся важны слабые взаимодействия молекул газа, которыми мы пренебрегали, считая газ идеальным. Из-за этого взаимодействия большинство газов конденсируется или даже переходит в твёрдое состояние при понижении температуры. При этом давление газа (и, соответственно, плотность и концентрация молекул) над поверхностью жидкой или твёрдой фазы быстро уменьшается с понижением температуры. Поэтому и полная теплоёмкость имеющегося в системе газа также будет уменьшаться. Более того, даже для индивидуальной молекулы при достаточно низкой температуре теплоёмкость обратится в ноль. Это связано с тем, что поступательное движение остаётся классическим (не квантованным) только пока оно неограниченно в пространстве. Так как реальные системы (о которых, собственно, и идёт речь в теореме Нернста) ограничены какими-то стенками, это ограничение в движении частицы проявится в том, что и поступательное движение окажется квантованным. Соответственно, и теплоёмкость экспоненциально обратится в ноль. Формально, это «вымерзание»

поступательных степеней свободы проявится, когда дебройлевская длина волны окажется сравнима с расстоянием между стенками. (Длина волны де Бройля обратно пропорциональна скорости, поэтому при понижении температуры она будет увеличиваться.)

## Теплоёмкость твёрдых тел при низкой температуре. Модель теплоёмкости Дебая.

Как мы уже упомянули, модель теплоёмкости Эйнштейна не совсем правильная. В чем она не соответствует реальному твёрдому телу? Эйнштейн считал все ионы в узлах кристаллической решётки идеальными осцилляторами, колеблющимися на одной частоте. В то же время, как мы прекрасно знаем, в твёрдом теле могут существовать упругие колебания практически любой частоты — это звуковые волны. То есть необходимо вместо  $3N$  эйнштейновских осцилляторов, колеблющихся на одной частоте, рассмотреть неизвестное количество колебаний на всевозможных частотах. Каждое такое колебание (чистую по тону звуковую волну в кристалле) можно рассматривать как осциллятор — при этом колеблется весь кристалл на частоте этой звуковой волны. Вклад в теплоёмкость от каждого осциллятора мы знаем. Необходимо «всего лишь» посчитать количество таких осцилляторов на каждой



частоте. Точнее, нам необходимо посчитать, сколько различных мод звуковых колебаний находится в малом интервале частот  $d\nu$  вблизи частоты  $\nu$ .

Задача на самом деле не такая безнадежная. Рассмотрим для простоты тело большого, но конечного объема. В нём стационарно могут существовать только резонансные моды колебаний, для которых внутри рассматриваемого тела может возникнуть стоячая волна. Каково условие существования стоячих волн?

Это условие не зависит от того, о каких волнах идёт речь: механических, акустических, электромагнитных. В любом случае условие существования стоячей волны сводится к тому, что на границе области существования волны должен быть узел (или пучность, в зависимости от граничных условий) колебаний. То есть, на соответствующем размере должно укладываться целое число полуволен (рисунок 13).

В одномерном случае это приводит к простому условию:  $N \frac{\lambda}{2} = L$  или  $N = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2L\nu}{s}$ , где

$s$  — скорость звука. Откуда находим искомое количество осцилляторов в интервале  $d\nu$ :

$$dN = \frac{2L}{s} d\nu.$$

Рисунок 13: Стоячие волны в одномерной (сверху) и двумерной (снизу) задачах.

В двух- и трехмерном случае ситуация осложняется тем, что условие попадания узла колебаний на границу должно выполняться по всему периметру (площади) границы области

колебаний. Для простоты будем рассматривать «прямоугольную» геометрию. Пример стоячей волны в двумерном случае приведён на рисунке 13. Условие стоячей волны при этом:

$$N \frac{\lambda_x}{2} = L_x$$

$$M \frac{\lambda_y}{2} = L_y$$

Строгое решение волнового уравнения дает связь между  $\lambda_{x,y}$  и длиной волны в неограниченной среде  $\lambda = \frac{s}{\nu}$  :  $\left(\frac{1}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_y}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{\nu}{s}\right)^2$  . В качестве подтверждения такой связи можно отметить, что устремляя одно из измерений прямоугольной области существования колебаний в бесконечность мы получим естественный результат, совпадающий с рассмотренным одномерным случаем. Положим для простоты  $L_x = L_y = L$  .

Тогда условие на длины волн превращается в условие на числа  $N$  и  $M$  :  $N^2 + M^2 = 4L^2 \left(\frac{\nu}{s}\right)^2$  .

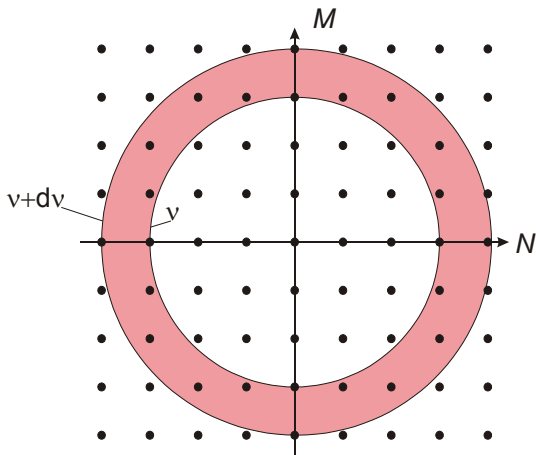


Рисунок 14: К подсчёту числа мод колебаний в двумерном случае.

Для подсчёта количества колебаний, попадающих в интервал  $d\nu$  воспользуемся графическими соображениями. Каждая мода колебаний характеризуется двумя целыми числами  $M$  и  $N$  , которые можно изобразить точкой на плоскости. Получится сетка точек с одинаковым шагом. Условие, связывающее эти числа с частотой колебаний есть уравнение окружности на плоскости. Тогда задача о нахождении количества мод с частотой вблизи заданной колебаний переформулируется как задача о нахождении количества точек сетки, попадающих в кольцо между окружностями радиуса  $\frac{2L}{s}\nu$  и  $\frac{2L}{s}(\nu + d\nu)$  . Если размер

$L$  большой (а мы можем выбрать его сколь угодно большим, этот размер введён для нашего удобства), то ответ можно найти из площади кольца, пользуясь тем, что на одну точку приходится единичная площадь:

$$dN = dS = 2\pi R dR = 2\pi \left(\frac{2L}{s}\right)^2 \nu d\nu .$$

В трёхмерном случае (который нам наиболее интересен) все рассуждения оказываются аналогичными двумерному, только при подсчёте количества колебаний необходимо рассматривать трёхмерную картину и вычислять объём шарового слоя:

$$dN = 4\pi R^2 dR = 4\pi \left(\frac{2L}{s}\right)^3 \nu^2 d\nu .$$

Как мы знаем, в каждом осцилляторе запасена энергия  $\bar{E} = \hbar\omega \left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right)$  , количество осцилляторов в интервале частот  $d\omega$  есть

$$dN = A \frac{V}{c^3} \omega^2 d\omega$$

здесь безразмерная постоянная  $A$  включает в себя все геометрические множители (включая нужное количество множителей  $2\pi$ , возникающих при переходе к угловой частоте), а также количество различных поляризаций колебаний. Её конкретное значение нам сейчас не важно. Для того, чтобы вычислить полную энергию всех колебаний необходимо просуммировать среднюю энергию по всем осцилляторам, то есть проинтегрировать полученные выражения:

$$E = \int \bar{E} dN = A \frac{V}{c^3} \int_0^\infty \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1} = A \frac{V}{c^3} \frac{(kT)^4}{\hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

Мы распространили пределы интегрирования до бесконечности пользуясь тем, что при низких температурах и больших частотах экспоненциальное слагаемое в знаменателе доминирует и делает подынтегральное выражение малым. Поэтому наш результат применим только при низкой температуре. Точный расчёт показывает, что в реальных телах это приближение оправдано при температуре меньшей 10-30К.

Нам важна сейчас только зависимость от температуры:  $E \propto T^4$ . Соответственно, теплоемкость:

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} \propto T^3$$

Этот закон был открыт П.Дебаем в 1912 году. Интересно отметить, что Петеру Дебаю была присуждена Нобелевская премия по химии 1936 года «за его вклад в наше знание о молекулярной структуре, выраженный в его работах по дипольному моменту и по дифракции рентгеновского излучения и электронов в газе» — то есть за совсем другие работы. Однако в физике твёрдого тела его именем называется закон изменения теплоёмкости, и характерная температура в этом законе (температура Дебая), при которой происходит переход от классического закона Дюлонга и Пти  $C = const$  к квантовому закону  $C \propto T^3$ .

## Излучение чёрного тела.

Одна из проблем классической физики, как мы уже разбирали на первой лекции, связана с излучением абсолютно чёрного тела. Абсолютно чёрным телом называется объект, который поглощает все падающее на него электромагнитное излучение (на всех частотах). По закону сохранения энергии этот объект должен также и излучать энергию в форме электромагнитного излучения — иначе поглощение падающего излучения приведёт к бесконечному росту температуры. Источником излучаемых электромагнитных волн, например, могут являться тепловые колебания атомов и ионов в материале из которого «сделано» это чёрное тело. Так как эти колебания случайны, то в спектре этого теплового излучения могут присутствовать всевозможные частоты, никак не связанные с частотой падающего излучения. Таким образом возникает задача о нахождении зависимости спектральной плотности этого *равновесного* теплового излучения (зависимости интенсивности излучения от частоты).

Классическое решение этой задачи (закон Рэлея и Джинкса:  $\frac{dP}{d\nu} = \frac{2\nu^2 kT}{c^2}$ ) приводит к так

называемой «ультрафиолетовой катастрофе» — спектральная плотность излучения бесконечно растет с увеличением частоты, так что излучаемая по всему спектру мощность

$$P_{\text{полн}} = \int_0^{\infty} \frac{dP}{d\nu} d\nu \text{ обращается в бесконечность.}$$

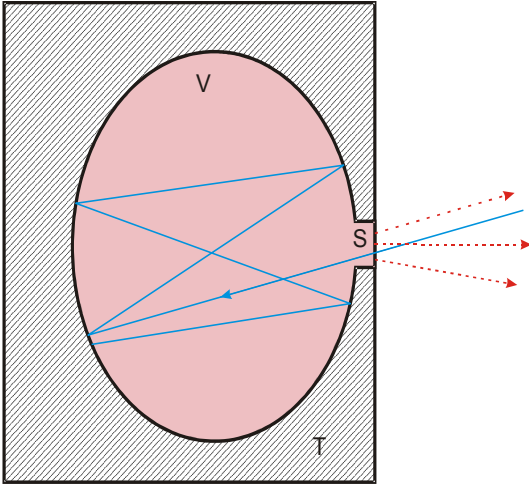


Рисунок 15: Модель абсолютно чёрного тела.

Для анализа этой задачи удобнее рассмотреть немного другую модель абсолютно чёрного тела (рисунок 15). Рассмотрим полость объёма  $V$  внутри массивного твёрдого тела, имеющего температуру  $T$ . Пусть эта полость сообщается с окружающим пространством отверстием площади  $S$ , причём площадь этого отверстия мала по сравнению с площадью стенок полости, а все размеры (в том числе и размеры отверстия) достаточно велики по сравнению с характерными длинами волн, так что эффекты дифракции не существенны. Стенки полости будем считать почти идеально зеркальными. С точки зрения внешнего наблюдателя эта зеркальная полость будет вести себя как абсолютно чёрное тело: луч света идущий извне попадает внутрь полости и

после множества отражений поглощается, вероятность того, что он «найдёт» отверстие и уйдёт из полости мала в силу малости площади отверстия. Такой эффект можно часто наблюдать солнечным летним днем, когда на освещённой стене окна домов, за которыми как мы знаем находятся светлые комнаты, кажутся чёрными.

Атомы и ионы материала стенок полости совершают тепловые колебания и излучают электромагнитные волны. Поэтому внутри полости существует электромагнитное излучение. Небольшая часть этого излучения выходит через отверстие в окружающее пространство, сохраняя то же распределение мощности по частоте, что и тепловое излучение внутри полости. Поэтому задача о спектре излучения из отверстия (спектре излучения чёрного тела) эквивалентна задаче о нахождении спектра излучения внутри полости.

Выделим какую-то частоту излучения в полости и рассмотрим колебания электромагнитного поля на этой частоте подробнее. Это излучение пребывает в состоянии динамического равновесия: излучение «новых» волн из-за теплового движения в стенках полости в точности равно поглощению «старых» волн стенками. По гипотезе Планка излучение и поглощение электромагнитных волн происходит квантами. Таким образом, в рассматриваемой нами моде колебаний электромагнитного поля может быть запасено только целое число квантов:

$$E_n(\omega) = n \hbar \omega .$$

Как теперь определить сколько именно квантов энергии запасено в данной моде? Так как излучение пребывает в состоянии динамического (то есть теплового!) равновесия со стенками при температуре  $T$ , то ответ на этот вопрос известен из термодинамики: при тепловом равновесии температуры тел равны, а вероятность обнаружить систему с температурой  $T$  в состоянии с энергией  $E_n$  описывается распределением Больцмана. Таким образом, для нахождения средней запасённой энергии необходимо усреднить энергии различных состояний с помощью распределения Больцмана. Математически это эквивалентно решённой нами задаче о гармоническом осцилляторе, поэтому мы можем сразу



написать ответ: 
$$\bar{E} = \frac{\hbar \omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}$$

Как и в случае звуковых волн в твёрдом теле, рассмотренном нами при анализе теплоёмкости твёрдого тела, необходимо теперь посчитать, сколько различных мод с частотой, близкой к  $\omega$  существует в полости. Это также сводится к задаче о подсчёте количества стоячих волн, поэтому мы можем просто переписать уже полученный ответ:

$$dN = A' \frac{V}{c^3} \omega^2 d\omega$$

Константа  $A'$  опять содержит всевозможные геометрические множители и учитывает количество возможных поляризаций. Отметим на всякий случай, что для звуковых волн возможно три поляризации (две поперечные и одна продольная), а для электромагнитных только две (в природе нет продольных электромагнитных волн), поэтому эта константа несколько отличается от ранее определённой:  $A' = (2/3)A$ .

Искомая спектральная плотность запасённой энергии:

$$dE = A' \frac{V}{c^3} \cdot \frac{\hbar \omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1} \cdot d\omega$$

Как нетрудно заметить (аналогично подсчёту молекул газа, ударяющихся о стенку сосуда) мощность, излучаемая из отверстия, связана с запасённой энергией:

$$dP = \frac{1}{6} \frac{Sc}{V} dE$$

Интенсивность излучения определяется как спектральная плотность мощности на единичную поверхность:

$$I = \frac{1}{S} \frac{dP}{d\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

Полученный результат — формула Планка для излучения чёрного тела. Этот результат привёл Макса Планка к Нобелевской премии по физике 1918 года. График зависимости спектральной плотности от частоты показан на рисунке. Посмотрим к каким ещё результатам для теплового излучения приводит эта формула.

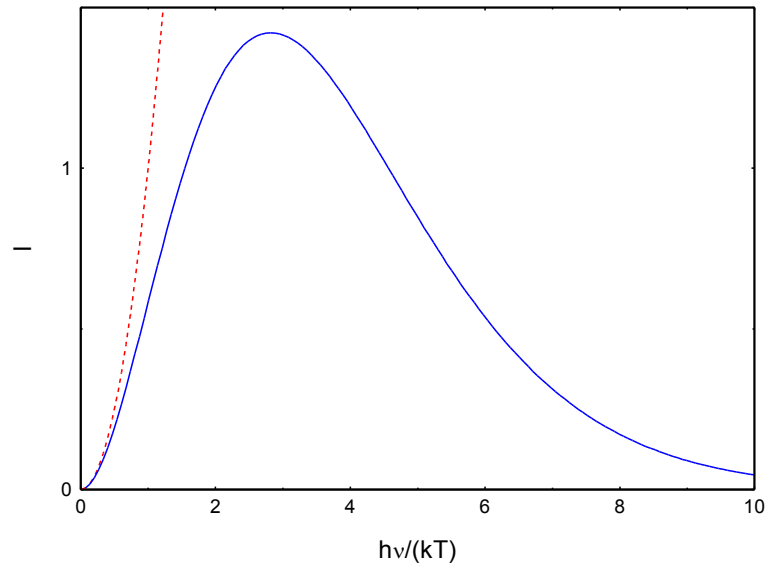


Рисунок 16: Спектральная плотность излучения чёрного тела. Синяя кривая - формула Планка, красный пунктир - классический результат Рэля и Джинкса.

Зависимость интенсивности излучения от частоты представлена на рисунке 16. При низких частотах  $h\nu \ll kT$  это выражение переходит в классический закон Рэля-Джинкса:

$$I = \frac{2\nu^2 kT}{c^2}. \text{ При повышении частоты кривая интенсивности имеет максимум, а при}$$

больших частотах экспоненциально стремится к нулю. Таким образом, этот результат избавлен от «ультрафиолетовой катастрофы» классической физики.

Положение максимума на кривой определяется только температурой. Его можно найти стандартным образом — продифференцировав уравнение кривой и найдя точку, где производная обращается в ноль:

$$x = \frac{h\nu}{kT}; \quad I = \text{const} \cdot \frac{x^3}{e^x - 1}$$

$$0 = \frac{dI}{dx} = \text{const} \cdot x^2 \frac{3(e^x - 1) - x e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$x = 3(1 - e^{-x})$$

(решение  $x=0$  соответствует минимуму при нулевой частоте). Это уравнение, однако не разрешается аналитически, численное решение даёт ответ:

$$\frac{h\nu}{kT} = 2.821.$$

То есть чем горячее тело, тем более короткие длины волн соответствуют максимуму излучения. На этом эффекте основано и определение температуры звёзд по их цвету в астрономии, и определение температуры металла по цвету раскалённой заготовки в кузнице. Подстановкой констант и переходом к длине волны получаем отсюда формулировку закона смещения Вина:

$$\lambda_{\max} = \frac{2898 \cdot 10^3 [\text{нм}]}{T [\text{K}]}$$

Напомним, что в 1911 году В.Вину была присуждена Нобелевская премия по физике за

открытие законов излучения. В том числе и за этот закон смещения.

Наконец, можно найти полную мощность излучения с единичной площади по всему спектру:

$$P = \int_0^{\infty} I(\nu) d\nu = \frac{2h}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} = \frac{2k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \sigma T^4$$

получен закон Стефана-Больцмана для теплового излучения. Постоянная Стефана-Больцмана

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 \cdot К^4}$$

не является фундаментальной постоянной — она является

комбинацией других констант и некоторых численных множителей. Отметим, что хотя сама постоянная Стефана-Больцмана мала, большая степень, в которой входит температура в закон Стефана-Больцмана, делает тепловое излучение достаточно важным фактором в теплообмене. Например, с квадратного метра тела при температуре 300К (то есть примерно с площади поверхности человеческого тела) излучается мощность примерно 500Вт!

Таким образом, радиационный теплообмен является довольно заметным и с ним приходится бороться в различных системах теплоизоляции. Одним из известных каждому примеров уменьшения этого канала теплообмена является серебрение стенок термоса — зеркальная поверхность и поглощает и излучает гораздо слабее, чем чёрное тело.

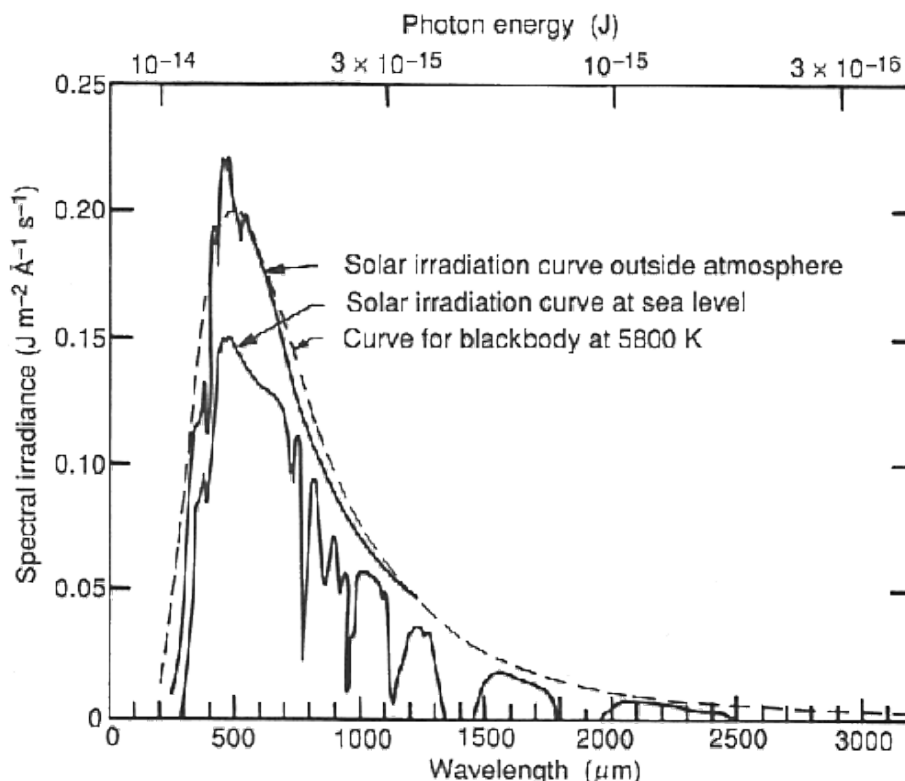


Рисунок 17: Спектральный состав солнечного излучения на поверхности Земли и вне атмосферы и сравнение с моделью излучения чёрного тела с температурой поверхности 5800К. С сайта

<http://education.gsfc.nasa.gov/experimental/all98invProject.Site/Pages/solarcycles.html>

Завершая разговор о тепловом излучении, интересно отметить два важных примера

излучения чёрного тела. Первый пример «чёрного тела» мы почти каждый день видим в небе — это наше Солнце. Спектр Солнца на уровне моря изрезан поглощением разными атмосферными газами (пары воды, кислород, углекислый газ), но спектральный состав солнечного излучения вне атмосферы с хорошей точностью описывается моделью чёрного тела с температурой 5800 К. Таким образом по измерению спектра Солнца можно, не уходя с Земли, измерить температуру его поверхности. Второй пример — это так называемое реликтовое излучение. Реликтовое излучение — это кванты излучения, образовавшиеся в первые моменты после Большого Взрыва. Реликтовое излучение практически изотропно и присутствует (согласно модели Большого Взрыва) во всех точках Вселенной. В момент возникновения реликтового излучения оно находилось в тепловом равновесии с горячей плазмой ранней Вселенной и таким образом его спектр соответствует спектру теплового излучения. В ходе расширения Вселенной реликтовое излучение «остывало», в грубой аналогии — подобно остыванию идеального газа при адиабатическом расширении. Можно сказать, что реликтовое излучение это своеобразное «эхо» Большого Взрыва. Реликтовое излучение было экспериментально обнаружено в 1965 году, позднее за это открытие была присуждена Нобелевская премия по физике (1978 год, Пензиас и Вильсон, по 1/4 премии, оставшаяся половина премии была в этот год присуждена П.Л.Капице). Точные измерения спектра реликтового излучения подтвердили, что спектральная плотность реликтового излучения подчиняется закону Планка для теплового излучения черного тела с температурой 2.725К. Максимум спектральной плотности этого излучения находится на частоте 160.4ГГц (длина волны 1.9мм). Из-за наличия реликтового излучения температура любого тела, оставленного в глубоком космосе, не сможет опуститься ниже 2.725К.

## Лекция 3. Взаимодействие излучения с веществом.

### Фотон и другие квазичастицы.

Во избежание путаницы в терминах в дальнейшем изложении необходимо немного обсудить, что такое фотон. Отметим, что на предыдущей лекции мы всегда оставались по большому счету в рамках гипотезы Планка — для объяснения всех рассмотренных эффектов было достаточно предположения о дискретности процессов излучения и поглощения электромагнитного излучения.

Квант электромагнитного поля также называют фотоном. О фотоне часто говорят как о «частице», некотором «световом мячике» с определёнными энергией и импульсом. Это наглядное представление в чём-то является данью механистичности нашего воображения, складывающегося в результате повседневного опыта, а в чём-то отголоском корпускулярной теории света.

Строго говоря, фотон — это просто короткое слово для обозначения кванта электромагнитного излучения. Существование у фотона импульса — это не есть новое предположение квантовой теории. Уже в классической электродинамике было показано, что электромагнитная волна переносит не только энергию, но и импульс. Собственно, любые волны переносят и энергию, и импульс — передача импульса и энергии к волне/от волны возникает при рождении/поглощении волны. Например, при ударе импульс бьющего тела переходит в импульс звуковых волн в «мишени», а импульс звуковых волн, в свою очередь, может передаться телу, стоящему за «мишенью». Примером такой системы с передачей импульса к волнам и от волн является хорошо известная из механики демонстрация: маятник Ньютона с несколькими подвешенными металлическими шарами.

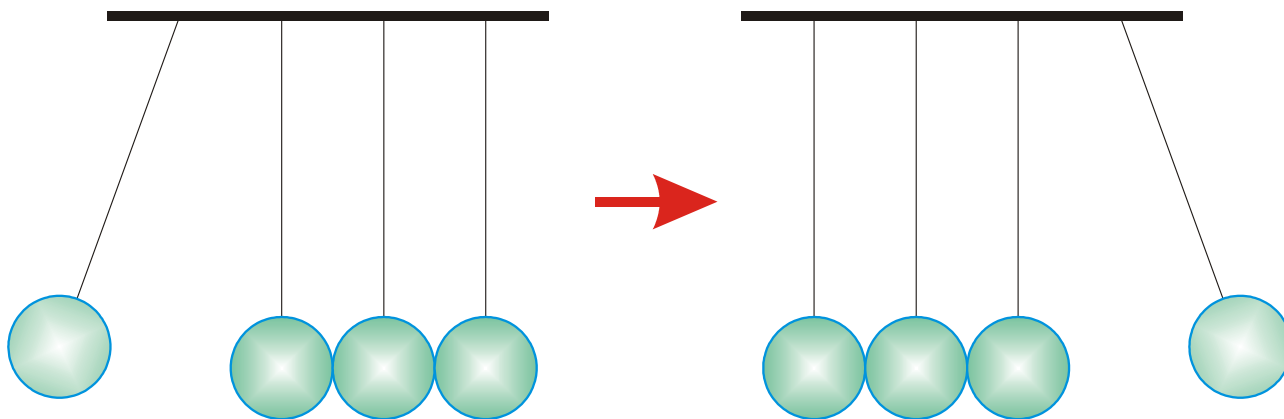


Рисунок 18: Схематическое изображение "маятника Ньютона". Крайний левый шарик ударяет по цепочке шаров и передаёт свой импульс крайнему правому шару. Импульс переносится волной деформации, бегущей по цепочке шаров.

Классическая электродинамика задаёт связь между энергией и импульсом электромагнитной волны в вакууме:  $P = \frac{E}{c}$ .

Соответственно, если энергия передаётся порциями-квантами  $h\nu$ , то импульс каждого кванта:  $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ .

Представление о фотоне как о локализованной частице («мячике») тоже не верно — это

опять некоторое механистическое упрощение. Фотон делокализован. Фотон — это квант монохроматической световой волны. Как известно из математики (утверждение следует из преобразования Фурье), идеально монохроматическая волна неограниченна в пространстве.

Кроме того, в отличие от «настоящих» частиц классической механики для фотонов не действует закон сохранения числа частиц, фотон может существенно изменяться в ходе взаимодействия со средой: он может менять частоту (на языке «механической» аналогии это приводит, например, к странным превращениям «красных» корпускул в «синие»), в некоторых условиях распадаться на два фотона (или наоборот), закон дисперсии (связи энергии и импульса) в среде зависит от свойств среды и может принимать весьма неожиданные формы.

Из-за этих отличий от «настоящих» частиц фотон называют квазичастицей («почти-частицей»). Квазичастица в физике это обычно способ описания каких-то колебаний в среде или способ описания задач многих тел. Например:

- фотон — квазичастица, описывающая колебания электромагнитного поля;
- фонон — квазичастица, описывающая упругие (звуковые) волны в среде;
- магнон — квазичастица, описывающая колебания намагниченности в ферро- или антиферромагнетике;
- дырка — квазичастица, описывающая «недостающий» электрон в полупроводнике;
- электрон в проводнике тоже является квазичастицей.<sup>1</sup>

Разница между квазичастицами и элементарными частицами пропадает в некоторых космологических теориях и в физике высоких энергий, но это сильно выходит за рамки нашего курса. Важно запомнить, что фотон — это не частица в классическом («механическом») понимании этого слова. Это квант электромагнитного поля, обладающий определёнными энергией и импульсом (а также, вообще говоря, моментом импульса). Соответственно, при процессах взаимодействия электромагнитного излучения с веществом должны выполняться законы сохранения энергии и импульса.

## Давление света.

Проявлением наличия импульса у электромагнитной волны является давление света. Подчеркнём сразу, что это не квантовый эффект, в чем мы наглядно убедимся чуть позже, получив формулу для давления света. Описание этого эффекта традиционно попадает в квантовую физику в школе из-за понятности корпускулярной аналогии, когда электромагнитная волна заменяется потоком «мячиков»-фотонов бомбардирующих мишень.

Рассмотрим задачу о давлении света в чуть более общем виде, чем просто отражение от зеркальной поверхности. Пусть поток электромагнитного излучения мощности  $W$  на частоте  $\nu$  падает нормально на пластину. Пусть пластина отражает долю падающего излучения  $\alpha_1$ , поглощает долю излучения  $\alpha_2$ , соответственно доля излучения  $(1-\alpha_1-\alpha_2)$  проходит через пластину. Эти рассуждения могут быть легко обобщены на

<sup>1</sup> Из-за взаимодействия электронов и ионной решётки дисперсионное соотношение искажается: вместо квадратичного соотношения  $E = \frac{p^2}{2m}$  для свободного электрона возникает своеобразная зонная структура проводника, а эффективная масса электрона в проводнике может заметно отличаться от массы свободного электрона.

случай наклонного падения.

В единицу времени на поверхность пластины падает  $n = \frac{W}{h\nu}$  фотонов, импульс каждого фотона  $p = \frac{h\nu}{c}$ . Отражающиеся фотоны ( $n_1 = \alpha_1 n$ ) передают пластине импульс  $2p$  каждый, поглощённые ( $n_2 = \alpha_2 n$ ) — импульс  $p$ . Давление на пластину ищется аналогично давлению газа:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{1}{S} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{S} (\alpha_1 n \cdot 2p + \alpha_2 n \cdot p) = \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{S} \cdot \frac{W}{c}.$$

Видно, что в ответ постоянная Планка не вошла. Это означает, что полученный результат не является результатом квантовой физики и может быть получен из классических соображений. Кроме того, ответ не зависит от частоты излучения, поэтому предположение о монохроматичности излучения было излишне — важна только полная мощность падающего излучения.

То что классический результат можно получить и с применением соображений квантовой физики подчёркивает одну из существенных особенностей развития научного знания. Новая теория (квантовая в нашем случае) позволяет повторить результаты предшествующей теории (классической физики) в её области применимости.

В качестве оценки величины давления света, найдём какое давление создаёт свет Солнца на зеркальную поверхность на орбите Земли. Интенсивность излучения на расстоянии земной орбиты от Солнца составляет примерно  $1.4 \text{ кВт/м}^2$ . Подстановкой получим для зеркальной поверхности  $P = 9.3 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$ . Эта величина очень маленькая, поэтому для обнаружения давления света требовалось ставить очень чувствительные опыты.

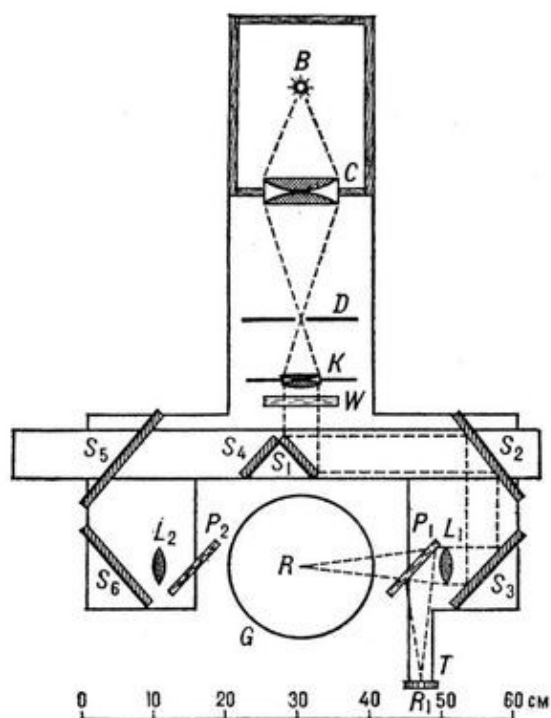


Рисунок 19: Схема постановки опыта Лебедева по давлению света. Рисунок из БСЭ, с сайта <http://bse.sci-lib.com/particle019487.html>



Рисунок 20: Радиометр Крукса. С сайта <http://www.optimus.edu.ru/node/206>.

Классический опыт по демонстрации давления света (опыт Лебедева, 1900-1901, рисунок 19) основан на измерении разности давлений на зеркальную и поглощающую поверхности (давление на зеркальную поверхность вдвое больше). Необходимо отметить, что этот опыт очень точный и его корректное проведение потребовало очень высококачественной экспериментальной работы. Лорд Кельвин говорил об опытах Лебедева [11]: „Вы, может быть, знаете, что я всю жизнь воевал с Максвеллом, не признавая его светового давления, и вот ваш Лебедев заставил меня сдаться перед его опытами“. Проявление давления света в опытах Лебедева заключается в том, что если сделать крыльчатку, лопасти которой с одной стороны зеркальные, а с другой зачернённые и поместить её в очень высокий вакуум и осветить, то такая крыльчатка начнёт вращаться *зеркальной стороной от источника света*.

Похожий прибор часто встречается в школьных лабораториях (рисунок 20). Однако необходимо обратить внимание на то, что если вакуум не достаточно высокий вместо прибора для демонстрации давления света мы получим так называемый радиометр Крукса, который при освещении крыльчатки крутится в противоположном направлении, *чёрной стороной от источника света*. Возникновение вращательного момента связано с тем, что при освещении чёрная сторона крыльчатки нагревается, разреженный газ вблизи чёрной стороны крыльчатки оказывается чуть горячее газа у зеркальной стороны крыльчатки, и давление более горячего газа на чёрную сторону крыльчатки оказывается больше давления холодного газа на её зеркальную сторону.



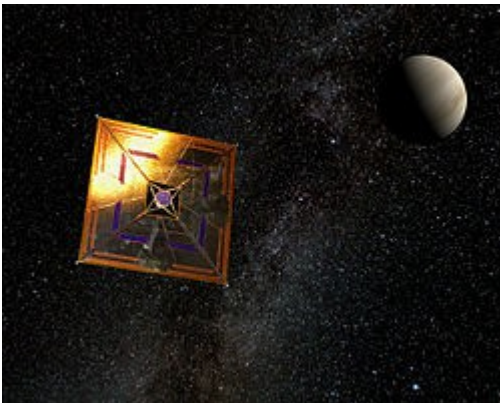


Рисунок 21: Космический зонд IKAROS с развёрнутым солнечным парусом. Представление художника, с сайта <http://en.wikipedia.org/wiki/IKAROS>

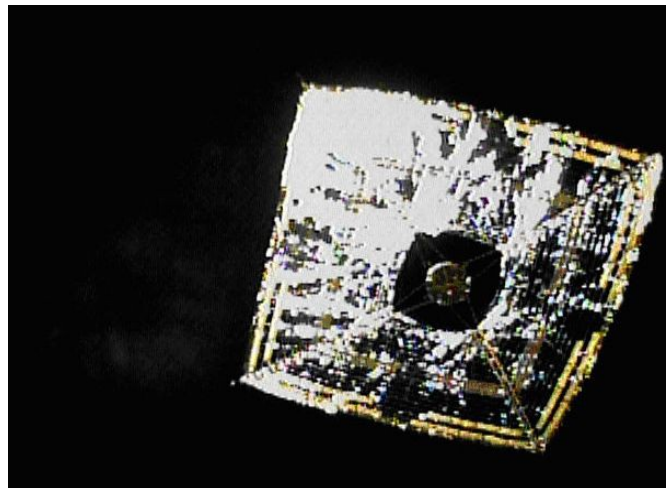


Рисунок 22: Фотография зонда IKAROS с развёрнутым солнечным парусом. Диагональ квадратного паруса равна 20 метрам. С сайта <http://www.jspec.jaxa.jp/e/activity/ikaros.html>

Несмотря на малую величину, давление света часто рассматривается в серьёзных и фантастических проектах, как движитель в космических полётах. Потенциальная выгода от такого движителя заключается в отсутствии необходимости расходовать ресурсы космического корабля — солнечный свет в этом смысле является «бесплатным» ресурсом, неограниченным во времени. Поэтому в некоторых случаях такой движитель представляет потенциальный интерес. На 2012 год был проведён ряд опытов по развёртыванию «солнечного паруса» («Nanosail-D2» НАСА, запущен 20.11.2010). Давление солнечного излучения на солнечные батареи использовалось зондом «Messenger» (запущен 3 августа 2004) во время полёта к Меркурию для коррекции орбиты. Зонд IKAROS японского космического агентства (рисунки 21, 22) использовал солнечный парус при полёте к Венере (сайт проекта [12]). Масса зонда 315 кг, параметры солнечного паруса: диагональ квадрата 20 метров, толщина 7.5 мкм.

**Задача 1:** Исследовательский зонд массой  $m=1000$  кг движется при помощи «солнечного паруса» площадью  $S=10^4$  м<sup>2</sup> ( $100 \times 100$  м<sup>2</sup>). Какую скорость наберёт зонд, стартующий с орбиты Земли, за 24 часа? Какую скорость наберёт зонд, стартующий с орбиты Меркурия за 24 часа? Мощность солнечной радиации на орбите Земли  $w=1400$  Вт/м<sup>2</sup>, радиус орбиты Меркурия принять равным 0.4 радиуса земной орбиты. «Солнечный парус» считать идеальным зеркалом, падение света на него — нормальным.

#### Решение:

Интенсивность излучения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от источника, поэтому давление на парус на орбите Меркурия, а соответственно и ускорение, и скорость, будут в  $\frac{1}{0.4^2}=6.25$  раза больше, чем на земной орбите.

Сила, действующая на «парус»:

$$F = \frac{2wS}{c}$$

по второму закону Ньютона

$$a = \frac{F}{m} = \frac{2 w S}{m c}$$

отсюда, искомая скорость (вычисления для орбиты Земли)

$$V = at = \frac{2 w S t}{m c} = \frac{2 \cdot 1400 \cdot 10^4 \cdot 24 \cdot 3600}{1000 \cdot 3 \cdot 10^8} = 8 \text{ м/с} .$$

Смещение зонда за сутки составит

$$L = \frac{1}{2} V t = 3.46 \cdot 10^5 \text{ м} = 346 \text{ км} .$$

Для того же зонда на орбите Меркурия набранная скорость и смещение за сутки будут  $50 \text{ м/с}$  и  $2200 \text{ км}$ , соответственно.



## **Законы внешнего фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта.**

Фотоэффекту традиционно уделяется внимание в школьной программе физики. Так как явление внешнего фотоэффекта достаточно просто для понимания, мы не будем долго задерживаться на теории этого явления.

Напомним вкратце историю вопроса:

- 1887 год: Г.Герц обнаружил влияние ультрафиолетового излучения на разряд индуктора
- 1888-1891 год: опыты Столетова (постановка классической схемы опыта по фотоэффекту, связь фототока с освещённостью катода)
- 1902 год: опыты фон Ленарда (зависимость запирающего напряжения от длины волны)
- 1905 год: теория фотоэффекта А.Эйнштейна
- 1905-1916 годы: опыты Милликена.

Результаты наблюдений выражаются в форме трех законов фотоэффекта (приводим их в современной формулировке):

1. (из опытов Столетова) При неизменном спектральном составе света, падающего на фотокатод, фототок пропорционален освещённости катода.
2. (из опытов фон Ленарда и Милликена) Для данного фотокатода максимальная начальная скорость фотоэлектронов зависит только от частоты света и не зависит от интенсивности.
3. (из опытов фон Ленарда и Милликена) Для каждого фотокатода существует красная граница фотоэффекта — то есть частота  $\nu_{кр}$  такая, что при частоте освещающего фотокатод света ниже  $\nu_{кр}$  фототок невозможен.

Все эти эмпирические законы объединены в уравнении Эйнштейна для фотоэффекта, являющегося, фактически, законом сохранения энергии с учётом гипотезы Планка о дискретности поглощения энергии электромагнитной волны:

$$h\nu = \frac{mV^2}{2} + A$$

здесь  $V$  — скорость фотоэлектрона сразу после выхода из катода,  $A$  — «работа выхода», то есть работа, которую надо совершить против электростатических сил для того чтобы перевести электрон из металла фотокатода во внешнее пространство. Работа выхода зависит от материала фотокатода. Типичный масштаб работы выхода — несколько электрон-вольт. Работа выхода для некоторых материалов представлена в таблице ниже (по сайту [13]):

Элемент	$A$ , эВ	Элемент	$A$ , эВ	Элемент	$A$ , эВ	Элемент	$A$ , эВ
Ag	4.52-4.74	U	3.63-3.90	Cr	4.5	Fe	4.67-4.81
Li	2.93	Si	4.60-4.85	In	4.09	Pt	5.12-5.93
Na	2.36	Hg	4.475	Sm	2.7	Ni	5.04-5.35
Zn	3.63-4.9	Au	5.1-5.47	Cu	4.53-5.10	Eu	2.5

Длина волны красной границы фотоэффекта легко определяется из закона фотоэффекта:

$$h\nu_{кр} = \frac{hc}{\lambda_{кр}} = A$$

$$\lambda_{кр} = \frac{hc}{A} = \frac{1240}{A[\text{эВ}]} \text{ нм}$$

таким образом, у большинства «химически чистых» фотокатодов красная граница фотоэффекта будет лежать в области ультрафиолетового ( $\lambda < 400 \text{ нм}$ ) излучения. Подбор материала для фотокатода, работающего в видимом диапазоне — это отдельная, достаточно сложная технологическая задача.

Отметим, что закон сохранения импульса для системы «квант света-электрон» при фотоэффекте не выполняется: фотоэлектрон движется в ту сторону, откуда пришла поглощённая волна. «Недостающий» импульс передаётся массивному фотокатоду.

За разработку теории фотоэффекта А.Эйнштейну была присуждена Нобелевская премия 1921 года. Р.Милликену, в том числе и за его работы по фотоэффекту, достоверно подтвердившие теорию А.Эйнштейна, была присуждена Нобелевская премия 1923 года. Ф.фон Ленарду была присуждена Нобелевская премия 1905 года за работы по катодным лучам.

Интересно отметить, что стимулом для работ Р.Милликена в области фотоэффекта было желание опровергнуть «неклассическую» теорию фотоэффекта Эйнштейна. И в качестве печального исторического предостережения, показывающего, что и учёные, независимо от величины научных заслуг, могут поддаваться политическим или иным течениям, можно отметить что Ф. фон Ленард (как и Й.Штарк, Нобелевский лауреат по физике 1919 года) с 20-х годов XX века стал сторонником и пропагандистом «немецкой» (или «арийской») физики.

## Задачи на световые кванты и внешний фотоэффект.

**Задача 2:** Мощность точечного источника монохроматического света  $P_0 = 10 \text{ Вт}$  на длине волны  $\lambda = 500 \text{ нм}$ . На каком максимальном расстоянии этот источник будет замечен человеком, если глаз реагирует на световой поток  $n = 60$  фотонов в секунду. Диаметр зрачка  $d_{зр} = 0.5 \text{ см}$ .

**Решение:**

Энергия одного фотона  $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ .

В секунду источником испускается  $N = \frac{P_0}{E} = \frac{P_0 \lambda}{hc}$  фотонов во всех направлениях.

Количество фотонов  $n$ , попадающих в зрачок наблюдателя на расстоянии  $R$  от источника определяется отношением площади зрачка и сферы радиуса  $R$  (так как фотоны, излучаемые точечным источником, равновероятно распространяются во всех направлениях):

$$n = \frac{\pi d_{зп}^2 / 4}{4\pi R^2} N$$

$$R = \frac{d_{зп}}{4} \sqrt{\frac{P_0 \lambda}{hc n}} \sim \frac{5 \cdot 10^{-3}}{4} \sqrt{\frac{10 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 60}} \text{ м} \sim 10^6 \text{ м} = 1000 \text{ км}$$



**Задача 3:** Изолированную, изначально электронейтральную, металлическую сферу освещают светом на частоте, большей, чем красная граница фотоэффекта. Определить заряд и потенциал шара относительно бесконечности в установившемся режиме. Считать заданными частоту излучения  $\nu$ , работу выхода  $A$  и радиус шара  $R$ . Оценить численно установившийся потенциал для покрытого слоем металлического натрия ( $A = 2.36 \text{ эВ}$ ) шара, освещаемого синим светом с длиной волны  $400 \text{ нм}$ .

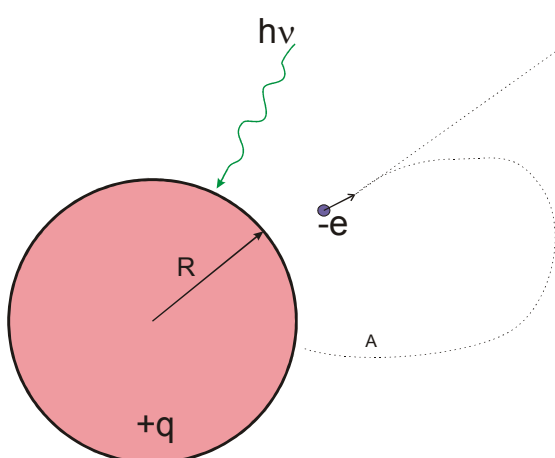
**Решение:**

Рисунок 23: К решению задачи 3.

Из-за сохранения полного электрического заряда, при выходе фотоэлектрона за поверхность шара, шар получает положительный заряд: в шаре остаётся положительный ион с нескомпенсированным теперь зарядом. Положительный заряд шара притягивает электрон, возникает возвращающая сила. «Судьба» фотоэлектрона определяется тогда его кинетической энергией: если кинетической энергии фотоэлектрона достаточно, чтобы преодолеть притяжение, он улетит «на бесконечность» (траектория «В» на рисунке 23), если не достаточно — вернётся к шару (траектория «А» на рисунке 23).

У задачи есть некоторая недоговорённость в условии. Рассматривать электроны «по одному», как мы только что сделали, можно если за время полёта одного электрона не выбивается новых электронов. В противном случае, в ходе движения электрона будет изменяться задерживающий потенциал и задача станет сложнее. Для того, чтобы упростить задачу дополнительно предположим, что интенсивность облучения достаточно низка, чтобы пренебречь такими эффектами.

Формализуем сделанные утверждения:

уравнение фотоэффекта  $h\nu = A + \frac{mV^2}{2}$

условие ухода электрона «на бесконечность»  $\frac{mV^2}{2} > k \frac{Qe}{R}$

в установившемся режиме  $k \frac{Qe}{R} = h\nu - A$ .

Отсюда:  $Q = \frac{R}{ke} (h\nu - A)$   
 $\phi = k \frac{Q}{R} = \frac{h\nu - A}{e}$

Для численной оценки в условиях задачи получаем

$$\phi = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{400 \cdot 10^{-9} \cdot 1.60 \cdot 10^{-19}} - 2.36 = 3.10 - 2.36 = 0.74 \text{ В}$$



**Задача 4:** Для измерения постоянной Планка катод вакуумного фотоэлемента освещают монохроматическим светом. При длине волны  $\lambda_1 = 620 \text{ нм}$  фототок прекращается при включении в цепь задерживающего потенциала не менее чем  $U_1$ . При увеличении длины волны на 25% задерживающий потенциал оказывается на  $\Delta U = 0.4 \text{ В}$  меньше. Определить по этим данным постоянную Планка.

**Решение:**

Речь идёт о классической схеме для изучения фотоэффекта с приложением запирающего напряжения (см. рисунок 24).

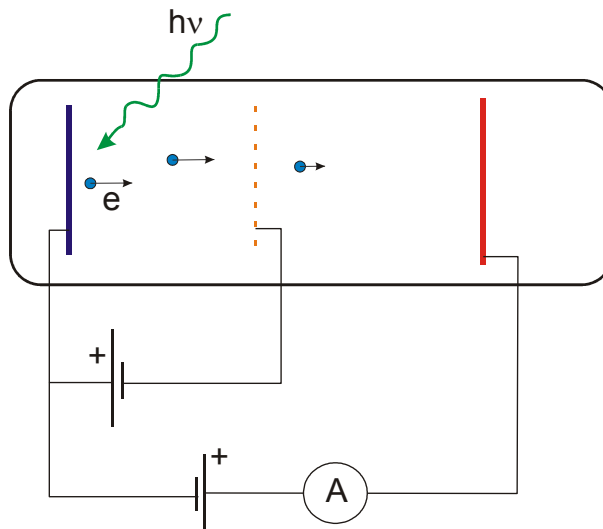


Рисунок 24: К решению задачи 4. Постановка опыта по измерению фототока в зависимости от задерживающего напряжения. На промежуточной сетке отрицательный относительно фотокатода потенциал  $-U_{\text{зад}}$ , который тормозит электроды. Положительный потенциал анода позволяет «собрать» все электроны, преодолевшие сетку: то есть электроны, кинетическая энергия которых была больше  $eU_{\text{зад}}$ .

Уравнение фотоэффекта:  $h\nu = A + \frac{mV^2}{2}$

Минимальное напряжение, полностью прекращающее фототок, определяется равенством:

$$eU = \frac{mV^2}{2}$$

Объединяя эти равенства получаем:

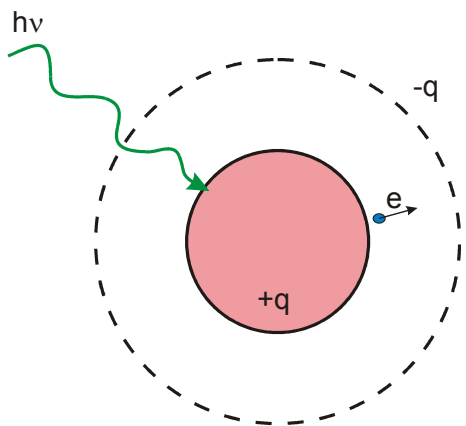
$$\begin{aligned} h\nu &= A + eU \\ h\nu_1 &= A + eU_1 \\ h\nu_2 &= A + eU_2 \\ h(\nu_1 - \nu_2) &= e\Delta U \\ e\Delta U &= hc \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{hc}{5\lambda_1} \end{aligned}$$

Откуда  $h = \frac{e\Delta U 5\lambda_1}{c} = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$



**Задача 5:** При освещении вакуумного фотоэлемента жёлтым светом ( $\lambda_1 = 600 \text{ нм}$ ) он заряжается до разности потенциалов  $U_1 = 1.2 \text{ В}$ . До какой разности потенциалов зарядится фотоэлемент при освещении его фиолетовым цветом ( $\lambda_2 = 400 \text{ нм}$ ).

**Решение:**



Для простоты предположим, что фотокатод имеет форму шара, а анод — это охватывающая фотокатод сетка (рисунок 25).

Фототок прекращается, если разность потенциалов равна задерживающей. Соответственно:

$$\begin{aligned} eU_1 + A &= h\nu_1 \\ eU_2 + A &= h\nu_2 \\ U_2 &= U_1 + \frac{hc}{e} \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = 2.23 \text{ В} \end{aligned}$$

Рисунок 25: К решению задачи 5.



## Внутренний и многоквантовый фотоэффект.

Рассмотренное нами выше явление фотоэффекта называют также внешним фотоэффектом. Термин «внешний» используется чтобы подчеркнуть, что электроны выходят из металла во внешнее пространство. Помимо внешнего фотоэффекта существует ещё и внутренний фотоэффект, наблюдаемый в полупроводниках или диэлектриках, когда под действием облучения освобождаются связанные электроны (то есть электроны, локализованные вблизи ионов), но они остаются внутри материала и, таким образом, в материале появляются свободные носители заряда, что приводит к изменению (или даже возникновению) проводимости. Принципиально внутренний фотоэффект не отличается от внешнего, его

формальное описание также сведётся к закону сохранения энергии. Однако формальное описание этого явления потребует объяснения того, как движутся электроны внутри кристалла, что оказывается сильно выходящим за рамки этого курса. Отметим лишь, что именно внутренний фотоэффект используется в различных полупроводниковых приборах — от датчиков освещённости и автоматических выключателей света до солнечных батарей.

Другим примером необычного фотоэффекта является многоквантовый фотоэффект, при котором энергия нескольких квантов электромагнитного излучения идёт на извлечение из металла всего одного фотоэлектрона. Закон сохранения энергии для многоквантового фотоэффекта имеет вид:

$$N \cdot h\nu = \frac{mV^2}{2} + A$$

где  $N$  — количество квантов, участвующих в процессе. Очевидно, что для реализации многоквантового фотоэффекта несколько квантов света должны оказаться «в одном месте, в одно время», то есть требуется большая интенсивность излучения. Поэтому наблюдение такого процесса стало возможным только с появлением лазеров, создающих интенсивное излучение. Первые опыты по многоквантовому фотоэффекту были проделаны в 1960-х годах [14].

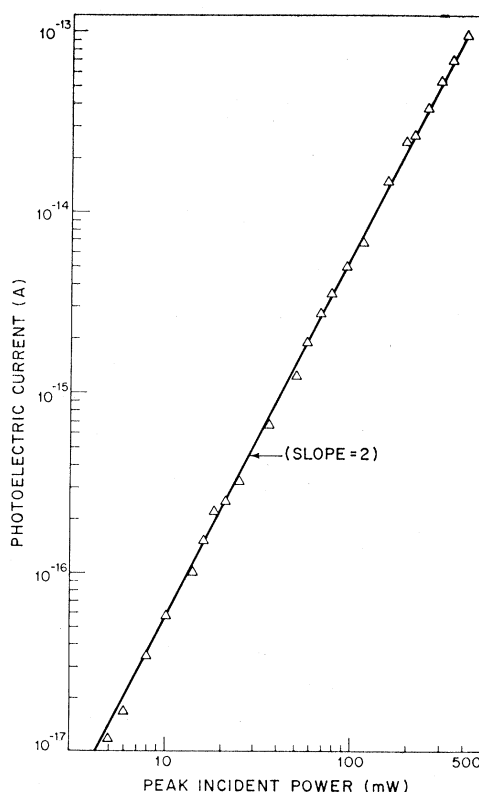


Рисунок 26: Зависимость фототока от освещённости фотокатода (падающей мощности). Из работы [14].

У многоквантового фотоэффекта есть несколько особенностей, которые не подчиняются привычным законам фотоэффекта. Во-первых, как легко заметить, многоквантовый фотоэффект возможен при частотах излучения меньших, чем красная граница одноквантового фотоэффекта. Красная граница  $N$ -квантового фотоэффекта, очевидно, оказывается в  $N$  раз меньше (по частоте), чем красная граница одноквантового фотоэффекта.

Во-вторых, для многоквантового фотоэффекта не верен закон Столетова: фототок оказывается пропорционален N-ой степени интенсивности излучения  $I \propto W^N$ .

На рисунке 26 приведена зависимость фототока от интенсивности излучения из одной из первых работ по двухквантовому фотоэффекту. Измерения выполнялись при энергии фотонов 1.48 эВ, в то время как работа выхода для натрия, использовавшегося в качестве фотокатода, составляет 2.36 эВ. То есть одноквантовый фотоэффект невозможен в принципе. В опытах лазерный луч фокусировался в пятно площадью примерно  $2 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2$  и интенсивность излучения составляла  $10^8 \text{ Вт/м}^2$ . Для сравнения напомним, что полная интенсивность солнечного излучения на земной орбите составляет около  $1400 \text{ Вт/м}^2$ .



## Практические применения фотоэффекта.

### Вакуумные фотоэлектронные умножители.

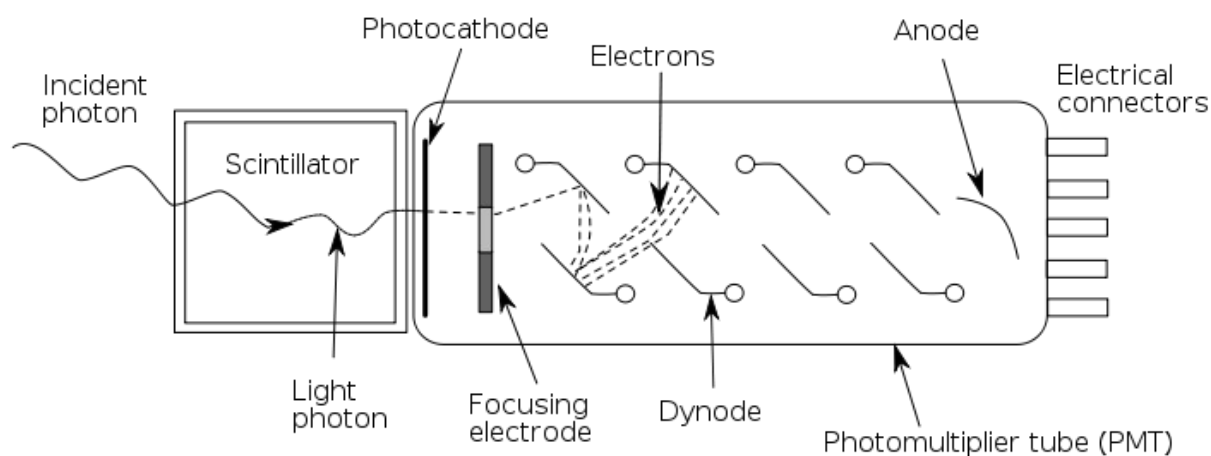


Рисунок 27 Сверху: общий вид одного из ФЭУ и крупный план системы ускоряющих электродов. Снизу: схема ФЭУ со сцинтиляционным экраном, используемого при детектировании частиц. С сайта <http://em.wikipedia.org/wiki/Photomultiplier>

Вакуумные фотоэлектронные умножители (ФЭУ) являются прямыми наследниками вакуумного фотодиода, фактически имевшегося уже в опытах Столетова. За фотокатодом устанавливают несколько дополнительных электродов, на которые подают ускоряющее напряжение (обычно около 100 В). Эта конфигурация позволяет добиться превращения одного фотоэлектрона в лавину вторичных электронов: ускоренный до энергии 100 эВ электрон выбивает несколько электронов их электрода, эти электроны ускоряются к следующему электроду и так далее. В результате получается импульс тока, который может быть измерен. В принципе, эта конструкция позволяет достичь достаточной

чувствительности для регистрации отдельных фотонов. Фотоэлектронный умножитель является одним из немногих вакуумных приборов не отдающих свои позиции полупроводниковой технике. Это связано с высокой чувствительностью ФЭУ, большим внутренним коэффициентом усиления, малым темновым (в отсутствие освещения) током. ФЭУ применяют в приборах ночного видения, различных схемах анализа (в том числе медицинских), в сочетании со сцинтиляционным экраном — для регистрации частиц в ядерной физике. На рисунках ниже приведен внешний вид и схема ФЭУ

**Фотодиоды, фоторезисторы.**

Фотодиоды, фоторезисторы и другие полупроводниковые приборы, работающие на явлении внутреннего фотоэффекта, встречаются во многих бытовых приборах. Это и простейшие датчики освещения, и приёмники излучения в приводах оптических компакт-дисков. Матрицы цифровых фотоаппаратов и видеокамер тоже состоят из полупроводниковых фотоэлементов (за разработку этой технологии Виллард С. Бойл и Джордж Е. Смит были удостоены Нобелевской премии по физике 2009 года). Выигрывая в компактности и стоимости, полупроводниковые фотоэлементы уступают вакуумным ФЭУ там, где требуется высокая чувствительность или быстрое время отклика.

**Солнечные батареи.**

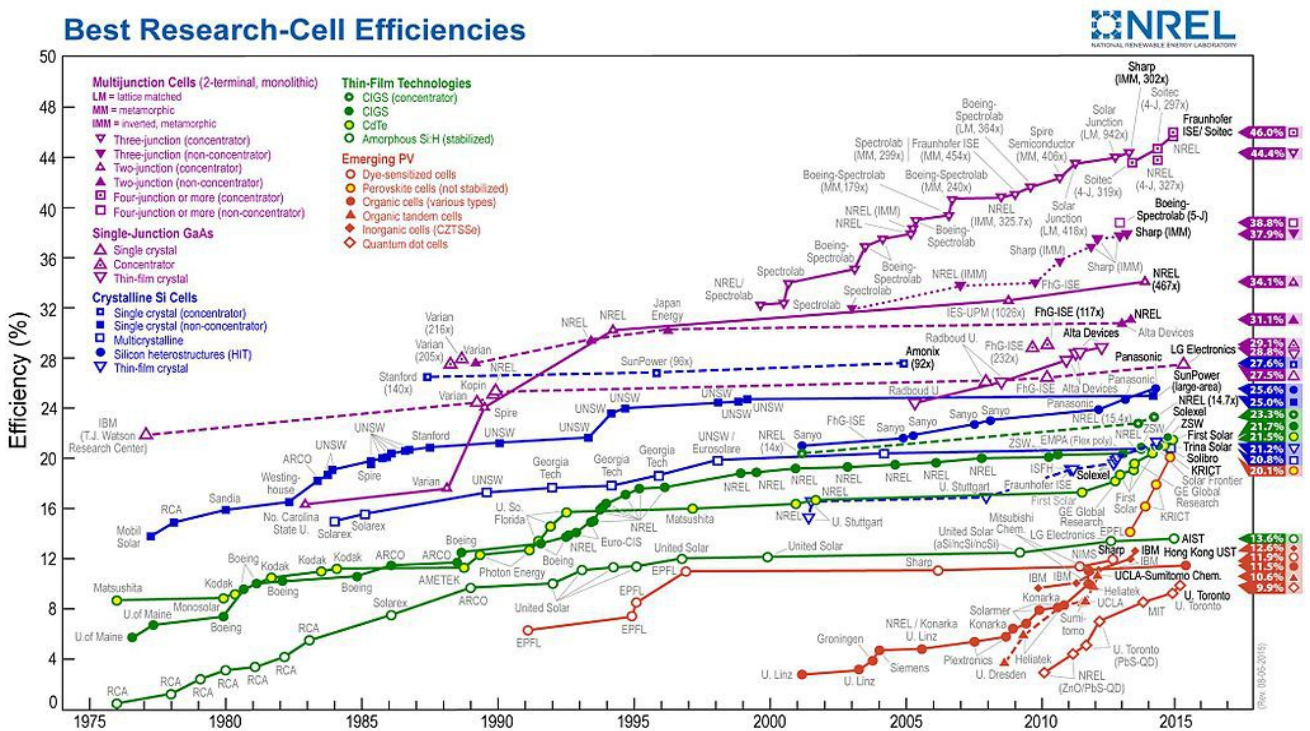


Рисунок 28: Прогресс в КПД (коэффициенте преобразования энергии) солнечных батарей. С сайта [https://en.wikipedia.org/wiki/Solar\\_cell\\_efficiency](https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_cell_efficiency).

Солнечные батареи являются источником энергии, который за счёт фотоэффекта преобразует энергию падающего света в электричество. Простейшим примером такой батареи является вакуумный фотоэлемент из задачи 5.

Плюсом такого источника энергии является отсутствие загрязнения окружающей среды в месте расположения станции. Однако, во избежание излишнего оптимизма необходимо

подчеркнуть следующие ограничивающие факторы. Интенсивность солнечного излучения на орбите Земли составляет всего  $1400 \text{ Вт/м}^2$ . Однако на поверхности Земли (в Европе) из-за облачности эта цифра может падать до  $100 \text{ Вт/м}^2$ , а ночью, естественно, до нуля. С учётом того, что КПД солнечных панелей составляет 10-40% (рисунок 28), получаем, что для стабильной выработки заметной мощности требуется большая площадь батарей.

Чтобы обеспечить стабильное потребление мощности на уровне  $10 \text{ кВт}$  потребуется площадь панелей около  $1000 \text{ м}^2$ . При этом необходимо поддерживать эту площадь чистой от грязи и пыли. Кроме того, важны и экономические соображения: себестоимость киловатт-часа электроэнергии произведённого солнечными батареями составляла в 2010 году примерно 0.2 доллара США, а себестоимость киловатт-часа на других электростанциях была примерно в пять раз меньше. Тем не менее, солнечные батареи точно оказываются оправданы там, где потребление невелико, а возможности подключения к другим источникам нет — например для питания удалённых метеостанций, либо в охраняемых природных заповедниках, где загрязнение недопустимо, и, конечно, в космосе, где солнечные батареи успешно работают уже около 50 лет.



Рисунок 29: Поле солнечных батарей электростанции Вальдполени, ФРГ. С сайта [http://en.wikipedia.org/wiki/Waldpolenz\\_Solar\\_Park](http://en.wikipedia.org/wiki/Waldpolenz_Solar_Park)

Строительство больших солнечных электростанций является во многом более политическим шагом, чем экономически оправданным проектом, однако есть примеры строительства достаточно мощных станций. Список крупных станций можно найти например на сайте [15]. Как правило, солнечные электростанции строят в южных районах (Индия, Испания, Калифорния). Из европейских стран с климатом, в некоторой степени сравнимым с российским, можно отметить большое количество таких станций в Германии — но это во многом связано с ростом популярности «зелёных» партий в Германии в начале 2000-х.

Одна из крупнейших станций: Waldpolenz Solar Park, построена в 2008 году в Германии в окрестностях Лейпцига (рисунок 29). Площадь поля солнечных батарей по первоначальному проекту<sup>1</sup> около 100 гектар, номинальная мощность станции около 40 МВт, выработка электроэнергии 40 миллионов кВт-часов в год.

<sup>1</sup> Мощность станции была увеличена до 52 МВт в 2011 году за счёт установки дополнительных панелей.



Для сравнения, мощность одной из старейших гидроэлектростанций — Днепрогэс (введена в строй в 1932-1939 годах) примерно 1500 МВт сейчас (560МВт — проектная мощность, достигнутая в 1939 году), а выработка электроэнергии на ней сейчас около 4000 миллионов кВт-часов в год. Нижегородская ГЭС (пущена в 1955-1956 годах) имеет номинальную мощность 520 МВт и годовую наработку 1513 млн. кВт-часов при площади зеркала бассейна ГЭС около 1600 км<sup>2</sup>. Саяно-Шушенская ГЭС (введена в 1978-1985 годах) при мощности 6400 МВт, годовой наработке 23500 миллионов кВт-часов имеет площадь зеркала 620 км<sup>2</sup>.

Таким образом, на Нижегородской ГЭС годовая выработка энергии в расчёте на площадь зеркала составляет около 1 миллиона кВт-часов с квадратного километра, на Саяно-Шушенской — около 40 миллионов кВт-часов с квадратного километра, а у солнечной электростанции Вальдполенц также около 40 миллионов кВт-часов с квадратного километра.

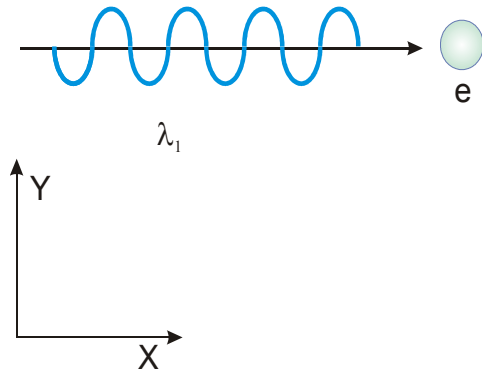
## Эффект Комптона.

Мы рассмотрели выше два эффекта: давление света, для описания которого необходимо рассматривать импульс электромагнитной волны, и фотоэффект, для описания которого необходимо рассматривать энергию кванта электромагнитного излучения. Существует ещё один эффект взаимодействия излучения с веществом, при котором важны и сохранение энергии, и сохранение импульса. Это эффект Комптона, за объяснение которого А.Комптон был присуждён Нобелевская премия по физике 1927 года.

При исследовании рассеяния рентгеновского излучения было обнаружено, что рассеянные рентгеновские лучи оказываются «мягче» (то есть с меньшей частотой), чем падающие. Классическая электродинамика не может объяснить этого сдвига частоты — вторичные волны, созданные электроном попавшим в поле падающей волны, должны быть на той же частоте, что и падающая волна. Приведём здесь типичные значения экспериментальных данных, известных А.Комптон [16]: при длине волны падающего излучения  $0.708 \text{ \AA}$  максимальное изменение длины волны рассеянного света составляет лишь  $0.044 \text{ \AA}$ , максимальное изменение длины волны наблюдается при рассеянии назад (в направлении на источник излучения).

Для объяснения этого явления необходимо рассмотреть взаимодействие электрона с падающим на него фотоном с одновременным учётом законов сохранения энергии и импульса. Электрон до процесса рассеяния мы будем считать свободным и покоящимся. Реально рассеяние происходит на электроне, находящемся на какой-то из атомных орбиталей. Однако энергия кванта падающего рентгеновского излучения (примерно 18 кэВ в опытах, на основании которых Комптон разработал теорию этого явления) и энергия, передаваемая электрону (по приведённым выше данным, изменение энергий кванта при рассеянии составляет около 1кэВ), заметно больше энергии связи электрона в атоме (~1 эВ), поэтому энергией связи можно при рассмотрении этой задачи пренебречь. Также пренебрежём релятивистскими эффектами (оправдано тем, что передаваемая энергия ~1кэВ много меньше массы покоя электрона 511кэВ) и будем считать электрон подчиняющимся классической механике.

До рассеяния



После рассеяния

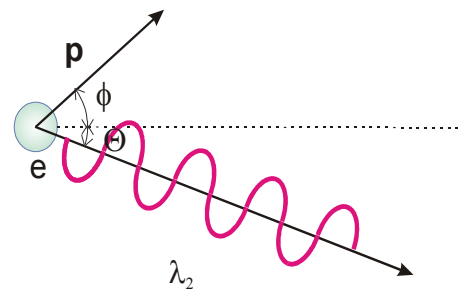


Рисунок 30: К описанию эффекта Комптона.

Процесс рассеяния изображён на рисунке 30. Пусть  $\Theta$  — угол отклонения рассеянных квантов от направления падающего излучения. По рисунку 30 этот угол отсчитывается против нормального направления отсчёта углов, что позднее приведёт к появлению знака «минус» в уравнениях для проекции импульса. Закон сохранения энергии в процессе рассеяния:

$$h \nu_1 = h \nu_2 + \frac{p^2}{2m}$$

здесь  $p$  — импульс, приобретённый электроном.

Закон сохранения импульса:

$$OX : \frac{h \nu_1}{c} = \frac{h \nu_2}{c} \cdot \cos \Theta + p_x$$

$$OY : 0 = -\frac{h \nu_2}{c} \cdot \sin \Theta + p_y$$

Минус во втором уравнении связан с выбором направления отсчёта угла  $\Theta$ . Преобразуем уравнения:

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 = \left(\frac{h \nu_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{h \nu_2}{c}\right)^2 - 2 \frac{h^2 \nu_1 \nu_2}{c^2} \cos \Theta$$

С другой стороны, из закона сохранения энергии:

$$p^2 = 2 m h (\nu_1 - \nu_2)$$

Для упрощения вычислений воспользуемся тем, что сдвиг частоты в опыте мал.

$$\delta \nu = \nu_2 - \nu_1 \ll \nu_{1,2}$$

$$\nu_2^2 \approx \nu_1^2 + 2 \nu_1 \delta \nu$$

$$\nu_1 \nu_2 = \nu_1^2 + \nu_1 \delta \nu$$

Объединяя все выписанные уравнения, получаем:

$$-2 m h \delta v = \left( 2 \frac{h^2 v_1^2}{c^2} + 2 \frac{h^2 v_1 \delta v}{c^2} \right) (1 - \cos \Theta)$$

$$\delta v = - \frac{\frac{h v_1^2}{m c^2} (1 - \cos \Theta)}{1 + \frac{h v_1}{m c^2} (1 - \cos \Theta)}$$

Отметим, что полученный эффект действительно квантовый: при обращении в ноль постоянной Планка сдвиг частоты также обращается в ноль — то есть переходит в результат классической электродинамики. Масса покоя электрона  $mc^2 = 511 \text{ кэВ}$  действительно заметно больше энергии кванта (18 кэВ в опытах, на которые опирался Комптон), что соответствует малости сдвига частоты. Пренебрегая малой поправкой в знаменателе, получаем окончательно:

$$\frac{\delta v}{v_1} = - \frac{h v_1}{m c^2} (1 - \cos \Theta)$$

$$\delta \lambda = \delta \left( \frac{c}{v} \right) = - \lambda_1 \frac{\delta v}{v_1} = \frac{h}{m c} (1 - \cos \Theta) = \lambda_0 (1 - \cos \Theta)$$

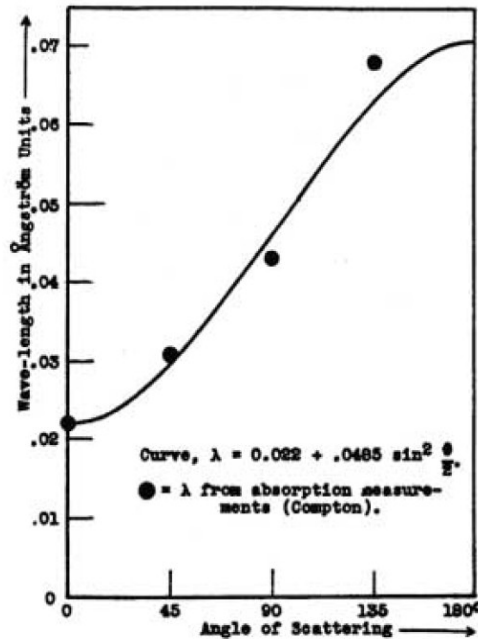


Fig. 5. The wave-length of scattered  $\gamma$ -rays at different angles with the primary beam, showing an increase at large angles similar to a Doppler effect.

Рисунок 31: Экспериментальные данные А.Комптона. Из статьи [16].

здесь  $\lambda_0 = h/(mc) = 0.024 \text{ \AA}$  так называемая КОМПТОНОВСКАЯ длина волны электрона.

Экспериментальная картина (рисунок 31) соответствует нашему теоретическому расчёту.

Эффект Комптона демонстрирует, что в некоторых случаях взаимодействие электромагнитного излучения с веществом происходит практически как соударение шаров в механике.

## Лекция 4. Волновые свойства частиц. Строение атома и периодическая система Д.И. Менделеева. Различные квантовые эффекты.

### Гипотеза де Бройля.

На предыдущей лекции мы рассмотрели ситуации, когда проявляются квантовые свойства излучения. В частности, как мы увидели, в некоторых случаях (эффект Комптона), взаимодействие излучения с веществом описывается языком похожим на язык обычной механики. Квант излучения рассматривается как объект с определёнными энергией и импульсом и процесс рассеяния рассматривается исключительно в рамках решения уравнений, возникающих из законов сохранения энергии и импульса.

Де Бройль в своей работе 1923 года «Волны и кванты» [17] предположил существование некоторых волновых свойств у «нормальных» тел, движение которых описывалось ранее только классической механикой.

Интересно рассмотреть рассуждение де Бройля, опирающееся на идеи теории относительности Эйнштейна. Де Бройль предположил, что с энергией покоя  $E_0 = m_0 c^2$  связан некоторый собственный для тела периодический процесс с частотой  $\nu_0 = E_0/h = (m_0 c^2)/h$ . Если это тело движется относительно неподвижного наблюдателя, то, из-за лоренцева «растяжения» времени между максимумами этого периодического процесса, наблюдатель видит колебания на меньшей частоте  $\nu' = \nu_0 \sqrt{1 - (V/c)^2}$ . С другой стороны, по принципу относительности, должно независимо от системы отсчёта сохраниться соотношение частоты периодического процесса и энергии тела

$$\nu'' = \frac{E}{h} = \frac{1}{h} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

Для того, чтобы согласовать оба ответа (так как наблюдатель видит что-то определённое), необходимо (что и сделал де Бройль) предположить, что с этим собственным периодическим процессом связана волна, распространяющаяся (в системе отсчёта наблюдателя) с фазовой скоростью

$$U = \frac{c}{(V/c)} = \frac{c^2}{V} > c.$$

Как хорошо известно из электродинамики, фазовая скорость не ограничивается теорией относительности. Поэтому в том, что фазовая скорость оказывается больше скорости света в вакууме нет никакого парадокса.

Если в момент времени  $t=0$  «собственные колебания» совпадают по фазе с фазой этой гипотетической волны, то через время  $t$  в точке смещённой на  $x = Vt$  фаза собственных колебаний для наблюдателя будет  $2\pi \nu' t$ , а фаза волны

$$2\pi \nu'' t - 2\pi x \frac{\nu''}{U} = 2\pi \nu'' \left( t - x \frac{V}{c^2} \right) = 2\pi \nu'' t \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right).$$

Эти соотношения совпадают, если  $\nu' = \nu'' \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)$ , что удовлетворяет вышеприведённым уравнениям. Групповая же

скорость этой волны оказывается совпадающей со скоростью тела.

Длина волны этой «волны де Бройля» для неподвижного наблюдателя

$$\lambda = \frac{U}{v''} = \frac{h}{m_0 V / \sqrt{1 - (V/c)^2}} = \frac{h}{p} .$$

Таким образом, по гипотезе де Бройля, движение материального тела может быть описано как движение некоторого волнового пакета с характерной длиной волны  $\lambda = h/p$ . Эта гипотеза приписывает частицам волновые свойства. В частности, из неё сразу следует противоречащее классическому «здравому смыслу» заключение о возможности наблюдения дифракционных и интерференционных явлений в опытах с частицами.

Однако чрезвычайная малость постоянной Планка показывает, почему таких явлений не наблюдается «в быту»: для тела массой 1 кг, движущегося со скоростью 1 м/с, дебройлевская длина волны оказывается  $6 \cdot 10^{-34}$  м. А вот в микромире, куда наш повседневный опыт не распространяется, дифракция и интерференция частиц — это обыденное явление, о некоторых примерах мы поговорим чуть позже. Сам де Бройль для обоснования своей теории опирался на возникающую при этом естественную трактовку правила квантования Бора-Зоммерфельда для стационарных состояний электрона в атоме, о чем мы также поговорим чуть позднее.

В настоящий момент волновые свойства частиц являются естественной частью физической картины мира. Они непосредственно включены в математический формализм квантовой физики (формализм волновой функции). А Луису Виктору Пьеру Раймону, будущему седьмому герцогу Бройль (1960), первому шагнувшему в этом направлении, в 1929 году была присуждена Нобелевская премия по физике.

## Дифракция частиц.

Одно из удивительных следствий гипотезы де Бройля — это предсказание о возможности дифракционных явлений в мире микрочастиц. Чтобы понять, о каких по величине эффектах идёт речь рассмотрим наиболее удобную в обращении частицу — электрон. Удобство здесь заключается в том, что электрон (даже при технике 20-х — 30-х годов XX века) достаточно легко получить и контролируемо ускорить. Оценим дебройлевскую длину волны для электрона, прошедшего разность потенциалов 100 кВ:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m e U}} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5}} \approx 4 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 0.04 \text{ \AA} .$$

Как мы помним из волновой оптики, дифракционные явления проявляются, когда период дифракционной решётки оказывается достаточно близок к длине волны. Наблюдение больших порядков интерференции всегда сопряжено с техническими сложностями. Поэтому, для проверки этого следствия теории де Бройля необходимо найти подходящую дифракционную решётку. Такую решётку природа предоставляет сама в виде многочисленных кристаллов — типичное расстояние между атомами в кристалле составляет несколько ангстрем, периодическое расположение атомов соответствует всем требованиям оптики к дифракционной решётке. Поэтому искать следы дифракции естественно при рассеянии частиц на кристаллах.



### Опыты Дэвиссона-Гермера.

Описание опытов Дэвиссона-Гермера приводится здесь по нобелевской лекции С.Дж.Дэвиссона (Нобелевская премия 1937 года) [18]. Опыты проводились в 1926 — 1927 году в исследовательской лаборатории компании Белл (Bell Telephone Laboratories) в Нью-Йорке.

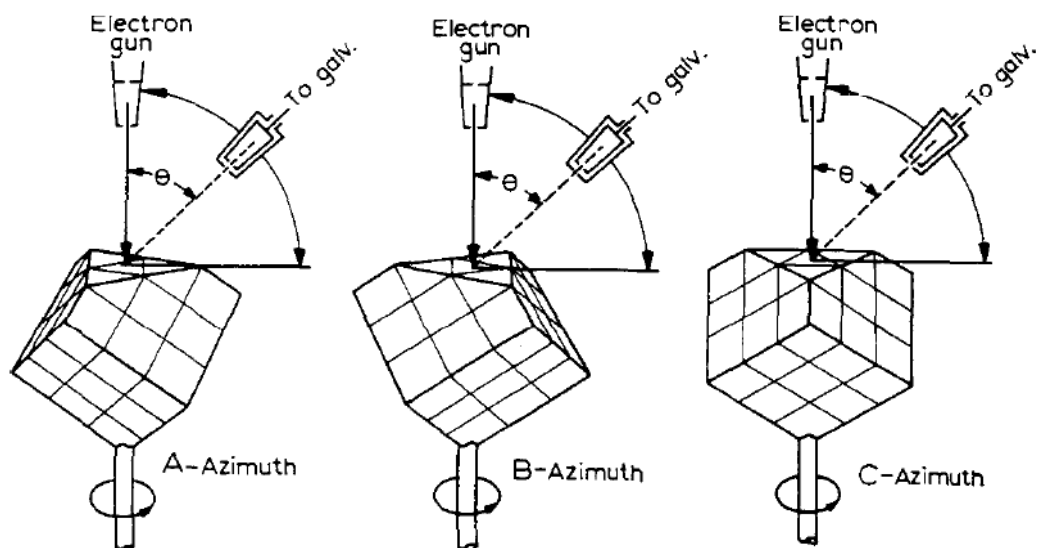


Fig. 1. Schematic diagram showing disposition of primary beam, nickel crystal, and collector. Crystal shown revolved to bring one principal azimuth after another into plane of observation.

Рисунок 32: Схема опыта Дэвиссона. По нобелевской лекции [18].

Схема опыта показана на рисунке 32. Электроны из пушки направлялись на четко определённую грань кристалла никеля. Рассеянные электроны попадали на детектор. В зависимости от ускоряющего напряжения пушки максимум рассеяния оказывался под разными углами к падающему пучку (рисунок 33).

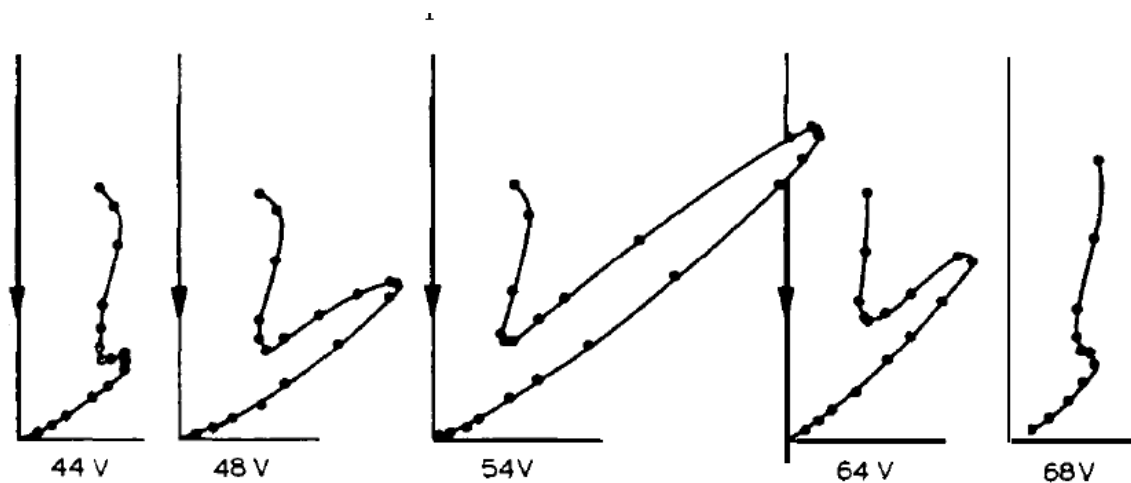


Fig. 2. Polar diagram showing intensity of elastic scattering in A-azimuth (Fig. 1) as function of latitude angle, for series of primary-beam voltages.

Рисунок 33: Угловые диаграммы тока рассеянных электронов при разных значениях ускоряющего напряжения. Из нобелевской лекции [18].

Условие дифракции под углом  $\Theta$  то же что и в оптике — волны рассеянные разными центрами регулярной решётки кристалла должны попадать в фазу:  $a \sin \Theta = n \lambda$  (см. рисунок 34).

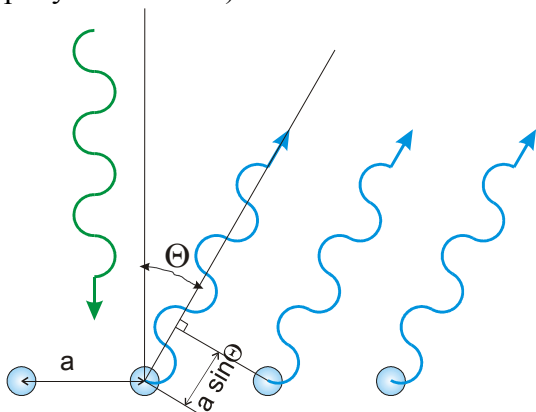


Рисунок 34: К выводу условия дифракции.

ускоряющая разность потенциалов в пушке.

Начиная исследование с малых углов, как делали Дэвиссон и Гермер, можно определить порядок дифракции, а зная расстояние между центрами рассеяния (то есть расстояние между атомами в кристалле, определяемое по рентгеновской дифракции) определить дебройлевскую длину волны.

Теория де Бройля связывает длину волны с импульсом — то есть со скоростью и энергией электрона:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{12.25 \text{ \AA}}{\sqrt{U[B]}} , \quad \text{где } U \text{ —}$$

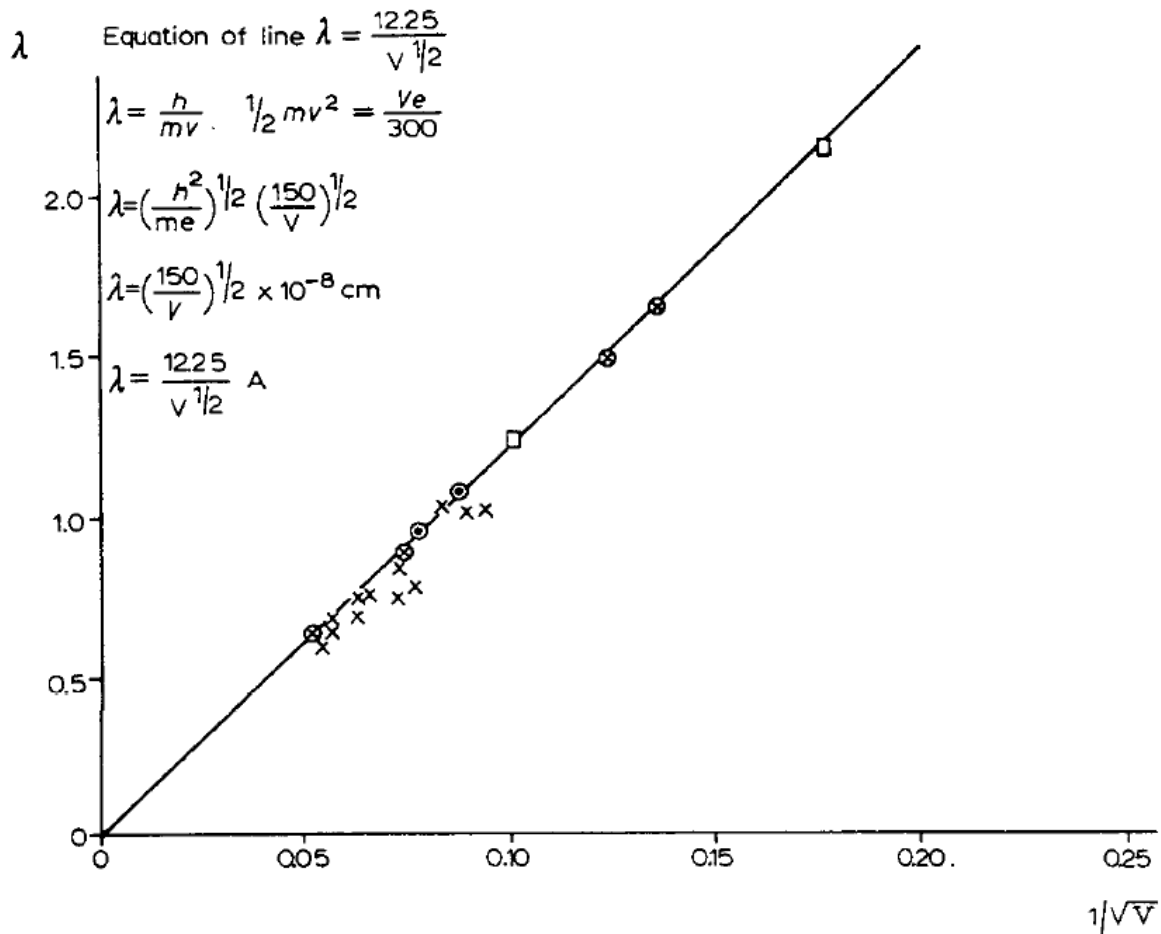


Fig. 4. Test of the de Broglie formula  $\lambda = k/p = h/mv$ . Wavelength computed from diffraction data plotted against  $1/V^{1/2}$ , ( $V$ , primary-beam voltage). For precise verification of the formula all points should fall on the line  $\lambda = 12.25/V^{1/2}$  plotted in the diagram. (x From observations with diffraction apparatus; o same, particularly reliable; □ same, grazing beams. o From observations with reflection apparatus.)

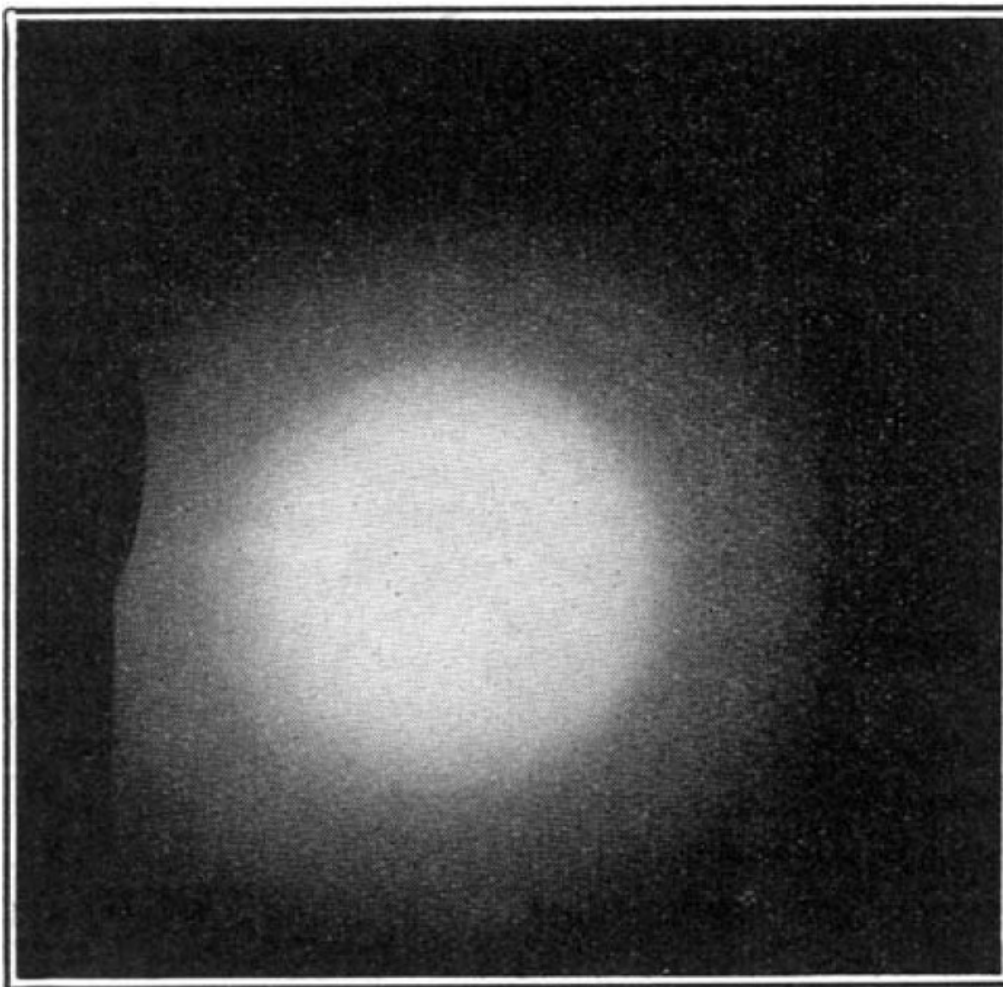
Рисунок 35: Определённая из опытов Дэвиссона и Гермера зависимость дебройлевской длины волны электрона от ускоряющего напряжения. Символами отмечены результаты различных экспериментов — теоретическая зависимость. Из нобелевской лекции [18].

Экспериментальные результаты (рисунок 35) полностью подтвердили эту модель: вычисленная из угла рассеяния длина волны де Бройля оказывается обратно пропорциональна корню из ускоряющего напряжения, а коэффициент пропорциональности соответствует постоянной Планка. За экспериментальное обнаружение дифракции электронов С.Дж.Дэвиссону была присуждена Нобелевская премия по физике 1937 года (1/2 премии). (Л.Х.Гермер участвовал только в части этой работы, из-за чего, видимо, не был включён в число лауреатов).

**Опыт Томсона.**

Другая постановка опыта по дифракции электронов была осуществлена Дж.Томсоном в Университете Абердина, в Великобритании. Интересно отметить, что Джордж Пагет Томсон был сыном другого великого английского физика и нобелевского лауреата Дж.Дж.Томсона.<sup>1</sup>

Томсон исследовал [19] прохождение катодных лучей (то есть пучка электронов) через тонкую пластинку. В его опытах использовалась целлулоидная пластинка толщиной 30 нм. На расстоянии 10 см за пластинкой ставилась фотопластинка. Целлулоидная пластинка облучалась пучком быстрых (по сравнению с опытами Дэвиссона) электронов: ускоряющая разность потенциалов составляла около 3.9 – 16.5 кВ. Прошедший пучок регистрировался фотопластинкой: помимо яркой засветки в направлении пучка возникало «гало» (рисунок 36).



*Рисунок 36: Результат первых опытов Томсона по дифракции электронов. Из статьи [19].*

Анализ этого ореола (подсчёт под микроскопом засвеченных зёрен пластинки и учёт отдельно изученной зависимости засветки пластинки от интенсивности электронного пучка) позволил Томсону выделить несколько колец (3 — 4) вокруг центрального пятна, соответствующего прямому прохождению пучка без рассеяния.

<sup>1</sup> В истории науки есть несколько примеров «семейных династий» нобелевских лауреатов. Это семейство Кюри, отец и сын Томсоны и отец и сын Бор.

Дальнейшие эксперименты [20] на других материалах позволили получить более явные изображения дифракционных колец (рисунок 37)



FIG. 4.—Gold.



FIG. 5.—Celluloid.

Рисунок 37: Дифракционные кольца в последующих опытах Томсона. Слева: на золотой фольге, справа: на целлулоиде. Из статьи [20].

Наблюдаемая дифракционная картина отличается от картины в опытах Дэвиссона и Гермера (рисунок 33). Это отличие связано с существенным различием энергии электронов в этих опытах: в опытах Дэвиссона энергия электрона составляла несколько десятков электронвольт, в то время как в опытах Томсона — около 10 кэВ. Поэтому длина волны де Бройля для электронов в опытах Томсона была меньше  $\lambda = \frac{12.25 \text{ \AA}}{\sqrt{E[\text{эВ}]}} \sim 0.1 \text{ \AA}$ . Поэтому и углы отклонения в этом опыте небольшие (напомним, что при дифракции на структуре с размером  $d$  угол отклонения  $\Theta \sim \frac{\lambda}{d}$ ). Возникновение же колец связано с наличием в исследуемых плёнках или фольгах множества разориентированных кристаллитов. Некоторые из кристаллитов оказываются повернуты так, что на них для фиксированной в эксперименте длины волны наблюдается дифракционный максимум в каком-то направлении. В силу случайности ориентаций кристаллитов найдутся кристаллиты повернутые вокруг оси падающего пучка, для которых условие дифракции также выполнено. В результате картина дифракции получается в виде семейства концентрических колец.

За эти работы по дифракции электронов Дж.П.Томсон стал вторым лауреатом Нобелевской премии по физике 1937 года (1/2 премии)

### Дифракция нейтронов.

Вкратце остановимся на дифракции нейтронов. Нейтрон, как известно, частица нейтральная, поэтому в отличие от электронов он взаимодействует не с электронными оболочками атомов,

а с ядрами (или, за счёт своего магнитного момента с магнитным моментом атома). Поэтому взаимодействие нейтронов с веществом слабее, что позволяет использовать в качестве более «щадящего» метода при исследовании структуры вещества. Кроме того, из-за большей массы нейтрона, при том же импульсе (и той же дебройлевской длине волны) энергия нейтрона почти в 2000 раз меньше энергии электрона.

Основы методики рассеяния нейтронов были разработаны Э.Волланом и К.Г.Шулом в конце 40-х годов 20 века. Развитие этой техники стало возможно благодаря появлению атомных реакторов, дающих стабильный поток нейтронов, так как из-за слабости взаимодействия нейтронов с веществом требуются потоки нейтронов большой интенсивности. В настоящее время дифракция нейтронов является одним из мощных инструментов изучения в физике твёрдого тела. К.Шулу была присуждена Нобелевская премия по физике 1994 года (1/2 премии).

Не вдаваясь в подробности метода<sup>1</sup>, приведём здесь несколько примеров нейтронных дифрактограмм из первых опытов [21].

---

1 Практическая реализация нейтронной дифракции требует достаточно сложных технических ухищрений, выходящих за рамки этого курса и относящихся скорее к темам атомной и ядерной физики. Отметим здесь лишь некоторые проблемы. Во-первых, для дифракции нужны медленные нейтроны: дебройлевская длина волны нейтрона  $\lambda_n = \frac{\hbar}{p_n} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_n E}} \approx \frac{9 \text{ \AA}}{\sqrt{E[\text{мэВ}]}}$  и длине волны в несколько ангстрем отвечает энергия нейтрона в несколько *миллиэлектронвольт*, в то время как в реакторах образуются нейтроны с энергией в десятки *мегаэлектронвольт*. Поэтому необходимо затормозить нейтроны, образующиеся в реакторе, что не так просто для нейтральной частицы. В силу всё той же нейтральности в ходе пути от реактора к исследуемому образцу и к детектору «полётом» нейтронов трудно управлять и большая часть нейтронов просто теряется (поглощается в окружающей экспериментальную установку радиационной защите). Наконец, и само детектирование нейтральной частицы сложнее, чем детектирование электронов. В результате для постановки опытов по нейтронной дифракции создаются специализированные (часто международные) научные центры, в которые для проведения исследований приезжают учёные со всего мира. Таких центров мирового уровня существует несколько десятков, примером является Институт Лауэ и Ланжевена во французском Гренобле [22].

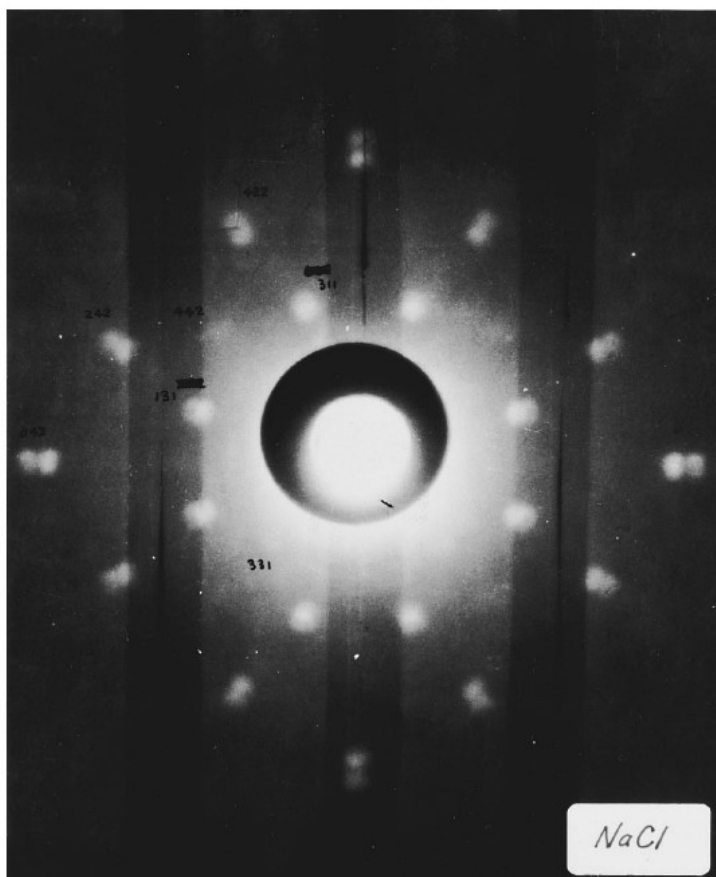


Рисунок 38: Картина дифракции монохроматических (с точно определённой энергией) нейтронов на монокристалле поваренной соли. Симметрия картины дифракционных максимумов отражает кубическую симметрию кристалла NaCl. Из статьи [21].

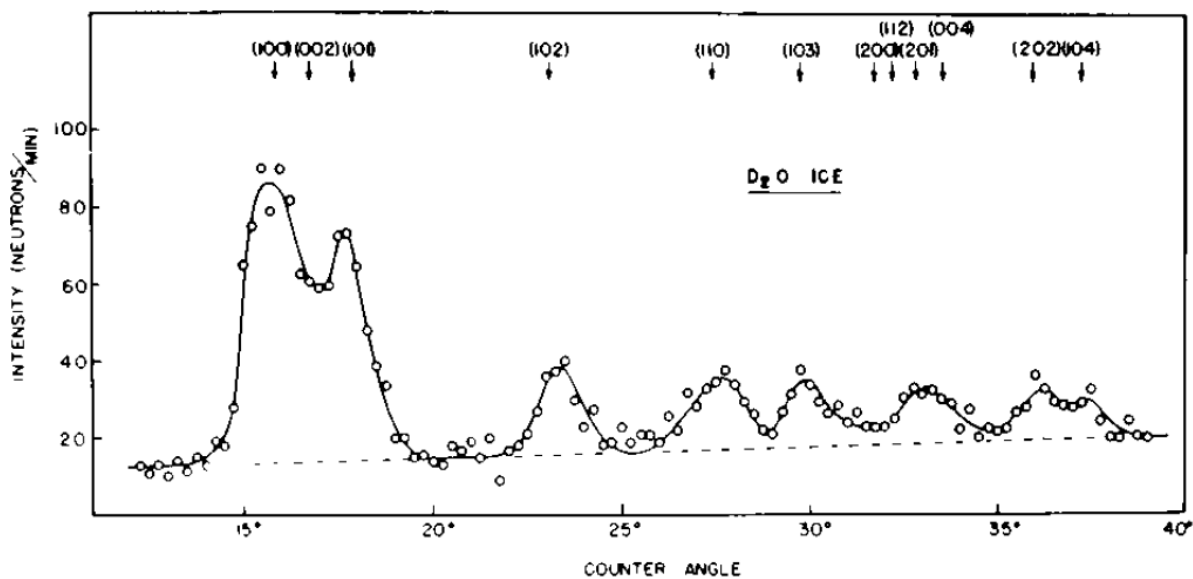


Рисунок 39: Зависимость интенсивности рассеянного пучка нейтронов от угла дифракционного отклонения для поликристалла тяжёловодного льда D<sub>2</sub>O. Из статьи [21].

## Модель атома водорода Бора-Резерфорда.

Одним из парадоксов классической физики, с которого мы начали наш рассказ была невозможность существования планетарной модели атома с точки зрения классической электродинамики. Для объяснения этого парадокса Нильс Бор предположил существование стационарных состояний электронов в атоме, как некоторое дополнительное условие. Сам Нильс Бор в каком-то смысле угадал условия, определяющие стационарные состояния электрона в атоме. Однако, условия квантования Бора естественным образом следуют из теории де Бройля. Как мы уже говорили, сам де Бройль именно этот аргумент считал главным обоснованием своей гипотезы — данные по дифракции частиц появились позже.

Итак, по гипотезе де Бройля с каждым электроном связан некоторый волновой процесс. Рассмотрим электрон, движущийся по круговой орбите. При каком условии это движение будет стабильным? С точки зрения гипотезы де Бройля ответ очевиден: если на траектории электрона уложится целое число дебройлевских волн. В этом случае возникнет стоячая волна, то есть состояние этого волнового процесса будет (в каком-то смысле) стационарным. Запишем это условие формально:

$$2\pi r_n = n\lambda = n \frac{h}{p_n}$$

$$r_n p_n = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

Далее остаётся записать механику движения электрона с зарядом  $-e$  в поле ядра с зарядом  $+Ze$  :

$$m a_u = k \frac{Ze^2}{r_n^2}$$

$$m \frac{V^2}{r_n} = k \frac{Ze^2}{r_n^2}$$

$$p_n^2 r_n = k m Ze^2$$

$$r_n = \frac{(p_n r_n)^2}{k m Ze^2} = n^2 \frac{\hbar^2}{k m Ze^2}$$

$$p_n = \frac{k m Ze^2}{n \hbar}$$

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} - k \frac{Ze^2}{r_n} = -\frac{1}{2} \frac{k^2 m Z^2 e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

Для атома водорода ( $Z=1$ ) подстановкой можно получить значения минимальной энергии и минимального радиуса траектории ( $n=1$ ):

- боровский радиус  $r_1 = 0.53 \text{ \AA}$
- энергия основного состояния (постоянная Ридберга)  $E_1 = -13.6 \text{ эВ}$  .

Отметим ещё раз, что в соответствии с уже упоминавшимся общим правилом финитное движение электронов по орбите квантуется. В модели водородоподобного атома энергия электрона принимает дискретные значения, определяемые единственным целым числом  $n$ , называемым главным квантовым числом.

Излучение и поглощение электромагнитного излучения атомом связано с переходом



электрона между некоторыми стационарными состояниями. Выделяемая или поглощаемая энергия определяется законом сохранения:

$$h \nu_{mn} = |E_m - E_n| = |E_1| \cdot \left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right|.$$

Это соотношение естественным образом объясняет появление спектральных серий.

Можно убедиться, что квантовая теория излучения атома переходит в классическую при движении электрона по далёким орбитам с большими квантовыми числами  $n$ . Напомним, что по классической теории движущийся по окружности заряд должен непрерывно излучать на частоте своего вращения. Частота вращения электрона по  $n$ -ой орбите:

$$\nu_n^{(orb)} = \frac{1}{T_n} = \frac{V_n}{2\pi r_n} = \frac{1}{2\pi m} \frac{p_n}{r_n} = \frac{1}{2\pi m} \frac{(k m Z e^2)^2}{n^3 \hbar^3} = 2 \frac{|E_1|}{h n^3}$$

Частота перехода между уровнями  $n$  и  $n-1$  при  $n \gg 1$  :

$$\nu_{n, n-1} = \frac{|E_1|}{h} \cdot \left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2} \right| = \frac{|E_1|}{h} \cdot \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} \approx 2 \frac{|E_1|}{h n^3}.$$

Получили совпадающие результаты. То есть, как и в других случаях, при переходе в область применимости классической физики, получаем результат классической физики. Это свойство типично для всякой правильно построенной научной теории: при переходе в область применения старой (менее общей) теории, новая (более общая) теория должна давать результат старой теории.

Завершая рассказ об атоме водорода отметим, что строго говоря интерпретация траектории электрона как некоторой стоячей дебройлевской волны как-то оправдана только при больших  $n$ . При больших значениях  $n$  и сам электрон можно считать относительно локализованным, что позволяет записать динамику в форме второго закона Ньютона, и нет необходимости объяснять а из-за чего собственно дебройлевской волне «захотелось» двигаться по кругу. Распространение результатов этой модели на область малых  $n$  — это, строго говоря, необоснованный оптимизм. Однако точное решение задачи об атоме водорода выходит за рамки нашего курса. Поэтому примем на веру утверждение, что оказывается, что и при малых  $n$  уровни энергии атома водорода описываются полученными нами формулами. И конечно же вспомним по традиции, что за получение только что рассмотренных нами результатов Нильс Бор был удостоен Нобелевской премии по физике 1922 года.

## Ферми- и Бозе-частицы. Принцип Паули.

Прежде чем продолжить рассмотрение строения атома необходимо рассмотреть один кажущийся на первый взгляд странным вопрос. Как мы уже неоднократно видели, в квантовой механике частицы могут стационарно существовать только в каких-то определённых состояниях (например, орбита электрона в атоме). При рассмотрении атома водорода мы рассматривали единственную частицу, которая могла занимать любое из этих стационарных состояний. Что будет если частиц несколько? Точнее, могут ли несколько частиц занимать одно квантовомеханическое состояние?

Ответ на этот вопрос в микромире оказывается неоднозначен: есть и такие частицы, которые могут находиться в одном состоянии в неограниченном количестве, и такие, которые не

могут «жить с соседями». Первый вид частиц (допускающих наличие других частиц в таком же состоянии) называют бозе-частицами или бозонами (в честь индийского физика Сатиендры Бозе, отметившего это свойство у частиц), иногда говорят, что эти частицы подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна. Второй вид частиц (не допускающих наличия других частиц в том же состоянии) называют ферми-частицами или фермионами (в честь итальянского физика Энрико Ферми), иногда о таких частицах говорят, как о частицах, подчиняющихся статистике Ферми-Дирака.

Свойство частицы быть фермионом или бозоном — это фундаментальное свойство. Оно оказывается связанным со спином частицы — собственным моментом вращения частицы. Частицы с целым (в единицах постоянной Планка  $\hbar$ ) спином являются бозонами, частицы с полуцелым спином — фермионами. В частности, спин электрона равен  $\hbar/2$ , поэтому электрон является фермионом.

Свойство фермионов «не собираться» в одном состоянии описывается так называемым принципом Паули, сформулированным Вольфгангом Паули в 1925 году. Формулировка этого принципа позволила (как мы увидим позднее) объяснить принципы устройства сложных атомов. Объяснение принципу Паули было дано в рамках релятивистской квантовой теории. За открытие этого принципа В.Паули была присуждена Нобелевская премия 1945 года.

## Момент импульса и спин.

Как мы помним, в классической механике существует три закона сохранения: закон сохранения энергии, импульса и момента импульса. Моментом импульса материальной точки называется величина  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ . При свободном вращении в классической физике момент импульса сохраняется. На этом, например основано действие гироскопов.

В квантовой физике, как мы обсуждали, законы сохранения и сохраняющиеся величины играют важную роль. Например, энергия характеризует стационарные состояния системы. Импульс определяет дебройлевскую длину волны свободно движущейся частицы. Момент импульса, как сохраняющаяся величина, тоже важен и должен иметь определённое значение. Заметим сразу, что размерность момента импульса совпадает с размерностью постоянной Планка, поэтому в квантовой механике часто используют безразмерный момент импульса, измеряемый в единицах постоянной Планка.

Однако у момента импульса есть одна особенность. Как видно из определения, он определяется произведением координат и импульсов:  $L_x = p_y z - p_z y$  и т.д. Но по принципу неопределенности Гейзенберга все проекции координаты и импульса нельзя измерить одновременно! Из-за этого оказывается невозможным измерить одновременно все три компоненты момента импульса.

Строгое рассмотрение показывает, что одновременно можно измерить длину вектора момента импульса и его проекцию на одно выбранное направление. При этом, так как вращательное движение финитно, возникают правила квантования момента импульса:

- Длина вектора момента импульса составляет целое или полуцелое число нормированных констант Планка  $\hbar$ .
- Если длина вектора момента импульса равна  $N\hbar$ , то проекция момента импульса на произвольное направление может принимать одно из следующих  $(2N+1)$  значений:  $L_z = \{-N\hbar, (-N+1)\hbar, \dots, (N-1)\hbar, N\hbar\}$ .

Кроме того, оказывается, что, помимо орбитального момента импульса, возникающего, например, при движении по круговой траектории, у всякой частицы есть собственный момент импульса — спин. Грубое представление о спине можно получить, если представить, что в каждой элементарной частице есть «встроенный волчок». Это представление, строго говоря неправильно — но оно даёт наглядную картину, применимую в достаточно широком круге задач. Строгое объяснение того, что такое спин даётся в релятивистской квантовой механике и выходит за рамки нашего курса.

## Строение атома. Периодическая таблица Д.И.Менделеева.

Модель атома водорода Бора-Резерфорда рассматривает единственный электрон. Таким образом, эта модель непосредственно применима только к атому водорода, в некоторой степени к щелочным металлам или сильно ионизированным атомам. Рассмотрение задачи о реальном атоме оказывается очень сложной и практически неразрешимой задачей многих тел (например, в атоме меди 29 электронов). Однако оказывается, что очень многое в устройстве атома можно понять оттолкнувшись от модели атома водорода. Цель этого раздела показать, как квантовая физика объясняет строение атомов и структуру таблицы Менделеева. К сожалению, при этом придётся принимать на веру некоторые положения, доказательство которых выходит за рамки нашего курса.

Как мы уже неоднократно отмечали, сохраняющиеся величины играют важную роль в квантовой физике. В частности, задание достаточно полного набора сохраняющихся величин полностью и однозначно характеризует состояние квантовомеханической системы. Для движения электрона вокруг ядра водородоподобного атома выполняются законы сохранения энергии и момента импульса. Поэтому состояние электрона характеризуется его энергией (главное квантовое число  $n$ , введённое нами при классификации уровней в атоме водорода), его орбитальным моментом импульса  $L$ , проекцией орбитального момента импульса  $L_z$  и проекцией спинового момента импульса электрона  $S_z$  на некоторую ось  $z$  (сам спин электрона неизменен и равен, в единицах постоянной Планка,  $1/2$ ).

Положения, которые нам понадобятся в дальнейшем рассуждении, которые мы примем без доказательства:

1. Точное решение задачи об уровнях энергии электрона в водородоподобном атоме приводит к тому же результату, что и модель Бора. Энергия определяется только главным квантовым числом  $n$ .
2. В состоянии с главным квантовым числом  $n$  орбитальное квантовое число  $L$  (момент импульса в единицах постоянной Планка «с чертой»  $\hbar$ ) может принимать целые значения  $L \leq n-1$ .
3. Правило квантования проекции орбитального момента импульса приводит к тому, что квантовое число  $L_z$  принимает значения:  $L_z = \{-L, (-L+1), \dots, (L-1), L\}$
4. Электрон подчиняется статистике Ферми-Дирака, два электрона не могут занимать одно состояние.

А теперь возьмём ядро с произвольным зарядом  $+Ze$  и начнём по одному добавлять электроны, стараясь создать конфигурацию с наименьшей энергией. Первый электрон, конечно, занимает состояние с самой низкой энергией и  $n=1$ . Получили атом водорода (пока ничего нового).

Добавляем теперь второй электрон. Второй электрон не может занять то же состояние, что и

первый, из-за запрета Паули. Сколько всего состояний с  $n=1$ ? Возможные значения орбитального квантового числа  $L \leq n-1=0$  – то есть орбитальный момент равен нулю, первое энергетическое состояние электрона сферически симметрично. Проекция момента при  $L=0$  принимает единственное значение  $L_z=0$ , так что квантовые числа орбитального момента и его проекции не добавляют нам свободы для создания нового состояния. А вот по проекции спина есть два варианта  $S_z=+1/2$  и  $S_z=-1/2$  (в единицах постоянной Планка  $\hbar$ ). Таким образом для второго электрона найдётся место на уровне с  $n=1$ . Получим атом гелия с двумя электронами на сферической 1s-оболочке. При этом больше состояний с главным квантовым числом  $n=1$  нет и последующие электроны должны будут занимать состояния с  $n=2$  и так далее.

Добавляем третий электрон. С третьего электрона начинается заполнение уровня с  $n=2$ . На уровне с  $n=2$  для орбитального квантового числа  $L$  получаем условие  $L \leq n-1=1$ . То есть возможны сферически симметричные состояния электронов с  $L=0$  и несимметричные состояния с  $L=1$ . Причём в состоянии с  $L=1$  возможно три значения проекции момента импульса:  $L_z=\{-1,0,1\}$ . И наконец, каждое из этих состояний делится ещё на два, в зависимости от проекции спина электрона. Итого, с  $n=2$  возможно  $2+3 \cdot 2=8$  электронных состояний, из них два — это симметричные s-состояния, а шесть — несимметричные p-состояния<sup>1</sup>. Порядок заполнения этих состояний определятся уже энергией взаимодействия электронов между собой, в модели атома водорода все они имеют одну энергию. С учётом взаимодействия, энергия 2s состояний оказывается ниже энергии 2p состояний. Таким образом, добавляя третий, четвёртый и так далее до десятого электрон мы получим электронные конфигурации восьми атомов второго периода с лития до неона.

При дальнейшем добавлении электронов начнут заполняться оболочки с  $n=3$ . Повторяя наши рассуждения можно показать, что для  $n=3$  возможны следующие состояния:

- два сферически симметричных 3s состояния.
- шесть несимметричных 3p состояний с  $L=1$
- десять несимметричных 3d состояний с  $L=2$ .

Из-за эффектов взаимодействия электронов энергия 3d состояния оказывается выше чем энергия 4s состояния. Поэтому в третьем периоде таблицы Менделеева также 8 элементов: с натрия по аргон.

Дальнейшее увеличение числа электронов приводит к состояниям с главным квантовым числом  $n=4$  и открывает четвёртый период таблицы Менделеева. Опять повторяя наши рассуждения мы можем указать количество состояний с различными значениями орбитального квантового числа:

- $L=0$ , два 4s электрона
- $L=1$ , шесть 4p электронов
- $L=2$ , десять 4d электронов
- $L=3$ , четырнадцать 4f электронов

<sup>1</sup> По сложившейся традиции для обозначения уровней электрона в атоме используют латинские буквы, соответствующие значению орбитального квантового числа в этом состоянии. Значениям  $L=0,1,2,3,4$  отвечают обозначения  $s, p, d, f$ , соответственно.

Как и в предыдущем случае, порядок заполнения уровней энергии определяется поправками, связанными с взаимодействием. 3d уровни оказываются расположенными по энергии между 4s и 4p уровнями. Причём в некоторых случаях заполнение уже происходит не последовательно:  ${}_{21}\text{Sc}(4s^23d^1)$ ,  ${}_{22}\text{Ti}(4s^23d^2)$ ,  ${}_{23}\text{V}(4s^23d^3)$ ,  ${}_{24}\text{Cr}(4s^13d^5)$ ,  ${}_{25}\text{Mn}(4s^23d^5)$ . 4d уровни оказываются по энергии выше 5s уровней, а 4f – выше чем 6s. Заметим однако, что за счёт 3d элементов четвёртый период стал длиннее на 10 элементов. А 4f элементы образуют ряд лантаноидов, в котором всего 14 элементов.

Вывод, который мы можем сделать по результатам этого анализа: хотя некоторые детали (поправка к уровням энергии связанная с взаимодействием электронов) требуют отдельных, иногда практически очень сложных если не невозможных расчётов, квантовая теория даёт последовательное объяснение, как устройству атома, так и устройству периодической таблицы элементов. В частности, длины периодов, длины групп лантаноидов и актиноидов естественным образом следуют из формализма квантовой теории.

## Различные квантовые эффекты.

Цель данного раздела — показать ряд примеров, в которых квантовые свойства оказываются определяющими для различных физических систем. Эти примеры показывают, что проявления квантовых свойств весьма разнообразны и наш мир действительно живёт по кажущимся иногда необычным (и даже «странным») законам квантовой механики. Однако здесь необходимо ещё раз напомнить, что эта кажущаяся «странность» является следствием того, что наш жизненный опыт формируется в основном классическими (не квантовыми) явлениями.

### **Ферми-газ в металле.**

В качестве первого примера рассмотрим как устроено состояние электронов в металле — в обычном проводнике при комнатной температуре, каковые постоянно окружают нас в современном мире. Нам знакомо из классической теории электричества представление о проводнике, как о материале в котором электроны оказываются не связанными с ионами. Такие электроны называют делокализованными или свободными. Если пренебречь взаимодействием электронов<sup>1</sup>, то такие классические электроны образуют внутри металла одноатомный идеальный газ. При классическом рассмотрении (например при выводе закона Ома для металла) электроны считаются классическими частицами, движущимися под влиянием приложенного электрического поля по классическим законам Ньютона.

Однако такой классический подход заведомо не верен. Во-первых, такой «одноатомный идеальный газ» свободных электронов должен давать дополнительно вклад в теплоёмкость

$\frac{3}{2}R$  (помимо вклада от колебаний решётки равного при высоких температурах  $3R$ ), что

привело бы к заметному нарушению закона Дюлонга и Пти (а, как мы уже видели, закон Дюлонга и Пти выполняется при комнатной температуре для типичных металлов, таких как медь). Во-вторых, при понижении температуры такие классические электроны должны все оказаться в одном и том же состоянии с минимальной энергией, что противоречит принципу Паули (напомним, что, являясь ферми-частицами, два электрона не могут занимать одно

1 Возможность пренебречь взаимодействием электронов связана с тем, что положительно заряженный ионный остов точно компенсирует заряд всех электронов и, как говорят, экранирует электроны. Точное доказательство выходит за рамки курса, но может быть найдено в многочисленных учебниках, например [23].

квантовомеханическое состояние).

Чтобы понять, как устроены состояния электронов в металле положим температуру равной  $0K$  и удалим все свободные электроны из металла. После этого начнём добавлять их по одному к оставшемуся ионному остову. Взаимодействие электронов друг с другом учитывать не будем.

Первый электрон займёт самое выгодное по энергии состояние. Второй электрон сможет занять то же состояние, но с противоположным спином (аналогично заполнению  $1s$  орбитали). Следующий электрон займёт следующее состояние, уже с энергией выше минимальной. И так далее, будем продолжать этот процесс пока не все электроны не вернуться в металл.

Как охарактеризовать состояние электрона в металле? Будем рассматривать объем металла достаточно большой, чтобы считать электрон движущимся далеко от границ. Движение частицы можно охарактеризовать её импульсом  $\vec{p}$ . Соответственно, и энергия электрона зависит только от его импульса (взаимодействием электронов мы пренебрегли). Если пренебречь анизотропией кристалла, то энергия электрона  $E(\vec{p}) = \frac{p^2}{2m}$  зависит только от модуля импульса, а не от его направления. При этом по принципу неопределённости Гейзенберга частица с точно определённым импульсом совершенно делокализована.

Пусть  $L_x$  характерный размер нашего объёма металла в направлении  $X$ . Неопределённость координаты электрона, находящегося где-то *внутри* металла, очевидно равна  $L_x$ . По соотношению неопределённости с этим связана неопределённость импульса  $\Delta p_x L_x \simeq h$ . Аналогичное равенство можно записать и для неопределённости других компонент импульса. Отметим, что состояния с импульсами отличающимися меньше чем на  $\Delta p_{x,y,z}$  *в принципе* невозможно различить, а значит эти состояния должны трактоваться как одно состояние с точки зрения запрета Паули. Объединяя соотношения неопределённости, записанные для всех трёх компонент, получаем, что на одно состояние приходится в «пространстве импульсов» (в координатах  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ ) элемент пространства величиной  $\Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z \simeq \frac{h^3}{L_x L_y L_z} = \frac{h^3}{V}$  (здесь  $V$  — объем нашего металла)<sup>1</sup>.

Пусть нам надо распределить  $N$  электронов по состояниям с тем, чтобы полная энергии была минимальна. По приведённому алгоритму размещения, занятые состояния электронов будут иметь форму шара в пространстве импульсов (трёхмерном пространстве, в котором по осям откладываются соответствующие проекции импульсов). Радиус этого шара называется импульсом Ферми  $p_F$ , а энергия соответствующая поверхности шара (поверхности Ферми) — энергией Ферми  $E_F$ . Для импульса Ферми можно написать:

$$2 \frac{4\pi}{3} p_F^3 = N \frac{h^3}{V} = n h^3$$

здесь  $n$  — концентрация электронов, множитель «2» в левой части выражает наличие у электрона двух состояний с разной проекцией спина. Равенство связывает объем сферы радиуса  $p_F$  в пространстве импульсов с  $N$  объёмами приходящимися на одно состояние.

<sup>1</sup> Отметим, что наши рассуждения здесь не строгие, однако полученный ответ оказывается совпадающим с точным ответом.

Отсюда  $p_F = \hbar \sqrt[3]{\frac{3n}{8\pi}} = \hbar (3\pi^2 n)^{1/3}$ , а энергия Ферми  $E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$ .

Оценим величину энергии Ферми для типичного металла с кубической решеткой с периодом  $2\text{Å}$ , в котором каждый атом отдаёт один электрон в газ свободных электронов. Тогда концентрация электронов  $n \approx 10^{29} \text{ м}^{-3}$ . Подставляя значения фундаментальных констант получаем, что типичная энергия Ферми соответствует температуре

$$T_F = \frac{E_F}{k} = \frac{10^{-68} \cdot 2 \cdot 10^{20}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}} \sim 0.08 \cdot 10^6 = 80000 \text{ (K)}$$

В реальных металлах масштаб энергии Ферми составляет несколько электрон-вольт (данные таблицы ниже взяты из книги [23])

Валентность	Металл	Концентрация электронов $n$ , $\text{м}^{-3}$	Скорость Ферми, $V_F$ , $\text{м/с}$	Энергия Ферми, $E_F$ , эВ	Температура Ферми, $T_F = E_F/k_B$ , К
1	Li	$4.7 \cdot 10^{28}$	$1.29 \cdot 10^6$	4.72	54800
	Na	$2.65 \cdot 10^{28}$	$1.07 \cdot 10^6$	3.23	37500
	K	$1.4 \cdot 10^{28}$	$0.86 \cdot 10^6$	2.12	24600
	Ag	$5.85 \cdot 10^{28}$	$1.39 \cdot 10^6$	5.48	63600
	Au	$5.90 \cdot 10^{28}$	$1.39 \cdot 10^6$	5.51	63900
	Cu	$8.45 \cdot 10^{28}$	$1.57 \cdot 10^6$	7.00	81200
2	Zn	$13.10 \cdot 10^{28}$	$1.82 \cdot 10^6$	9.39	109000
3	Al	$18.06 \cdot 10^{28}$	$2.02 \cdot 10^6$	11.63	134900
4	Pb	$13.20 \cdot 10^{28}$	$1.82 \cdot 10^6$	9.37	108700

Понятие энергии Ферми или поверхности Ферми (поверхность шара в пространстве импульсов, ограничивающего занимаемые электронами состояния при  $T=0$ ) не является математической абстракцией. Для многих физических процессов важны только электроны вблизи поверхности Ферми. Эти электроны обладают одним важным свойством: их энергию можно изменить на небольшую величину. Это утверждение может показаться нелепым с точки зрения «здравого смысла», но не надо забывать про действующий для электронов принцип Паули: из-за него при передаче энергии мы должны учитывать *свободно ли* электронное состояние, в которое электрон перейдёт получив эту порцию. Очень грубо можно сравнить эту ситуацию с переполненным автобусом в час пик: на остановке как-то «изменить своё состояние» могут только пассажиры вблизи дверей (они могут выйти, так как за дверями для них есть «свободные состояния»), а вот пассажир, зажатый в центре такого автобуса, несмотря на все усилия и на всю затраченную энергию остаётся внутри автобуса, так как вокруг него «свободных состояний» нет и он просто не может сместиться к выходу.

Как и в разобранных ранее случаях теплоёмкости гармонического осциллятора или вращательных степеней свободы температура Ферми задаёт масштаб температур ниже которых классическое рассмотрение газа электронов невозможно. При конечной температуре характерный масштаб излишка энергии, который может получить частица в результате взаимодействия со своим окружением это величина порядка  $k_B T$ , но как видно из приведённой выше таблицы любая разумная температура (даже температура плавления

металла) будет много меньше температуры Ферми. Таким образом, во всех процессах взаимодействия свободных электронов металла друг с другом или с колебаниями решётки может участвовать только небольшая доля частиц, энергия которых меньше энергии Ферми на величину порядка  $k_B T$ . В рамках грубой аналогии с автобусом, эти электроны оказываются «вблизи двери». Число таких частиц легко оценить по отношению объёма

поверхностного слоя ферми-сферы к её полному объёму:  $\frac{\delta N}{N} \simeq \frac{4\pi p_F^2 \delta p}{\frac{4}{3}\pi p_F^3} = 3 \frac{\delta p}{p_F}$ , где  $\delta p$

обозначает изменение импульса, соответствующее изменению энергии на  $k_B T$ .

Очевидно<sup>1</sup>, что  $\frac{\delta p}{p_F} = \frac{1}{2} \frac{\delta E}{E_F} = \frac{1}{2} \frac{k_B T}{E_F}$ . Окончательно, отбрасывая множители являющиеся

превышением точности,  $\frac{\delta N}{N} \simeq \frac{k_B T}{E_F}$ . При комнатной температуре менее 1% электронов

металла участвуют в каких-то тепловых формах обмена энергией. Это сразу объясняет, почему «идеальный газ свободных электронов» не даёт вклада в теплоёмкость металла —

ожидаемый вклад  $\frac{3}{2} k_B$  относится только к этим электронам «у дверей автобуса», а их

число настолько мало, что с точностью закона Дюлонга и Пти мы этого вклада просто не замечаем. Таким образом, обычный кусок провода оказывается по сути своей квантовым объектом, некоторые свойства которого определяются именно поверхностью Ферми.

Изучение различных физических процессов, позволяет непосредственно определить величину энергии Ферми, а также форму поверхности Ферми (что является нетривиальной задачей в достаточно сложных анизотропных кристаллах).

Обратите внимание, что даже при абсолютном нуле из-за действия запрета Паули в металле оказывается множество электронов с энергиями, соответствующими температуре в десятки и сотни тысяч градусов Кельвина! Эти электроны движутся со скоростями порядка тысячи километров в секунду! При этом это движение не является тепловой формой движения — это проявление квантовых свойств ферми-частиц. Тепловое движение для электронов в металле проявляется в том, что некоторые электроны могут случайно иметь энергию чуть выше энергии Ферми, так что при конечной температуре граница Ферми-сферы в импульсном пространстве окажется немножко размыта.

### **Гиромагнитное отношение свободного электрона.**

Интересно отметить одно явление, которое связано с релятивистской квантовой теорией и является одним из самых точных примеров согласия теории и эксперимента, известных в науке.

Сначала рассмотрим одну классическую задачу. Пусть заряженная частица массы  $m$  и зарядом  $q$  движется по круговой орбите радиуса  $r$  с угловой скоростью  $\omega$ . Момент импульса, возникающий при этом вращении равен  $L = m \omega r^2$ , а магнитный момент (связанный с круговым током, которым является движущаяся заряженная частица)

$M = q \omega r^2 / 2$ . Таким образом, отношение магнитного момента к механическому оказывается константой, определяемой только массой частицы и её зарядом, но не

---

<sup>1</sup>  $E = \frac{p^2}{2m}$ , откуда  $\ln E = 2 \ln p + const$ , откуда дифференцированием получаем требуемое.



параметрами движения:

$$\gamma_0 = \frac{M}{L} = \frac{1}{2} \frac{q}{m} .$$

Существование связи между магнитным и механическим моментом проявляется в известных эффекте Эйнштейна — де Гааза и эффекте Барнетта, когда при намагничивании тела возникает его вращение или наоборот.

Для элементарных частиц помимо орбитального момента вращения (связанного с таким классическим движением по орбите), существует ещё и собственный момент вращения — спин. С ним связан и собственный магнитный момент — что довольно естественно, так как мы показали, что гиромагнитное отношение не зависит от параметров движения частицы.

Однако оказалось, что для электрона спиновое гиромагнитное отношение примерно вдвое больше полученного нами классического результата:  $\frac{\gamma_s}{\gamma_0} = 2$  . Это было объяснено только в релятивистской квантовой теории (следует из уравнения Дирака).

Но точные измерения гиромагнитного отношения электрона показали, что есть небольшое отличие (0.1%) от этого предсказания теории. Это отличие было названо аномальным магнитным моментом электрона и составило ([24], данные на 2007 год):

$$\left( \frac{\gamma_s}{2 \gamma_0} \right)_{\text{эксп}} = 1.001\,159\,652\,180\,85(76)$$

С экспериментальной точки зрения — это одна из самых точно измеренных величин. Квантовая электродинамика (релятивистская квантовая теория) объясняет это малое отличие и, более того, в состоянии вычислить его (выразив через мировые константы) с выписанной точностью — более десяти знаков после запятой!

Подробное обсуждение этого результата выходит за рамки нашего курса. Отметим лишь, что отличие связано с устройством физического вакуума, в котором по современным представлениям постоянно рождаются и пропадают так называемые «виртуальные» пары частица-античастица: в первую очередь фотоны и электрон-позитронные пары. Взаимодействие электрона с виртуальными фотонами является основной причиной наблюдаемого аномального значения магнитного момента электрона.

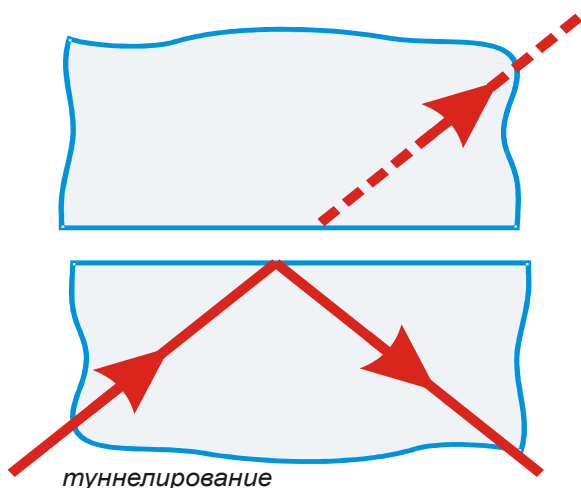
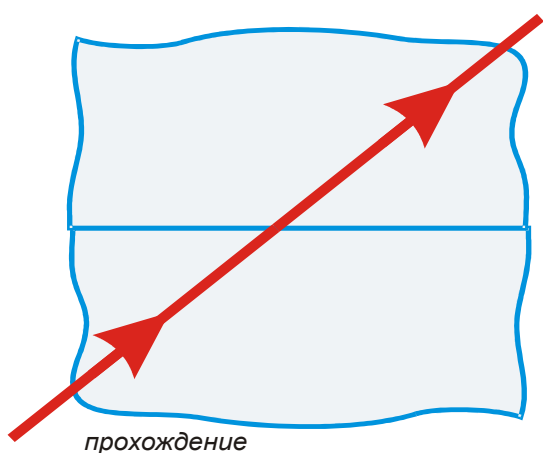
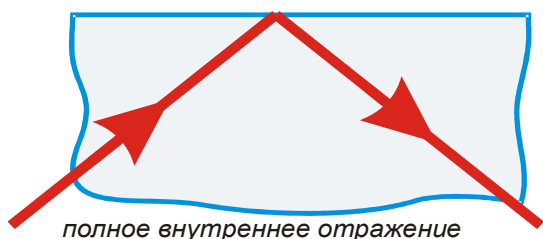
**Туннельный эффект.**

Рисунок 40: Схема туннелирования электромагнитных волн в оптике.

Волновые свойства частиц проявляются в одном необычном эффекте, не имеющем аналогов в классической механике — туннельном эффекте. Чтобы показать, что этот эффект является проявлением именно волновых свойств, рассмотрим пример из оптики (рисунок 40).

Пусть луч света падает на границу раздела стекло-воздух со стороны стекла так, что наблюдается полное внутреннее отражение. Возьмём другую стеклянную пластину с тем же показателем преломления и приложим её плотно к первой. При этом граница раздела пропадает и луч начинает проходить во вторую пластину полностью. Что будет, если между пластинами останется небольшой воздушный зазор? В рамках геометрической оптики кажется, что сколь угодно малый зазор будет приводить к сценарию полного внутреннего отражения. Это кажется физически неправильным, так как возникает резкое изменение поведения луча (всегда *полностью* отражается или проходит) при плавном изменении расстояния между пластинами.

Волновая оптика разрешает вопрос более удовлетворительно: при рассмотрении задачи о распространении электромагнитной волны падающей на границу двух сред в условиях полного внутреннего отражения оказывается, что после отражения возникают *распространяющаяся* вглубь более оптически плотной среды (стекла) отражённая волна и *затухающая* вглубь менее оптически плотной среды прошедшая (преломлённая) волна.

Интенсивность прошедшей волны затухает экспоненциально по мере удаления от границы раздела, поэтому достаточно удалённый наблюдатель её не видит. Но существование такой волны необходимо, так как невозможно по уравнениям

электродинамики (по физической природе электромагнитного поля), чтобы с одной стороны

нейтральной границы раздела электромагнитное поле присутствовало, а с другой — отсутствовало.

При поднесении второй пластины достаточно близко эта затухающая прошедшая волна проникает вглубь второй пластины (по тем же соображениям непрерывности поля). Но в глубине второй пластины волна оказывается в условиях, в которых она может распространяться без затухания — и, следовательно, превращается в нормальную незатухающую электромагнитную волну. (В этом также можно убедиться обратив ход световых лучей в этих рассуждениях.).

Таким образом, во второй пластине возникает луч света, являющийся продолжением луча света в первой пластине но «отсутствующий» в зазоре между пластинами. Часть первичного луча по прежнему испытывает полное отражение на границе раздела сред, а часть «туннелирует» через зазор во вторую пластину.

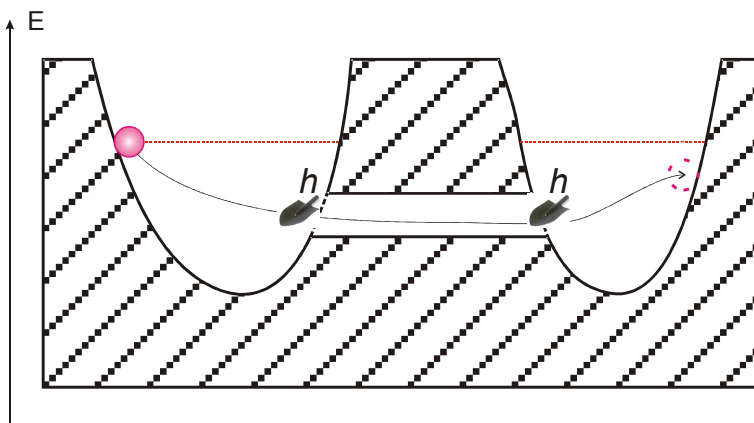
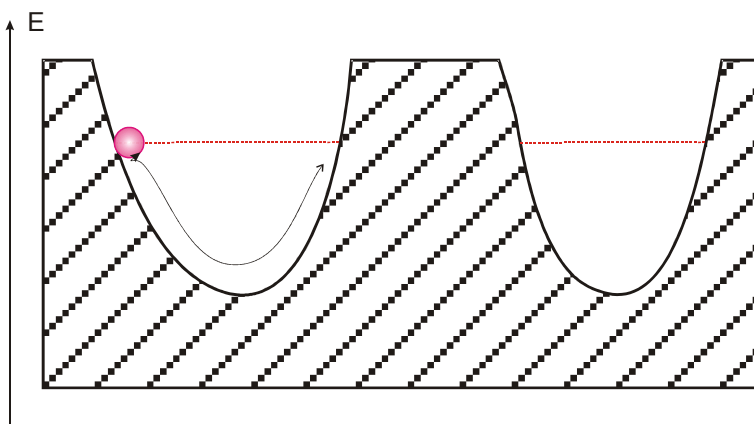


Рисунок 41: Схематическое изображение туннелирования между состояниями. Верхний рисунок: две классических потенциальных ямы. Нижний рисунок: проникновение частицы во вторую яму за счёт квантового туннелирования.

В квантовой механике то же самое может происходить и с частицами. Модельный случай показан на рисунке. Пусть есть две рядом расположенные так называемые «потенциальные ямы» - области пространства, где потенциальная энергия ниже чем в окружающем пространстве. Примером такой «классической» ямы являются две вырытые рядом ямки в земле.

В классической механике, если энергия частицы меньше глубины ямы, то частица навсегда останется в той же яме, где она была изначально.

В квантовой же механике дебройлевские волны частицы распространяются, затухая, и в те области пространства, где классическая частица с такой энергией присутствовать не может. Если вторая яма достаточно близко, то появляется некоторая вероятность обнаружить частицу во второй яме. При этом частица не «перепрыгивает» через барьер, разделяющий ямы —

такой энергией она не обладает. За счёт квантовых эффектов частица как бы «строит себе туннель» под барьером. Поэтому этот эффект называют туннелированием (рисунок 41).

Эффект туннелирования проявляется во многих физических явлениях. Одним из наиболее

ярких его проявлений является работа туннельного микроскопа [25]. За его изобретение К.Бинниг и Г.Рорер были удостоены Нобелевской премии по физике 1986 года. Принципиальная схема микроскопа показана на рисунке (рисунок 42). Таким микроскопом можно исследовать только проводящие поверхности. Чувствительным элементом микроскопа является специально изготовленная игла, настолько тонкая и острая, что можно считать что на вершине её острия находится единственный атом<sup>1</sup>. Эта игла подводится к исследуемой поверхности на расстояние несколько ангстрем. Электроны проводимости могут находиться либо в исследуемом материале, либо в игле, а вот находиться в зазоре между иглой и поверхностью им не выгодно. Этот зазор и играет роль потенциального барьера. Однако есть вероятность туннелирования электрона из иглы в исследуемый материал, что приводит к возникновению слабого туннельного тока. Величина этого тока сильно зависит от расстояния между иглой и поверхностью, что позволяет отслеживать на поверхности неровности атомного масштаба — то есть получать изображение поверхности с атомным разрешением!

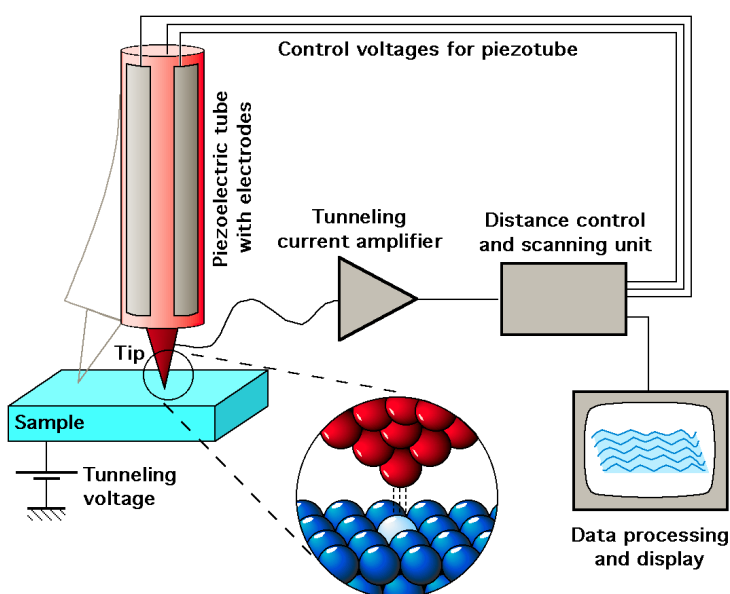


Рисунок 42: Схема устройства сканирующего туннельного микроскопа. С сайта [25].

Строго говоря, изображения в том смысле как «оптическое изображение» туннельный микроскоп не даёт. Перемещая при помощи пьезоэлементов иголку вдоль поверхности (что тоже оказывается возможным делать с атомной точностью!), по величине туннельного тока<sup>2</sup> можно построить «карту высот» поверхности, по которой далее с помощью компьютера получают рисунок поверхности с атомным разрешением. Так что разница между изображением в оптическом микроскопе и картинкой, полученной на туннельном микроскопе примерно та же, как разница между спутниковой фотографией и топографической

картой местности, полученной по результатам серии измерений с теодолитом.

Чувствительный элемент туннельного микроскопа (иголка и пьезодвижители) очень мал (рисунок 43). Однако дополнительные системы: система высокого вакуума, необходимая для поддержания чистоты поверхности, криостат, насосы и другое оборудование делают

- 1 Для прецизионных измерений такой остроты иглы добиваются сочетанием различных методов (травлением, литографическими методами и так далее. Однако для рутинных измерений иногда оказывается достаточно просто отрезать тонкую (несколько десятков микрон) проволоку обычными ножницами: в большинстве случаев один из атомов иголки оказывается ближе остальных к поверхности и основной туннельный ток идёт именно через него.
- 2 Обычно для исключения точно неизвестной зависимости туннельного тока от расстояния (она, например, зависит от точной формы иглы) электронику микроскопа настраивают так, что игла перемещается не только вдоль поверхности, но и в поперечном направлении так, что туннельный ток поддерживается постоянным. В этих условиях можно считать, что расстояние от иглы до поверхности всегда остаётся постоянным и, таким образом, управляющий сигнал, перемещающий иглу к поверхности или от поверхности и является непосредственно желаемой «картой высот».

туннельный микроскоп достаточно большим прибором. Примеры реальных туннельных микроскопов в большом количестве есть в Интернете, например, сайты [26] и [27].

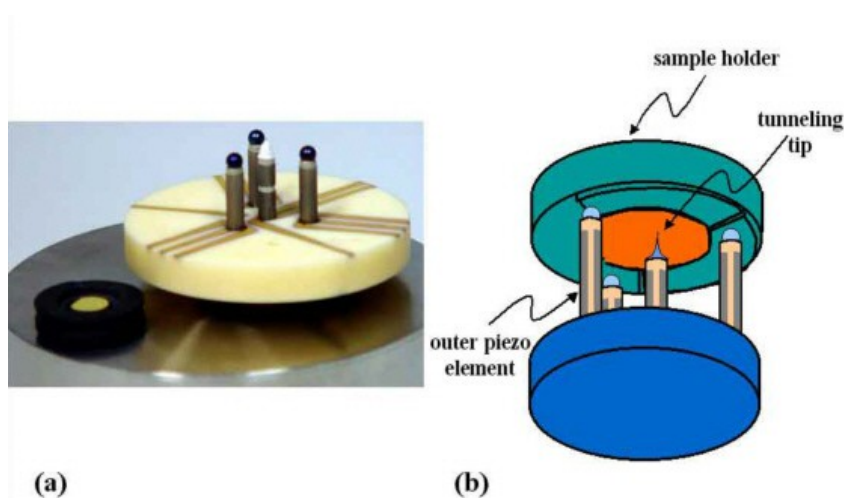


Рисунок 43: Чувствительный элемент сканирующего туннельного микроскопа. Образец кладётся сверху. Столбики изготовлены из пьезокерамики, три внешних столбика обеспечивают перемещение образца относительно иглы, а центральный контролирует положение иглы. С сайта [26].

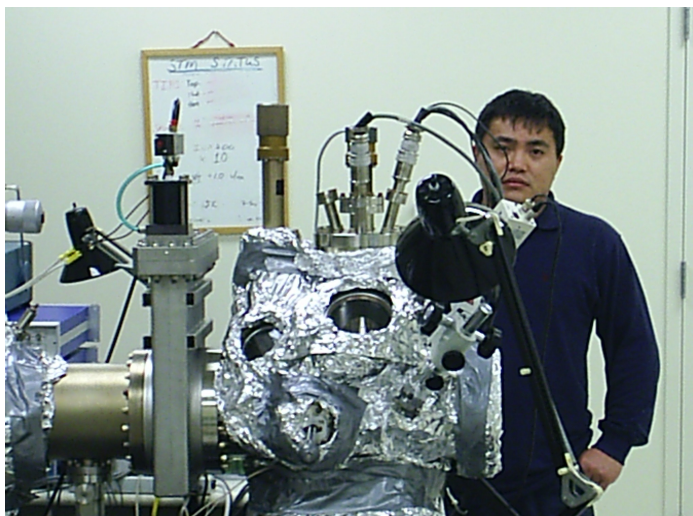
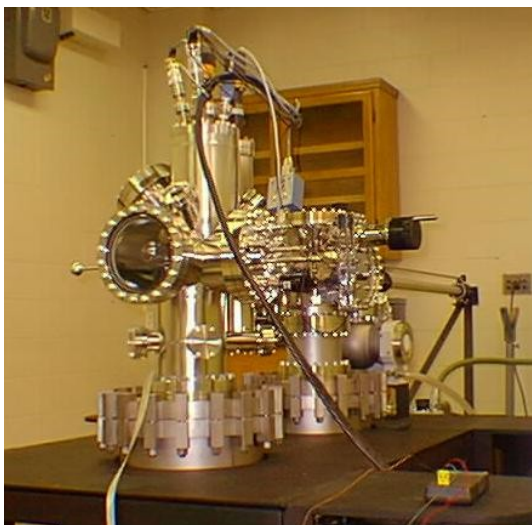


Рисунок 44 Внешний вид реального сканирующего туннельного микроскопа. С сайта [27].

Приведём в заключение несколько красивых примеров изображений, полученных с помощью туннельного микроскопа (рисунки 45, 46, 47, 48, 49, 50) [28]. Отметим во избежание недоразумений, что цветовая гамма этих изображений — это условная раскраска «карты высот», полученной туннельным микроскопом.



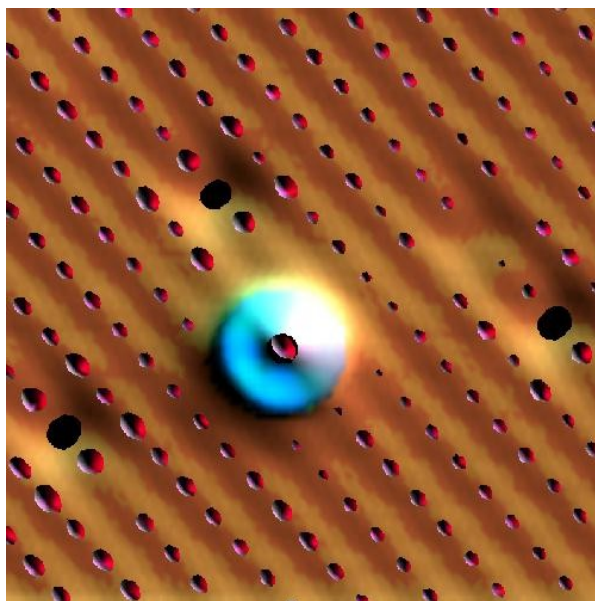


Рисунок 45: Атом ксенона на поверхности кристалла никеля. С сайта [28].

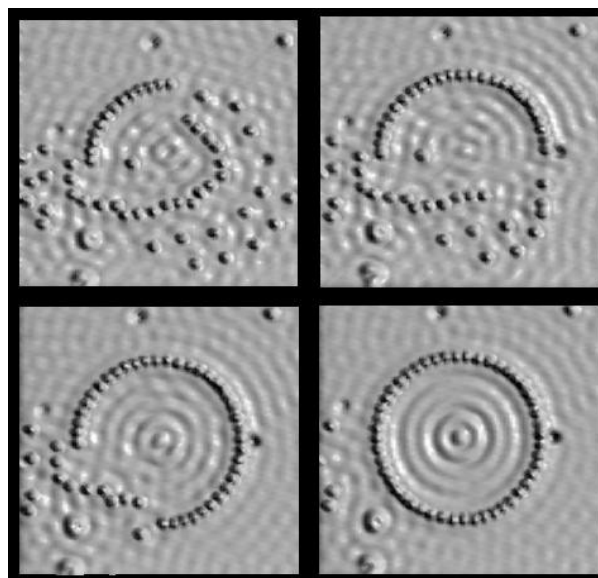


Рисунок 46 Искусственно сделанное кольцо из атомов железа на поверхности меди. Показано несколько этапов создания. Для передвижения атомов по поверхности использовалась игла туннельного микроскопа, «толкающая» атом. С сайта [28].

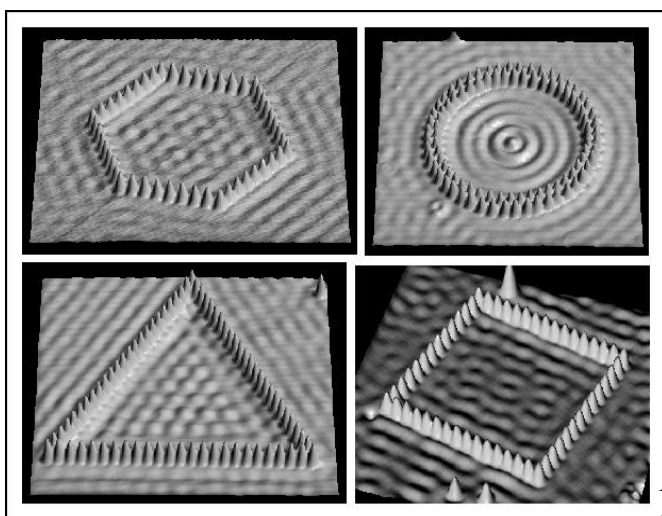


Рисунок 47: Фигуры, «собранные» из атомов железа на поверхности меди. «Волны» внутри фигур связаны с модуляцией электронной плотности в меди под действием примесей на поверхности. С сайта [28].

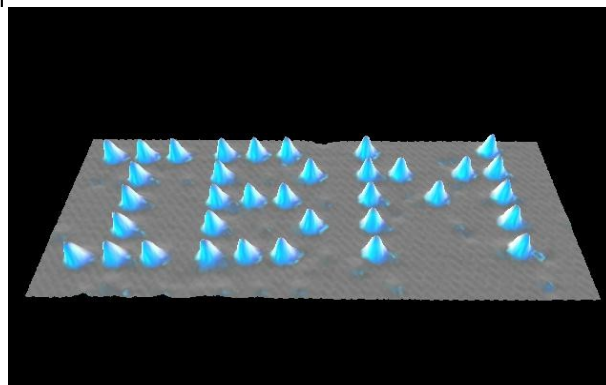


Рисунок 48: Логотип IBM из атомов ксенона на поверхности никеля. С сайта [28].

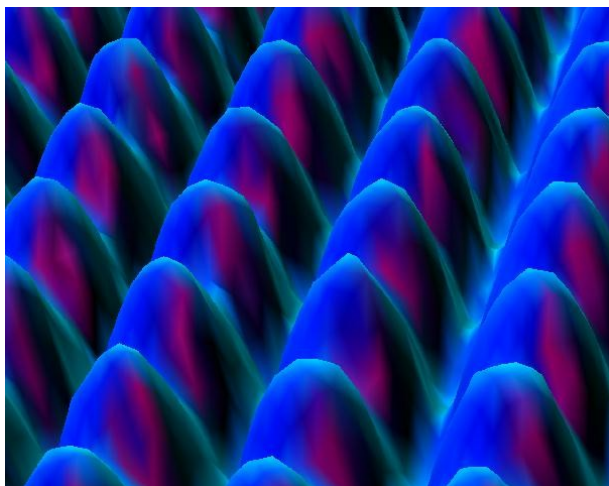


Рисунок 49: Поверхность кристалла никеля с атомным разрешением. С сайта [28].

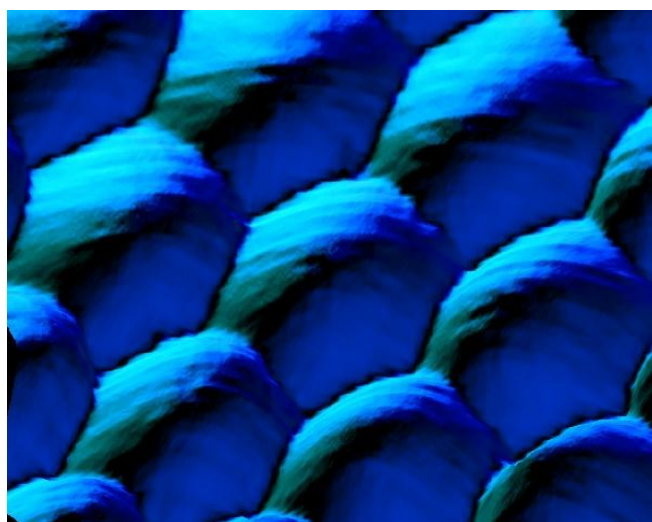


Рисунок 50: Поверхность кристалла платины с атомным разрешением. С сайта [28].

### **Квантовая «телепортация».**

На рубеже 20 и 21 веков (1994-2004 года) в физике было экспериментально реализовано одно интересное явление, которое назвали телепортацией. Статьи об этом явлении были опубликованы не только в научных, но и в популярных журналах, информация об этих опытах появлялась и в средствах массовой информации. Рассмотрим вкратце в чём заключается это явление.

В основе этого явления лежит не имеющее аналога в классической механике понятия связанного (или квантово-запутанного) состояния двух частиц. Это состояние можно реализовать, например, когда в ходе какого-то физического процесса рождается пара частиц (пара электрон-позитрон, например). При этом законы сохранения для всего процесса определяют некоторую суммарную характеристику этих частиц (например, полный спин пары равен нулю), но никак не определяют соответствующую характеристику индивидуальных частиц. Таким образом может образоваться разделённая в пространстве пара частиц, про которые, например, известно, что их полный спин равен нулю, но их индивидуальные спины ориентированы неизвестным нам образом.

Эта модель была впервые предложена А.Эйнштейном с соавторами (Подольский и Розен) в 1935 году для критики квантовой механики. Критическое замечание (так называемый парадокс Эйнштейна-Подольского-Розена) заключалось в том, что получив такую пару и измерив точную ориентацию спина одной частицы мы тут же узнаем *и зададим* ориентацию спина другой частицы, никак не измеряя её состояние, что, казалось бы, открывает потенциальную возможность обойти принцип неопределённости. Причём эта «передача информации» произойдёт мгновенно, несмотря на разделяющее частицы расстояние. Сам Эйнштейн (который, как широко известно, считал квантовую механику не окончательной формой записи законов микромира) считал, что в этой теории есть некоторые «скрытые переменные», понимание которых может вернуть детерминизм в физику микромира. Эта идея Эйнштейна, однако, не нашла подтверждения — современное понимание (подкреплённое как теорией так и экспериментом) показывает, что вероятностное описание микромира верно, а вот все теории «скрытых переменных» нет. Формализм квантовой

механики исчерпывающе объясняет этот парадокс. Сверхсветовой передачи информации не происходит, потому что информация о состоянии частицы, полученная из опыта с первой частицей, придёт к наблюдателю в месте нахождения второй частицы не быстрее скорости света — до этого он по-прежнему будет знать только, что «его» частица находится в каком-то состоянии. Аргументация о невозможности «обмануть» принцип неопределённости более сложна и её изложение выходит за рамки курса.

Эта пара частиц, находящихся в связанном состоянии является основой для реализации квантовой телепортации. Пусть в точках А и Б находятся частицы такой квантово-запутанной пары. Пусть наблюдатель в точке А берет третью частицу в некотором неизвестном состоянии и заставляет её провзаимодействовать с частицей пары, находящейся в его распоряжении. И после этого взаимодействия определяет состояние этой частицы (тем самым, фактически, безвозвратно изменяя эту частицу). Это взаимодействие приведёт к тому, что частица пары, находящаяся в точке А, окажется в некотором определённом состоянии, что в свою очередь, означает что и вторая частица пары окажется в однозначно теперь заданном определённом состоянии. После этого наблюдатель в точке А передаёт оператору в точке Б *по обычному каналу связи* информацию о результате измерения состояния его частицы после взаимодействия. Теперь оператор в точке Б может взять новую частицу. Задать её состояние в зависимости от сообщённого ему результата наблюдателя в точке А. И заставить эту частицу провзаимодействовать со второй частицей пары. Если правильно организовать эти взаимодействия, можно добиться, чтобы в точке Б появилась частица, находящаяся в точности в том же квантово-механическом состоянии, что и исходная частица в точке А. Таким образом, для передачи информации о состоянии одной частицы («телепортации» этой частицы) необходимо наличие двух частиц в квантово-запутанном состоянии, подходящей частицы-«заготовки» в пункте приёма, и помимо этого обычного канала передачи информации. При этом процесс телепортации происходит заведомо не быстрее скорости света (скорость работы классического канала), а исходная частица оказывается «уничтоженной»: её состояние безвозвратно изменено в ходе измерения исходного состояния.

Экспериментально телепортировались либо отдельные фотоны (на расстояния в несколько сотен метров), либо индивидуальные лёгкие атомы.

### **Сверхтекучесть и сверхпроводимость.**

Явления сверхтекучести и сверхпроводимости — это два ярких макроскопических<sup>1</sup> квантовых явления, о которых иногда упоминают в школе. Отметим сразу, что строгое описание этих явлений далеко выходит за рамки курса, поэтому просто вкратце отметим характерные черты этих явлений.

Сверхпроводимость была открыта Хейке Камерлинг-Оннесом в 1911 году в ртути. Он обнаружил, что при температуре около 4К сопротивление ртути резко падает до нуля. Позднее это явление было открыто и в других (но не во всех) металлах и сплавах, температура перехода в сверхпроводящее состояние в таких «обычных» сверхпроводниках лежит в диапазоне от милikelвинов до примерно 20К. При этом некоторые металлы (золото и медь, например) не становятся сверхпроводниками вплоть до самых низких доступных температур. Сам Камерлинг Оннес стал лауреатом Нобелевской премии по физике в 1913

---

<sup>1</sup> Термин «макроскопический» подчёркивает, что квантовое явление здесь проявляется не на масштабах длины, характерных для микромира (как это имеет место для квантового туннелирования, например), а на больших (макроскопических) масштабах длины.



году за «его работы по изучению свойств вещества при низких температурах, приведшие, в числе прочего, к получению жидкого гелия».

Сверхпроводимость в металлических сверхпроводниках была объяснена теорией Бардина-Купера-Шриффера (теория БКШ), авторам которой была присуждена Нобелевская премия по физике 1972 года. Над теорией сверхпроводимости работали и советские учёные, также удостоенные Нобелевской премии: В.Л.Гинзбург и А.А.Абрикосов (оба в 2003 году).

В 1986 году было обнаружено, что керамика с составом  $\text{La}_{2-x}\text{Ba}_x\text{CuO}_4$  становится сверхпроводником при температуре около 30К. Эта температура заметно выше температуры перехода в сверхпроводящее состояние в «обычных» сверхпроводниках и, что важнее, оказывается выше чем теоретический предел, накладываемый теорией БКШ на возможное значение температуры перехода в сверхпроводящее состояние. Поэтому такую «необычную» сверхпроводимость называли высокотемпературной.

За открытие высокотемпературной сверхпроводимости в 1987 году, всего через год после открытия, была присуждена Нобелевская премия по физике (К.Мюллер и Г.Беднорц). Вслед за этим в схожих керамиках были обнаружены сверхпроводящие переходы и при более высокой температуре, в том числе и при температуре выше температуры жидкого азота.

Поиск сверхпроводника с наиболее высокой температурой перехода является одним из «соревнований» в физике и технике. Интерес к сверхпроводникам связан с тем, что при течении тока по сверхпроводнику нет резистивных потерь. Однако классические металлические сверхпроводники имеют слишком низкую температуру перехода в сверхпроводящее состояния, требующую применения достаточно дорогого жидкого гелия, а высокотемпературные сверхпроводники не технологичны — как правило это керамики, из которых трудно сделать проволоку.

Вопрос о максимальной известной температуре сверхпроводящего перехода сложен — в силу отмеченного технического (и, следовательно, коммерческого) интереса сообщения о рекордах могут оказываться преждевременными и иногда недостоверными. Кроме того, необходимо иметь в виду, что для высокотемпературной сверхпроводимости достаточно типична ситуация, когда часть образца переходит в сверхпроводящее состояние, а часть остаётся в нормальном резистивном состоянии. Поэтому в рекордных сверхпроводниках часто изменение сопротивления при переходе составляет малую долю (часто всего несколько процентов) от полного сопротивления образца, так что такой рекорд оказывается во многом условным. Примеры таких рекордных значений температуры перехода могут быть найдены, например, на сайте [29], признаки сверхпроводящего перехода обнаруживаются в некоторых соединениях при температуре около комнатной.

Для технических применений температура перехода как таковая важна не так сильно, как другие характеристики сверхпроводника: это в первую очередь максимальная плотность сверхпроводящего (то есть без выделения тепла) тока в этом материале и его технологичность. Сверхпроводящий провод используется, например, в магнитах медицинских томографов и в магнитах различных физических лабораторий. Некоторые примеры могут быть найдены на сайте [30].



Рисунок 51: Используемые в ускорителях ЦЕРН кабели на Ампер. На заднем плане: из несверхпроводящего материала, на переднем плане: из сверхпроводника. С сайта [30].

Сверхтекучесть была открыта П.Л.Капицей в 1938 году. Это явление проявляется в том что в жидком гелии-4 при температуре ниже примерно 2.19К пропадает вязкость. Это явление находится в числе главных открытий П.Л.Капицы, также удостоенного Нобелевской премии по физике (в 1978 году). В 1972 году была обнаружена сверхтекучесть в изотопе гелия-3 (в ядре которого содержатся два протона и один нейтрон), возникающая при температуре в 2мК. За это открытие присуждена Нобелевская премия 1996 года Ошерову, Ричардсону и Ли, а в 2003 году Леггету за теорию сверхтекучести гелия-3.

А теперь несколько слов о физике этих явлений. Описание проще начать со сверхтекучести гелия-4. В ядре атома гелия-4 содержатся два протона и два нейтрона, на полностью заполненной 1s-орбитали находится два электрона. Поэтому полный спин этого атома равен нулю и с точки зрения квантовой механики он является бозоном. Мы рассмотрели ранее газ фермионов (газ электронов в металле) и увидели, что запрет Паули для фермионов приводит к тому, что даже при низкой температуре оказываются заняты состояния с большой энергией. У газа невзаимодействующих бозонов тоже есть интересная квантово-механическая особенность — при низкой температуре, ниже некоторой критической, оказывается, что макроскопически большое число частиц (а при  $T=0$  все частицы) занимает одно и то же состояние с минимальной энергией. Это явление называют бозе-конденсацией, а частицы в таком состоянии — бозе-конденсатом.

Образование бозе-конденсата происходит и при наличии взаимодействия частиц. Более того, при некоторых условиях, реализующихся в реальных системах, состояние бозе-конденсата оказывается устроено так, что при достаточно медленном движении оказывается невозможно его разрушить: невозможно передать энергию частице в бозе-конденсате, если эта энергия ниже какой-то пороговой величины. Это отдалённо похоже на часто встречающееся в квантовой физике квантование энергии. В результате, при достаточно медленном движении бозе-конденсата относительно стенок сосуда, в котором он находится, не возникает

диссипации энергии — то есть вязкого трения!

Такое свойство: течение без трения очень похоже на сверхпроводимость, казалось бы надо только заменить атомы на электроны в этом описании. Но, вспоминаем, у электрона (и у гелия-3) есть спин, равный  $1/2$  (в единицах  $\hbar$ ) - то есть это фермион и для него действует запрет Паули. Этот запрет обходится тем, что образуются связанные пары электронов (куперовские пары) с нулевым полным спином, и уже эти пары электронов образуют бозе-конденсат. Для образования такой пары необходимо притяжение частиц, притяжение отрицательно заряженных электронов возникает благодаря посредничеству положительных ионов кристаллической решётки. Процесс образования таких пар описывается как раз теорией БКШ. Как и для сверхтекучего бозе-конденсата, бозе-конденсат куперовских пар в сверхпроводнике может быть разрушен только если сообщить паре достаточно большую энергию — то есть при малых скоростях движения куперовские пары движутся в сверхпроводнике без диссипации. Существование куперовских пар проявляется, например, в том, что заряд в сверхпроводнике протекает порциями  $2e$ . При достаточно сильном токе скорость движения пар становится слишком велика и они начинают разрушаться при рассеянии на дефектах кристалла — сильный ток разрушает сверхпроводимость. Поэтому важной практической характеристикой сверхпроводящего материала является не только температура перехода, но и максимальная плотность тока (или максимальное магнитное поле), не разрушающие сверхпроводимость.

Сверхтекучесть гелия-3 также объясняется формированием пар. А отличие температур перехода в сверхтекучее состояние двух изотопов в 1000 раз подчёркивает различие между ферми- и бозе-частицами в микромире.

## **Заключение.**

Заканчивая наш курс, подчеркнём ещё раз научное и методическое значение квантовой теории.

Квантовая теория - это в основном физика микромира. Это чёткая, логичная и последовательная наука, кажущаяся странность которой связана только с ограниченностью нашего повседневного опыта. Квантовая теория подтверждена многочисленными опытными фактами. Достижения квантовой теории используются во многих уже повседневных разработках.

Методическое значение изучения квантовой теории заключается в том, что на примере квантовой теории можно рассмотреть как возникает новая область знаний, в каких отношениях она должна находиться с существующими, уже проверенными областями знания. А те многочисленные последствия, к которым привёл десяток слов гипотезы Планка о дискретности излучения и поглощения вещества, показывают степень внутренней связанности современной научной картины мира и иллюстрируют, что наши знания о природе уже достаточно полны чтобы не рассматривать различные лженаучные концепции.